УДК 514.8

Определение точек оптимума двух классов двузонных функций

© Е.В. Величко, В.Т. Надыкто

Таврический государственный агротехнологический университет, Мелитополь, 72310, Украина

Рассмотрены трижды дифференцируемые функции, область определения которых можно разбить на несколько интервалов (зон) с существенно различными скоростями роста функции. Дано строгое определение точки оптимума через кривизну кривой. Для двух классов выпуклых двузонных функций задача нахождения точек оптимума решена в общем виде.

Ключевые слова*: точка оптимума функции одной переменной, кривизна кривой, зона функции (кривой), двузонная функция, экспонента.*

Результаты естественных, производственных или экономических процессов обычно зависят от многих факторов. Если мы зафиксируем все факторы, кроме одного, то получим зависимость, которая описывается функцией одной переменной. При исследовании таких функций наибольший интерес представляют точки экстремума и точки перегиба, для нахождения которых используется аппарат дифференциального исчисления.

В этой статье мы рассматриваем процессы, в которых область изменения фактора, который является аргументом, можно условно разбить на несколько интервалов. В каждом из интервалов график функции близок к линейному, но функция на них возрастает (или убывает) с существенно различными скоростями. Такие интервалы будем называть зонами, а соответствующие функции (графики) — n-зонными. Представляет интерес определение точек на оси абсцисс, которые являются границами этих зон.

В качестве примера двузонных функций, применяемых на практике, можно привести функции $y_1 = k - \alpha e^{-\beta x}$ на интервале $(-\infty, \infty)$ и $y_2 = \dfrac{\alpha x}{1-\beta^2 x^2}$ на интервале $\left(0, |\beta|^{-1}\right)$. Первую используют для анализа серии процессов с экспоненциальной составляющей [1, 2], вторую — для аппроксимации кривых буксирования мобильных энергетических систем [3, 4].

В данной статье предпринята попытка формализации понятий n-зонной функции (кривой) и точки разделения зон, которую будем называть точкой оптимума функции одной переменной. Для выпуклых вниз кривых понятие точки оптимума введено в работе [5], где под этим понимается точка кривой, которая наиболее удалена от отрезка, соединяющего концы кривой. Физический смысл такого понятия раскрыт авторами данной статьи в работе [6]. Ниже предлагается определять точку оптимума как точку, в которой достигается локальный максимум кривизны.

Рассмотрим двузонную выпуклую кривую, которая является графиком функции $y(x) \in C^2[a, b]$ с граничными точками $A(a, y(a))$ и $B(b, y(b))$. Пусть точка $C(c, y(c))$ есть гипотетическая точка раздела зон. Поскольку на интервалах $(a, c-\varepsilon)$ и $(c+\varepsilon, b)$ при $\varepsilon > 0$ функция $f(x)$ почти линейная, то ее кривизна на этих интервалах мала. На интервале $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ существенно изменяется значение производной, а следовательно, в точках этого интервала кривизна кривой будет достигать сравнительно больших значений. Таким образом, в качестве точки раздела зон можно взять точку максимума кривизны этой кривой.

Определение. *Точкой оптимума (точкой раздела зон) кривой из класса* $C^2[a, b]$ *называется точка, в которой кривизна кривой достигает локального максимума.*

Определение. *Зоной кривой из класса* $C^2[a, b]$ *называется промежуток между двумя соседними точками оптимума либо промежуток между границей области определения и ближайшим оптимумом.*

Как известно, кривизна плоской кривой, заданной в виде $y(x)$, вычисляется по формуле

$$k(x) = \frac{\left|y''(x)\right|}{\left(1 + y'(x)^2\right)^{3/2}}, \tag{1}$$

поэтому уравнение для определения точки оптимума имеет вид

$$\max_{c \in (a, b)} k(c) \to \max. \tag{2}$$

Если $y(x) \in C^3[a, b]$ и функция $y(x)$ является выпуклой или вогнутой, то выражение (2) можно заменить на условие

$$k'(c) = 0. \tag{3}$$

Будем рассматривать приведенные выше двузонные кривые. Для них график кривизны представляет собой кривую типа гауссовой. Запишем функцию

$$y_1 = \gamma - \alpha e^{-\beta x}, \tag{4}$$

где $\alpha, \beta > 0$.

