УДК 519.179.1

Редукционные методы восстановления некоторого класса гиперграфов

А.А. Гурченков[1], Д.С. Костяной[2], А.В. Мокряков[2]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2] МАТИ — РГТУ им. К.Э. Циолковского, Москва, 121552, Россия

Рассмотрены методы получения некоторых классов гиперграфов из заданного вектора. Для каждого из классов представлен алгоритм построения гиперграфа из произвольного вектора. В случае невозможности построения алгоритм устанавливает, насколько следует уменьшить вектор, чтобы гиперграф можно было реализовать. В планарных графах между двумя точками проводится дуга. Если пространство имеет размерность на единицу больше, то уже через три точки проводится плоскость и в качестве гиперребра выступает треугольник.

Ключевые слова: *гиперграфы, реализуемость вектора, k-комплексы.*

Введение. Идеи восстановления гиперграфов [1] некоторых классов из произвольных векторов сформулированы при решении задачи о распределении ресурсов, представленных в виде векторов [2]. Рассмотрим следующие четыре класса гиперграфов:

$\Gamma_1^1(k,n)$ — на n вершинах существуют гиперребра только с весом 1, инцидентные k различным вершинам;

$\Gamma_1^\infty(k,n)$ — на n вершинах существуют гиперребра только с весом 1, инцидентные k вершинам, в том числе гиперребра размерностью меньше k;

$\Gamma_\infty^1(k,n)$ — на n вершинах существуют кратные гиперребра, инцидентные k различным вершинам;

$\Gamma_\infty^\infty(k,n)$ — на n вершинах гиперребра содержат любой набор из k вершин, т. е. гиперребра размерностью меньше k, которые могут быть кратными.

С.П. Хакими [3] исследовал вопрос реализуемости вектора в граф. В работах [4–7] алгоритм Хакими видоизменен таким образом, что появилась возможность получения не одного, а всех возможных графов, удовлетворяющих исходному вектору. Однако более сложные модели требуют использования понятия гиперграфа [8]. В ряде работ [9–11] были исследованы вопросы реализации вектора в двухкомплекс (гиперграф). Упомянутые работы основаны на результатах, приведенных в [12–16]. При этом общего алгоритма для k-комплексов не получено. Здесь делается попытка привести варианты реализации вектора в гиперграф с определенными ограничениями на его структуру.

Класс $\Gamma_1^1(k,n)$. Рассмотрим первый алгоритм, который строит из вектора гиперграф класса $\Gamma_1^1(k,n)$. Для следующих алгоритмов потребуется ввести обозначение $l_{\mathbf{A}}(0)$ — число координат вектора $\mathbf{A}=(a_i)$, $1\le i\le n$, равных нулю при $i\ge k$.

Алгоритм 1. Пусть дан вектор $\mathbf{A}=(a_1, \dots, a_n)$, где $n\ge k$. Координаты вектора $\mathbf{A}$ упорядочены по невозрастанию. Для построения гиперграфа будем последовательно отнимать от k выбранных координат вектора $\mathbf{A}$ по 1. Каждое такое вычитание означает построение одного гиперребра.

Шаг 1. Вектор $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}-\mathrm{B}$, где

$$b_i=\begin{cases}\alpha_1=\min\{a_1, \dots, a_{k-1}, n-k+1-l_{\mathbf{A}}(0)\}, & 1\le i\le k-1;\\ 1, \quad k\le i\le n-k+1+\alpha_1. & \end{cases}$$

Шаг 2. Вектор $\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_1-\mathrm{B}$, где

$$b_i=\begin{cases}\alpha_2=\min\{a_1, \dots, a_{k-2}, a_k, n-k-l_{\mathbf{A}}(0)\}, & 1\le i\le k-2, \quad i=k;\\ 1, \quad k+1\le i\le n-k+\alpha_2. & \end{cases}$$

