УДК 519.854

Вычислительные тесты по декомпозиционному алгоритму для транспортной задачи

© А.А. Гурченков[1], А.П. Тизик[2], Э.В. Торчинская[3]

[1] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2] ФГБУН Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, 119991, Россия
[3] МФТИ (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., 141700, Россия

Представлены вычислительные тесты по итеративному методу на основе последовательного пересчета коэффициентов функционала для транспортной задачи. Оптимальное решение получено за три итерации, не использует случая вырождения, совпадает со стандартной программой по методу потенциалов. Использованы стандартные методы теории оптимизации. Алгоритм строит последовательность решений промежуточных одномерных задач, которые не являются допустимыми для исходной задачи. Имеет место монотонный рост по функционалу на псевдорешениях. Получены формулы решений промежуточных двумерных задач с зацепляющимися переменными и последовательно пересчитаны коэффициенты функционалов. Найдено допустимое решение в системе равенств. При отсутствии допустимого решения сформулирована задача о максимальном потоке для транспортных ограничений с запретами. По некоторому правилу сформированы корреспондирующие пары индексов.

Ключевые слова: *транспортная задача, декомпозиция, обобщенные поставщики и потребители.*

Введение. Методы декомпозиции эффективны во многих оптимизационных задачах со многими переменными и ограничениями [1–16]. В работе [17] представлен итеративный метод решения классической транспортной задачи, в котором последовательно решены задачи с двумя ограничениями из разных групп и с одной связывающей переменной. В [18] этот подход эффективно применен для транспортных задач с дополнительными пунктами производства и потребления. В алгоритме последовательно пересчитываются коэффициенты целевой функции, затем формулируются одномерные задачи, число которых равно числу ограничений исходной задачи. Полученные решения позволяют найти исходный оптимум или определить систему ограничений на переменные. Допустимые решения этой системы дают оптимальное решение исходной задачи. Если допустимых решений нет (вырождение), то решают задачи о максимальном потоке: находят множество так называемых взаимно удовлетворенных пар, формируют множество обобщенных производителей и потребителей и путем суммирования строят новую исходную задачу с меньшим числом ограничений. После этого процесс последовательного решения двумерных задач повторяется и алгоритм строит последовательность так называемых псевдорешений с монотонным возрастанием функционала. Метод напрямую распространяется на широкий класс транспортных и распределительных задач.

Вычислительный тест. Интересным моментом работы алгоритма является случай, когда оптимум достигается без привлечения обобщенных поставщиков и потребителей. Это иллюстрирует следующий тест для транспортной задачи размерностью 7×7. Здесь итеративный процесс запрограммирован, поскольку не представляется возможным осуществить последовательные расчеты, как это сделано в примере в работе [17]. Пусть

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}=30,\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}=20,\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}=25,\\
&x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}=40,\\
&x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}=30,\\
&x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}=20,\\
&x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}=50;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}=50,\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}+x_{72}=20,\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}+x_{63}+x_{73}=30,\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{74}=40,\\
&x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{65}+x_{75}=25,\\
&x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56}+x_{66}+x_{76}=20,\\
&x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{47}+x_{57}+x_{67}+x_{77}=30.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
J=&\;2x_{11}+2x_{12}+18x_{13}+8x_{14}+10x_{15}+12x_{16}+2x_{17}+\\
&+4x_{21}+10x_{22}+12x_{23}+14x_{24}+6x_{25}+2x_{26}+8x_{27}+\\
&+12x_{31}+14x_{32}+14x_{33}+14x_{34}+16x_{35}+14x_{36}+16x_{37}+\\
&+16x_{41}+4x_{42}+20x_{43}+4x_{44}+14x_{45}+6x_{46}+16x_{47}+\\
&+6x_{51}+16x_{52}+14x_{53}+12x_{54}+4x_{55}+8x_{56}+20x_{57}+\\
&+20x_{61}+12x_{62}+20x_{63}+6x_{64}+14x_{65}+12x_{66}+8x_{67}+\\
&+6x_{11}+10x_{12}+10x_{13}+10x_{14}+6x_{15}+16x_{16}+20x_{17}\to\min.
\end{aligned}$$

Первоначальная оценка оптимума снизу имеет вид

$$\begin{aligned}
J_0=&\;1\cdot 30+1\cdot 20+6\cdot 25+2\cdot 40+2\cdot 25+3\cdot 5+3\cdot 20+3\cdot 50+\\
&+30\cdot 1+20\cdot 2+20\cdot 1+20\cdot 5+40\cdot 2+25\cdot 2+20\cdot 1+30\cdot 1=975.
\end{aligned}$$

Простая проверка показывает, что соответствующее псевдорешение решением не является.