Поскольку для функции (4)

$$k=\frac{\alpha\beta^2 e^{-\beta x}}{\left(1+\alpha^2\beta^2 e^{-2\beta x}\right)^{3/2}},$$

то условие (3) запишется в виде

$$\frac{\alpha\beta^3 e^{-\beta c}\left(2\alpha^2\beta^2 e^{-2\beta c}-1\right)}{\left(1+\alpha^2\beta^2 e^{-2\beta c}\right)^{5/2}}=0.$$

Отсюда точка оптимума для функции (4)

$$c=\frac{1}{2\beta}\ln\left(2\alpha^2\beta^2\right). \tag{5}$$

Анализ приведенных выше рассуждений показывает, что формула (5) будет верна и при $\alpha\beta\neq 0$ (более общий случай).

Например, для функции $y=e^{-x}$ имеем $\alpha=-1,\ \beta=1$ и $c=\frac{\ln 2}{2}$. Следовательно, для этого случая $C\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Для функции $y=e^{2x}$ получаем $\alpha=-1,\ \beta=-2$ и $c=-\frac{\ln 8}{4}$. Следовательно, для этого случая $C\left(-\frac{3\ln 2}{4},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

Теперь рассмотрим функцию

$$y_2=\frac{\alpha x}{1-\beta^2x^2}, \tag{6}$$

где $\alpha,\beta>0;\ x\in\left(0,\beta^{-1}\right)$.

Для упрощения выкладок перейдем к новой системе координат $z=\beta x,\ Y=\beta y.$ Функция (6) в новых координатах запишется в виде

$$Y=\frac{\gamma z}{1-z^2}, \tag{7}$$

где $\gamma=\alpha\beta^{-1};\ z\in(0,1)$.

Опуская громоздкие выкладки, связанные с вычислениями производных, отметим, что условие (3) можно представить в виде

$$\frac{P(t,\gamma)}{Q(t,\gamma)}=0,$$

где

$$P(t,\gamma) = P_1(t) - \gamma^2 P_2(t);$$

$$P_1(t) = t^{12} + 2t^{10} - 17t^8 + 28t^6 - 17t^4 + 2t^2 + 1; \quad (8)$$

$$P_2(t) = t^8 + 6t^6 + 16t^4 + 10t^2 - 1. \quad (9)$$

Таким образом, делаем вывод, что при заданном значении γ точка оптимума есть корень уравнения

$$\frac{P_1(t)}{P_2(t)} = \gamma^2, \quad (10)$$

лежащий в интервале (0, 1).

График функции приведен на рисунке $F(x) = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$.