Шаг $n-k$. Вектор $\mathbf{A}_{n-k}=\mathbf{A}_{n-k-1}-\mathrm{B}$, где

$$b_i=\begin{cases}\alpha_{n-k}=\min\{a_1, \dots, a_{k-2}, a_{n-1}, 1-l_{\mathbf{A}}(0)\}, & 1\le i\le k-2, \quad i=n-1;\\ 1, \quad i=n. & \end{cases}$$

Шаг $n-k+1$. Если $a_1=0$, то сортируем вектор $\mathbf{A}_{n-k}$ по невозрастанию и переходим к шагу 1 (при построении гиперребер учитываем, что координаты перенумерованы); в противном случае находим вектор $\mathbf{A}_{n-k+1}=\mathbf{A}_{n-k}-\mathrm{B}$, где

$$b_i=\begin{cases}\alpha_{n-k+1}=\min\{a_1, \dots, a_{k-2}, a_k, n-k+1-l_{\mathbf{A}}(0)\}, & 1\le i\le k-2, \quad i=k;\\ 1, \quad k+1\le i\le k+\alpha_{n-k+1}. & \end{cases}$$

В общей сложности из a_i-й вершины можно вычесть до C_n^k вершин b_i. Алгоритм завершает свою работу, когда все варианты вычитаний перебраны или вектор $\mathbf{A}_p=\vec{0}$.

Пример 1. Построим гиперграф на основе вектора $(10,7,6,4,3)$.

Ниже представлены векторы, получаемые последовательно из начального ветора **A**:

A	10	7	6	4	3
$\mathbf{A}_1$	9	6	5	4	3
$\mathbf{A}_2$	8	5	5	3	3
$\mathbf{A}_3$	7	5	4	2	3
$\mathbf{A}_4$	7	4	3	1	3
$\mathbf{A}_5$	6	3	3	1	2
$\mathbf{A}_6$	5	3	2	1	1
$\mathbf{A}_7$	4	3	2	0	0

В результате имеем 7 наборов по 3 элемента в каждом и остаток из 9 элементов (4 первых, 3 вторых и 2 первых).

Легко отследить, какое количество исходных наборов элементов доступно для разложения.

Класс $\Gamma_1^{\infty}(k,n)$. Второй алгоритм приводит к построению гиперграфа класса $\Gamma_1^{\infty}(k,n)$, в котором ребра могут содержать не уникальные вершины.

Алгоритм 2. Пусть дан вектор $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, где $n \geq k$. Координаты вектора $\mathbf{A}$ упорядочены по невозрастанию. Для построения гиперграфа будем последовательно отнимать от k выбранных координат вектора $\mathbf{A}$ по 1. Каждое такое вычитание означает построение одного гиперребра с повторяющимися вершинами.

Шаг 1. Вектор $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathrm{B}$, где $\nu = 0$;

$$b_i = \begin{cases} \min\{a_1, k-\nu\}, & i = 1; \\ \nu, & i = 2; \\ 0, & i \geq 2. \end{cases}$$

Шаг 2. Если $a_1 = 0$, то сортируем вектор $\mathbf{A}_1$ по невозрастанию и переходим к шагу 1. В противном случае увеличиваем ν и $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \mathrm{B}$, где $\nu = 1$;

$$b_i = \begin{cases} \min\{a_1, k-\nu\}, & i = 1; \\ \nu, & i = 2; \\ 0, & i \geq 3. \end{cases}$$

Шаг 3. Вектор $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 - \mathrm{B}$, где $\nu = 1$;

$$b_i = \begin{cases} \min\{a_1, k-\nu\}, & i = 1; \\ \nu, & i = 3; \\ 0, & i \geq 4. \end{cases}$$

Шаг $n-1$. Вектор $\mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{A}_{n-2} - \mathrm{B}$, где $\nu = 1$;

$$b_i = \begin{cases} \min\{a_1, k-\nu\}, & i = 1; \\ \nu, \quad i = n. \end{cases}$$