Начинаем итерационный процесс. Попарно перебираем пункты производства и потребления и решаем транспортные задачи для каждой пары. Например, первая из них вместе с ее решением выглядит так:

						11	12	13	14	15	16	17	= 30
71	61	51	41	31	21	11							= 50
3	10	3	8	6	2	2	1	9	4	5	6	1	1
11 =	30,	21 =	20										1

Здесь и далее используется индексная запись транспортной задачи [17].

Приведем еще несколько подзадач:

						11	12	13	14	15	16	17	= 30
73	63	53	43	33	23			13					= 30
5	10	7	10	7	6	1	1	18	4	5	6	1	7
11	+12	+17	= 30,	73 =	30								11

						31	32	33	34	35	36	37	= 25
72	62	52	42	22	12	32							= 20
5	6	8	2	5	1	8	14	7	7	8	7	8	10
33	+34	+36	= 25,	12 =	20								4

Последняя будет иметь вид

						71	72	73	74	75	76	77	= 50
67	57	47	37	27	17							77	= 30
3	10	8	5	5	2	5	7	4	6	4	9	20	11
17 =	30,	73	+75	= 50									9

После решения 49 подзадач получаем оценку снизу для функционала:

$$J_1 = 0\cdot 30 + 0\cdot 20 + 8\cdot 25 + 2\cdot 40 + 2\cdot 25 + 3\cdot 5 + 4\cdot 20 + 4\cdot 50 +$$
$$+\ 50\cdot 1 + 20\cdot 1 + 30\cdot 6 + 40\cdot 2 + 25\cdot 2 + 20\cdot 2 + 30\cdot 2 = 1105\,.$$

Еще один цикл решения 49 подзадач дает

$$J_2 = 0\cdot 30 + 1\cdot 20 + 8\cdot 25 + 2\cdot 40 + 3\cdot 25 + 4\cdot 5 + 4\cdot 20 + 4\cdot 50 +$$
$$+\ 50\cdot 1 + 20\cdot 2 + 30\cdot 6 + 40\cdot 2 + 25\cdot 1 + 20\cdot 1 + 30\cdot 2 = 1130.$$

После еще одного повторения находим

$$J_3 = 0\cdot 30 + 1\cdot 20 + 8\cdot 25 + 2\cdot 40 + 3\cdot 25 + 4\cdot 5 + 4\cdot 20 + 4\cdot 50 +$$
$$+\ 50\cdot 2 + 20\cdot 2 + 30\cdot 6 + 40\cdot 2 + 25\cdot 1 + 20\cdot 1 + 30\cdot 2 = 1180.$$

Дальнейшее повторение алгоритма не дает новых результатов, так как функционалы не возрастают. Следовательно, результатом решения будут уравнения

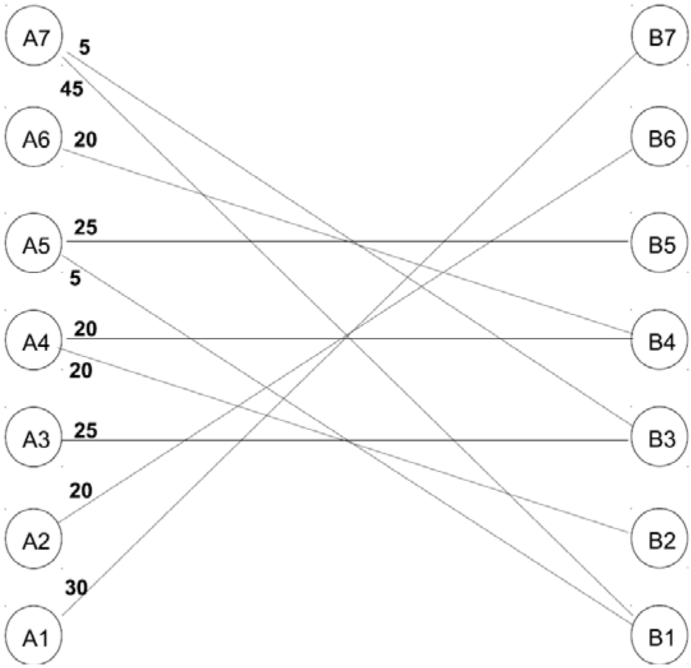
$$x_{11} + x_{12} + x_{17} = 30,$$
$$x_{26} = 20,$$
$$x_{33} = 25,$$
$$x_{42} + x_{44} = 40,$$
$$x_{55} = 25,$$
$$x_{51} = 5,$$
$$x_{64} = 20,$$

$$x_{71} + x_{73} + x_{75} = 50,$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{51} + x_{71} = 50,$$
$$x_{12} + x_{42} = 20,$$
$$x_{33} + x_{73} = 30,$$
$$x_{44} + x_{64} = 40,$$
$$x_{55} = 25,$$
$$x_{26} = 20,$$
$$x_{17} = 30,$$