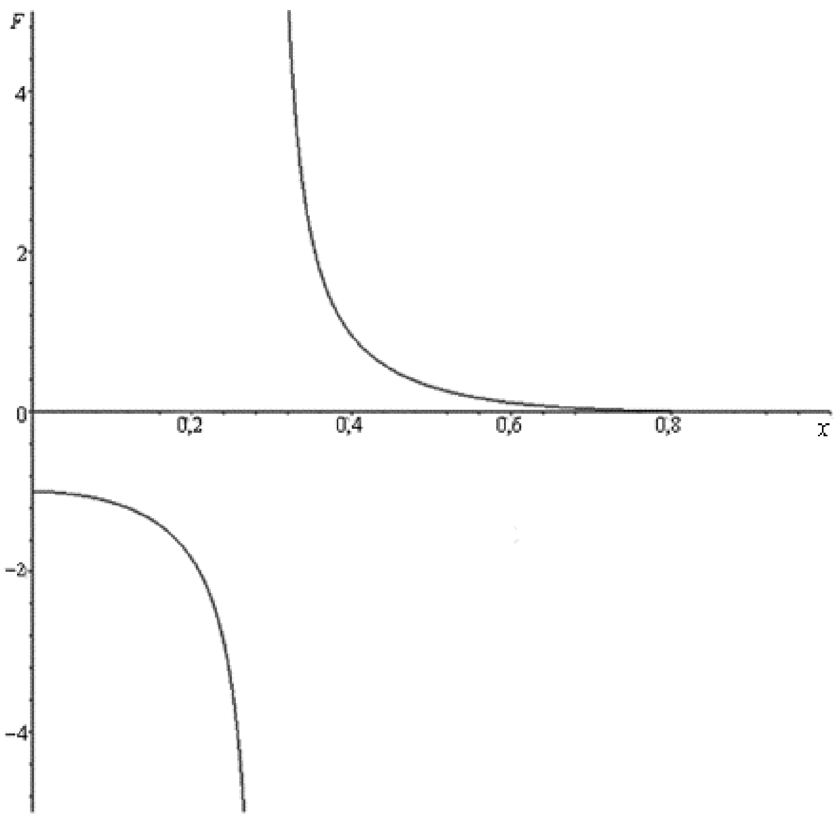

График функции $F(x)$

Видно, что при любом значении $\gamma^2 > 0$ уравнение (10) действительно имеет одно решение, причем оно лежит на более узком интервале $(A, 1)$, где $A \approx 0{,}2956$ — наименьший положительный корень многочлена $P_2(x)$.

Отметим, что при $\gamma^2 \to 0$ точка оптимума $t \to 1$, а при $\gamma^2 \to \infty$ точка оптимума $t \to A$. Для удобства ниже приведены значения t для некоторых значений параметра γ:

γ..........	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2
t	0,777	0,686	0,5655	0,486	0,4326	0,3966	0,327

Для возврата к исходным координатам нужно вычислить c по формуле

$$c = t/\beta. \tag{11}$$

В качестве примера установим оптимум функции $y = \dfrac{0{,}12x}{1-3x^2}$, для которой $\alpha = 0{,}12$, $\beta = \sqrt{3} \approx 1{,}732$.

Находим $\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{0{,}12}{1{,}732} \approx 0{,}069$ и определяем, что $t = 0{,}814$. Воспользовавшись формулой (11), вычисляем абсциссу точки оптимума $c = \dfrac{0{,}814}{1{,}732} = 0{,}47.$

Отметим, что предложенное определение точки оптимума является локальным. Оно применимо к функциям, графики которых имеют асимптоты и положение точки оптимума которых не зависит от положения точек, выбранных в качестве концов интервала задания функции, внутри которого лежит оптимум.

Таким образом, дано определение точек оптимума (точек раздела зон) функции одной переменной и для функции вида $y_1 = \gamma - \alpha e^{-\beta x}$ получено аналитическое выражение для точки оптимума, а для функции вида $y_2 = \dfrac{\alpha x}{1-\beta^2 x^2}$ — уравнение, позволяющее численно определять эту точку оптимума.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Русанов В.А. *Проблема переуплотнения почв движителями и эффективные пути ее решения*. Москва, ВИМ, 1998, 368 с.

[2] Ксеневич И.П., Скотников В.А., Ляско М.И. *Ходовая система — почва — урожай*. Москва, Агропромиздат, 1985, 304 с.

[3] Сураев Н.Г. Исследование тягового КПД и буксования тракторов. *Тракторы и сельскохозяйственные машины*, 1991, № 4, с. 8–20.

[4] Трепененков И.И. *Эксплуатационные показатели сельскохозяйственных тракторов*. Москва, Машиностроение, 1963, 272 с.

[5] Истомина В.В. Определение рационального оптимума монотонных нелинейных функций. *Оптимізація виробничих процесів.* Зб. наук. пр. Севастополь, Вид-во СевНТУ, 2010, вып. 12, с. 128–130.