Шаг *n*. Если $a_1 = 0$, то сортируем вектор $\mathbf{A}_{n-1}$ по невозрастанию и переходим к шагу 1. Иначе увеличиваем ν и $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_{n-1} - \mathrm{B}$, где $\nu = 2$;

$$b_i = \begin{cases} \min\{a_1, k-\nu\}, & i = 1; \\ \nu, \quad i = 2; \\ 0, \quad i \geq 3. \end{cases}$$

И так до тех пор, пока $a_1 > 0$ или $\nu < k$. Если $\nu = k$, а $a_1 > 0$, то вектор невозможно реализовать в гиперграф класса $\Gamma_1^{\infty}(k, n)$.

Класс $\Gamma_{\infty}^{1}(k, n)$. Третий алгоритм реализует исходный вектор в повторяющиеся гиперребра, вершины в которых уникальны.

Алгоритм 3. Пусть дан вектор $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, где $n \geq k$. Координаты вектора $\mathbf{A}$ упорядочены по невозрастанию. Для построения гиперграфа будем последовательно отнимать от k выбранных координат вектора $\mathbf{A}$ по максимально возможному значению p. Каждое такое вычитание означает построение одного гиперребра с весом p. Таким образом постепенно будет построен гиперграф.

Шаг 1. Вектор $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathrm{B}$, где

$$b_i = \begin{cases} \alpha_1 = \min\{a_1, \ldots, a_k\}, & 1 \leq i \leq k; \\ 0, \quad k \leq i \geq n. \end{cases}$$

Шаг 2. Поскольку как минимум одна из координат равна нулю, сортируем вектор по невозрастанию и снова переходим к шагу 1.

Алгоритм завершает свою работу, когда вектор становится нулевым или когда $n - l_{\mathbf{A}}(0) < k$. В последнем случае с помощью этого алгоритма реализовать гиперграф невозможно.

Произвольный класс. В случае, когда гиперребра и вершины в них могут повторяться, строим ряд разнообразных алгоритмов. Представим только один случай, основанный на предыдущих алгоритмах.

Алгоритм 4. Пусть дан вектор $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$, где $n \geq k$. Координаты вектора $\mathbf{A}$ упорядочены по невозрастанию. Для построения гиперграфа будем последовательно отнимать от k выбранных координат вектора **A** по максимально возможному значению *p*. Каждое такое вычитание означает построение одного гиперребра с весом *p*. В конце объединим оставшиеся вершины по принципу действия второго алгоритма.

Шаг 1. Используем алгоритм 3.

Шаг 2. Если полученный вектор не равен нулю, то используем алгоритм 2.

Заключение. В работе были определены четыре класса гиперграфов на *n* вершинах, которые различаются по типам гиперребер и их кратности. Для каждого из классов были выбраны наиболее простые, быстрые и эффективные алгоритмы, позволяющие легко построить программу, реализующую произвольные векторы в гиперграфы различных классов. Для первого алгоритма приведен пример реализации вектора. Не исключено последующее их усовершенствование, так как не решена проблема однозначности реализации гиперграфа из вектора. Также не решен вопрос о реализации всех гиперграфов, имеющих один и тот же вектор степеней вершин.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зыков А.А. Гиперграфы. *УМН*, 1972, вып. 6(180), с. 3–7.

[2] Костяной Д.С. Модель сбалансированного распределения ресурсов в условиях ограниченности. *Научн. тр. Международной конф. «XXXIX Гагаринские чтения»*. Москва, 2013, с. 69–70.

[3] Хакими С.П. О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа. *Кибернетика.* Москва, 1966, вып. 2, с. 40–53.

[4] Миронов А.А. Геометрия точек пространства R^n, реализуемых в граф. *УМН*, 1977, т. XXII, № 6, с. 231–232.

[5] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Graphical Representation of Multilayered Hierarchical Structures. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1992, vol. 30, no. 5, pp. 114–119.