откуда получаем

$$x_{17} = 30,\ x_{26} = 20,\ x_{33} = 25,\ x_{42} = 20,\ x_{44} = 20,\ x_{51} = 5,$$
$$x_{55} = 25,\ x_{64} = 20,\ x_{71} = 45,\ x_{73} = 5,$$
$$J = 1180.$$

Эти данные легко проверить, воспользовавшись, например, решением транспортной задачи методом потенциалов (рисунок) [19]. Легко видеть, что оно в точности совпадает с решением, полученным итеративным методом.



Решение транспортной задачи методом потенциалов

Заключение. Представлены численные расчеты итеративным методом для транспортной задачи, когда вычисления осуществляются по простой схеме без вырождения. Этот случай не является общим. Как правило, окончательная система линейных алгебраических уравнений несовместная, алгоритм работает по рассмотренной схеме, но вводятся обобщенные поставщики и потребители. Дальнейшие численные расчеты будут относиться к случаю наличия обобщенных поставщиков и потребителей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Миронов А.А., Цурков В.И. Approximation and Decomposition by Extremal Graphs. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1993, т. 33, № 2, с. 34–39.

[2] Миронов А.А., Цурков В.И. Транспортные и сетевые задачи с минимаксным критерием. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1995, т. 35, № 1, с. 141–147.

[3] Миронов А.А., Цурков В.И. Наследственно минимаксные матрицы в моделях транспортного типа. *РАН. ТиСУ*, 1998, № 6, с. 67–73.

[4] Миронов А.А., Цурков В.И. Transport-Type Problems with a Criterion. *Автоматика и телемеханика*, 1995, № 12, с. 109–118.

[5] Миронов А.А., Цурков В.И. Наследственно минимаксные матрицы в моделях транспортного типа. *РАН. ТиСУ*, 1998, № 6, с. 89–96.

[6] Миронов А.А., Цурков В.И. Транспортные задачи с минимаксным критерием. *Докл. РАН*, 1996, т. 346, № 2, с. 342–347.

[7] Миронов А.А., Цурков В.И. Network Models with Fixed Parameters in Coupling Nodes. 2. *Изв. РАН. ТиСУ*, 1993, № 6, с. 3–14.

[8] Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V.I. Minimax Estimations of Expectates of Arc Weights in Integer Networks with Fixed Node Degrees. *Applied and Computational Mathematics*, 2009, vol. 8, no. 2, pp. 216–226.
[9] Cheburakhin I.F., Tsurkov V.I. On the Complexity of Realization of Symmetric Zhegalkin Polynomials. *Applied and computational mathematics*, 2010, vol. 9, no. 2, pp. 198–219.
[10] Averbakh I., Lebedev V., Tsurkov V. Nash Equilibria Solutions in The Competitive Salesmen Problem on a Network. *Applied and Computational Mathematics*, 2008, vol. 7, no. 1, pp. 54–65.
[11] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Open Transportation Models with a Minimax Criterion. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no 3, pp. 374–377.
[12] Mironov A.A., Tsurkov V.I. A Triplanar Transportation Problem with a Minimax Criterion. *Doklady Mathematics*, 1996, vol. 54, no. 3, pp. 972–975.
[13] Чебурахин И.Ф., Цурков В.И. Оптимизация и автоматизация синтеза симметрических комбинационных автоматов на основе базовых матричных кристаллов. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2009, № 7, с. 19–29.
[14] Чебурахин И.Ф., Цурков В.И. Специальная реляционная база данных для оптимизации и автоматизации синтеза комбинационных автоматов. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2010, № 9, с. 7–13.
[15] Чебурахин И.Ф., Цурков В.И. Синтез дискретных логических устройств обработки информации на основе теории агентов. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2011, № 3, с. 27–34.
[16] Tsurkov V. Aggregation in a Branch Manufacturing Problem and Its Extension. *Proc. 13th IFAC Symp. Information Control Problems in Manufacturing*, Moscow, 2009, pp. 310–312.
[17] Тизик А.П., Цурков В.И. Метод последовательной модификации функционала для решения транспортной задачи. *Автоматика и телемеханика*, 2012, № 1, с. 148–158.
[18] Соколов А.А., Тизик А.П., Цурков В.И. Итеративный метод для транспортной задачи с дополнительными пунктами производства и потребления и квадратичным штрафом. *Изв. РАН. ТиСУ*, 2013, № 4, с. 88–98.
[19] http://math.semestr.ru/transp/index.php