[6] Надикто В., Величко О. Означення точки оптимуму кривої та спосіб ii визначення. *Техніка і технології АПК*, 2014, № 2 (53), с. 16–18.

Статья поступила в редакцию 17.07.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Величко Е.В., Надыкто В.Т. Определение точек оптимума двух классов двузонных функций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 5. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/math/1298.html

Величко Елена Вадимовна родилась в 1979 г., окончила Запорожский национальный университет в 2001 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика и физика» Таврического государственного агротехнологического университета. Автор более 50 публикаций по математике и механике. Область научных интересов — механика термоупругих многослойных сред, аппроксимация функций. e-mail: velichko_ev@i.ua

Надыкто Владимир Трофимович родился в 1956 г., окончил Днепропетровский сельскохозяйственный университет в 1977 г. Д-р тех. наук, проф., проректор по научной работе, чл.-кор. НААНУ, заведующий кафедрой «Машиноиспользование в земледелии» Таврического государственного агротехнологического университета. Автор более 200 научных публикаций, из них — 30 авторские свидетельства и патенты на изобретения. Область научных интересов — повышение эффективности машиноиспользования в земледелии. e-mail: imesh@zp.ukrtel.net

Determining the optimum points of two classes of two-band functions

© E.V. Velichko, V.T. Nadykto

Tavria State Agrotechnological University, Melitopol', Zaporozhzhya region, Ukraine, 72310

The study tested thrice differentiable functions whose definitional domain can be divided into several intervals (zones) with significantly different rates of function growth. A strict definition of the optimum point through the curvature of the curve is given. For two classes of convex two-band functions the problem of finding the optimum point is solved in a general way.

Keywords: *optimal point of one variable function, curvature of the curve, area of the function, area of the curve, two-band function, exponent.*

REFERENCES

[1] Rusanov V.A. *Problema pereuplotneniya pochv dvizhitelyami i effektivnye puti ee resheniya* [The problem of soil compaction by track-laying movers and effective ways to solve it]. Moscow, VIM Publ., 1998, 368 p.

[2] Ksenevich I.P., Skotnikov V.A., Lyasko M.I. *Khodovaya sistema – pochva – urozhai* [Running System – soil – crop]. Moscow, Agropromizdat Publ., 1985, 304 p.

[3] Suraev N.G. *Traktory i sel'skokhoziaistvennye mashiny — Tractors and Agricultural Machinery*, 1991, no. 4, pp. 8–20.

[4] Trepenenkov I.I. *Ekspluatatsionnye pokazateli sel'skokhozyaistvennykh traktorov* [Performance of agricultural tractors]. Moscow, State scientific-technical publishing house of engineering literature, 1963, 272 p.

[5] Istomina V.V. *Optimizatsiya virobnichikh protsesiv* [Optimization of production processes]. Coll. Sci. Pap., Sevastopol', SevNTU Publ., 2010, iss. 12, pp. 128–130.

[6] Nadykto V., Velichko O. *Tekhnika i tekhnologiï APK — Engineering and Technology APC*, 2014, no. 2 (53), pp. 16–18.

Velichko E.V. (b. 1979) graduated from Zaporozhzhya National University in 2001 with MS (Math.). Ph.D., Assoc. Professor of the Higher Mathematics and Physics Department at Tavria State Agrotechnological University, Melitopol'. Research interests include mechanics of thermoelastic multilayer surroundings, approximation of mathematical functions. Author of more than 50 publications on mathematics and mechanics. e-mail: velichko_ev@i.ua

Nadykto V. T. (b. 1956) graduated from Dnepropetrovsk Agricultural University in 1977. Dr. Sci. (Eng.), Professor, vice-chancellor for scientific work, corresponding member of National Academy of Agrarian Sciences of Ukraine, head of the Machine Usage in Agriculture Department. Research interests include machine usage efficiency in agriculture. Author of over 200 scientific publications, including 30 copyright certificates and patents. e-mail: imesh@zp.ukrtel.net