[6] Миронов А.А. О реализуемости наборов чисел в граф и свойства графов с заданным набором степеней вершин. Тр. Гор. ГУ, 1981, с. 76–97.

[7] Миронов А.А. Равномерные обобщенные графы. ДАН, 1996, т. 351, № 4.

[8] Мокряков А. В. Представление гиперграфов в виде алгебраической структуры. *Изв. РАН. Теория и системы управления*. Москва, Наука, 2011, т. 5, с. 53–59.

[9] Mironov A.A., Mokryakov A.V., Sokolov A.A. About Realization of Integer Non-Negative Numbers Tuple into 2-Dimensional Complexes. *Applied and Computational Mathematics*, 2007, vol. 6, no. 1, pp. 58–68.

[10] Миронов А.А., Мокряков А.В. Двумерные комплексы полностью описываемые степенями вершин. Попкова Ю.С., ред. *Тр. ИСА РАН. Дина-мика неоднородных систем*, 2006, № 10(1), с. 178–186.

[11] Mokryakov A.V., Tsurkov V. I. Reconstructing 2-Complexes by a Nonnegative Integer-Valued Vector. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72. no. 12, pp. 2541–2552.

[12] Миронов А.А., Цурков В.И. Класс распределительных задач с минимаксным критерием. ДАН, 1994, вып. 336, № 1, с. 35–38.

[13] Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V. I. Minimax Estimations of Arc Weights in Integer Networks With Fixed Node Degrees. *Applied and Computational Mathematics*, 2009, vol. 8, no. 2, pp. 216–226.
[14] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Transport Problems With a Minimax Criterion. *ДАН*, 1996, т. 346, № 2, с. 168–171.
[15] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Minimax under Nonlinear Transportation Constraints. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 3, pp. 351–354.
[16] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Open Transportation Models with a Minimax Criterion. Doklady Mathematics, 2001, vol. 64, no. 3, pp. 374–377.

Статья поступила в редакцию 24.07.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Гурченков А.А., Костяков Д.С., Мокряков А.В. Редукционные методы восстановления некоторого класса гиперграфов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 6. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/1294.html

Гурченков Анатолий Андреевич родился в 1939 г., окончил МИФИ в 1968 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: теория управления, управляемое движение тел с жидким наполнением, теория оптимизации. e-mail: challenge2005@mail.ru

Костяной Дмитрий Сергеевич родился в 1992 г. Студент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» МАТИ — РГТУ им. К.Э. Циолковского. Область научных интересов: гиперграфы, топология, оптимизация на графах. e-mail: ali.latex@gmail.com

Мокряков Алексей Викторович родился в 1982 г., окончил МАТИ в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» МАТИ — РГТУ им. К.Э. Циолковского. Область научных интересов: гиперграфы, *k*-комплексы, реализуемость вектора в граф. e-mail: ali.latex@gmail.com

Reduction methods of recovering a certain class of hypergraphs

© A.A. Gurchenkov[1], D.S. Kostyanoi[2], A.V. Mokryakov[2]

[1] Bauman Mosocw State Technical University, Mosocw, 105005, Russia
[2] MATI — Tsiolkovsky Russian State Aviation Technological University, Moscow, 121552, Russia

The main purpose of the article is to study methods for obtaining some classes of hypergraphs from a given vector. For each class we present an algorithm of constructing hypergraph of this class from an arbitrary vector. If the hypergraph construction is impossible, the algorithm determines how much the vector should be diminished in order to allow it. In planar graphs an arc is drawn between two points. If dimension of space is increased by one unit, a plane is drawn through three points and hyperarc is a triangle. A priori we take four classes of hypergraphs. In the first case there are no hyperedges,and all of them have the same dimension. In the second case hyperedges may have different dimensionality, in other words, nodes can be incident to triangles and arcs. In the third case multiple hyperarcs are considered. In the fourth case hyperedges of different dimensions of the spaces are possible, by analogy with the second cas.

Keywords: *hypergraphs, realizability of vector into graph, k-complexes.*

REFERENCES

[1] Zykov A.A. *Uspekhi matematicheskikh nauk — Advance of Mathematical Sciences,* 1972, iss. 6 (180), pp. 3–7.

[2] Kostyanoi D.S. Model' sbalansirovannogo raspredeleniya resursov v usloviyakh ogranichennosti [The model of balanced allocation of resources in limited conditions]. *Nauchnye trudy mezhdunarodnoi konferentsii «XXXIX Gagarinskie chteniya»* [Scientific proceedings of the International Conference "XXXIX Gagarin readings"], Moscow, 2013, pp. 69–70.

[3] Khakimi S.P. *O realizuemosti mnozhestva tselykh chisel stepenyami vershin grafa* [On the realizability of the set of integers by degrees of vertices]. Moscow, Mir Publ., Kibernetika coll. pap., iss. 2, 1966, pp. 40–53.

[4] Mironov A.A. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk — Advance in Math. Sci*., vol. XXII, no. 6, 1977, pp. 231–232.

[5] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1992, vol. 30, no. 5, pp. 114–119.

[6] Mironov A.A. O realizuemosti naborov chisel v graf i svoistva grafov s zadannym naborom stepenei vershin [On the realizability of sets of numbers in the graph and properties of graphs with a given set of vertex degrees]. *Tr. Gor. GU*, 1981, pp. 76–97.

[7] Mironov A.A. *Doklady Akademii Nauk Rossii — RAS Reports*, 1996, vol. 351, no. 4.

[8] Mokryakov A.V. *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*, 2011, vol. 5, pp. 53–59.

[9] Mironov A.A., Mokryakov A.V., Sokolov A.A. *Applied and Computational Mathematics*, 2007, vol. 6, no. 1, pp. 58–68.

[10] Mironov A.A., Mokryakov A.V. *Trudy ISA RAN. Dinamika Neodnorodnykh Sistem — Proceedings of ISA RAS. Dynamics of Heterogeneous Systems*, Yu.S. Popkov, ed. 2006. no. 10(1), pp. 178–186.
[11] Mokryakov A.V., Tsurkov V.I. Reconstructing 2-complexes by a nonnegative integer-valued vector. *Automation and Remote Control,* 2011, vol. 72, no. 12, pp. 2541–2552.
[12] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Doklady Akademii Nauk — RAS Reports*, 1994, vol. 336, no. 1, pp. 35–38.
[13] Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V.I. Minimax Estimations of Arc Weights in Integer Networks with Fixed Node Degrees. *Applied and Computational Mathematics*, 2009, vol. 8, no. 2, pp. 216–226.
[14] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Doklady Akademii Nauk — RAS Reports*, 1996, vol. 346, no. 2, pp. 168–171.
[15] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Minimax under Nonlinear Transportation Constraints. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 3, pp. 351–354.
[16] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Open transportation models with a minimax criterion. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 3, pp. 374–377.

Gurchenkov A.A. (b. 1939), Dr. Sci. (Phys.&Math.), Professor of the Higher Mathematics Department of Bauman Moscow State Technical University. He is the author of about 130 publications in the field of applied mathematics and mechanics, including 8 monographs. Scientific interests in modelling and control of fluid-containing rotating rigid bodies. e-mail: challenge2005@mail.ru

Kostianoi D.S. (b. 1992), a student of the Applied Mathematics and Information Technologies Department at MATI — Tsiolkovsky Russian State Aviation Technology University. Scientific interests include hypergraphs, topology, optimization on graphs.
e-mail: ali.latex@gmail.com

Mokriakov A.V. (b. 1982) graduated from MATI — Tsiolkovsky Russian State Aviation Technology University. Ph.D., Assoc. Professor of the Applied Mathematics and Information Technologies Department, at Russian State Aviation Technology University. Scientific interests include hypergraphs, k-complexes, the realizability of the vector in the graph. e-mail: ali.latex@gmail.com