Статья поступила в редакцию 10.07.2014

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:
Гурченков А.А., Тизик А.П., Торчинская Э.В. Вычислительные тесты по декомпозиционному алгоритму для транспортной задачи. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 5.
URL: http://engjournal.ru/catalog /it/ hidden/1293.html

Гурченков Анатолий Андреевич родился в 1939 г., окончил МИФИ в 1968 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: теория управления, управляемое движение тел с жидким наполнением, теория оптимизации. e-mail: challenge2005@mail.ru

Тизик Александр Петрович родился в 1942 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1965 г. Канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. ФГБУН Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН. Область научных интересов: исследование операций, дискретное программирование, трансвортные задачи, декомпозиция задач большой размерности. e-mail: tizik_ap@mail.ru

Торчинская Элина Владимировна родилась в 1990 г. Аспирант МФТИ. Область научных интересов: оптимизация, декомпозиция задач большой размерности.

Computational tests on the decomposition algorithm for the transportation problem

© A.A. Gurchenkov[1], A.P. Tizik[2], E.V. Torchinskaya[3]

[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2] Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, 119991, Russia
[3] Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

The article presents numerical tests of iterative method for solving transportation problem based on successive recalculations of functional coefficient. Optimal solution is achieved in three iterations and degeneration is not involved. This solution matches those obtained by standard program using method of potentials. Standard optimization methods are used. Algorithm constructs a sequence of solutions for intermediate one-dimensional problems, which are not permissible for the original problem. Monotonous functional growth at pseudosolutions takes place. Formulas of solutions of intermediate two-dimensional problems with hooked variables are composed. Coefficients of functional are successively recalculated. Finally permissible solution is searched in a set of equations. If there is no such solution the problem of maximum flow with transportation limitations is solved. Corresponding indices pairs are formed by certain rule.

Keywords: *transportation problem, decomposition, generalized suppliers and consumers.*

REFERENCES

[1] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Approximation and Decomposition by Extremal Graphs. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1993, vol.. 33, no. 2, pp. 34–39.

[2] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1995, vol. 35, no. 1, pp. 141–147.

[3] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Izvestiya RAN.Teoriya i Sistemy Upravleniya — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*, 1998, no. 6, pp. 67–73.

[4] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Transport-type Problems With a Criterion. *Avtomatika i Telemekhanika — Automation and Remote Control*, 1995, no. 12, pp. 109–118.

[5] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Izvestiya RAN.Teoriya i sistemy upravleniya — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*, 1998, no. 6, pp. 89–96.

[6] Mironov A.A., Tsurkov V.I. *Doklady RAN — RAS Reports*, 1996, vol. 346, no. 2, pp. 342–347.

[7] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Network Models With Fixed Parameters in Coupling Nodes. 2. *Izvestiya RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*, 1993, no. 6, pp. 3–14.

[8] Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V.I. Minimax Estimations of Expectates of Arc Weights in Integer Networks With Fixed Node Degrees. *Applied and Computational Mathematics*, 2009, vol. 8, no. 2, pp. 216–226.

[9] Cheburakhin I.F., Tsurkov V.I. On the Complexity of Realization of Symmetric Zhegalkin Polynomials. *Applied and Computational Mathematics*, 2010, vol. 9, no. 2, pp. 198–219.

[10] Averbakh I., Lebedev V., Tsurkov V. Nash Equilibria Solutions in The Competitive Salesmen Problem on a Network. *Applied and Computational Mathematics*, 2008, vol. 7, no. 1, pp. 54–65.

[11] Mironov A.A., Tsurkov V.I. Open Transportation Models With a Minimax Criterion. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 3, pp. 374–377.

[12] Mironov A.A., Tsurkov V.I. A Triplanar Transportation Problem with a Minimax Criterion. *Doklady Mathematics*, 1996, vol. 54, no. 3, pp. 972–975.

[13] Cheburakhin I.F., Tsurkov V.I. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie — Mechatronics, Automation, Control*, 2009, no 7, pp. 19–29.

[14] Cheburakhin I.F.,Tsurkov V.I. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie — Mechatronics, Automation, Control,* 2010, no. 9, pp. 7–13.

[15] Cheburakhin I.F.,Tsurkov V.I. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie — Mechatronics, Automation, Control*, 2011, no. 3, pp. 27–34.

[16] Tsurkov V. Aggregation in a Branch Manufacturing Problem and its Extension. *Proc. 13th IFAC Symp. Information Control Problems in Manufacturing*, Moscow, 2009, pp. 310–312.

[17] Tizik A.P., Tsurkov V.I. *Avtomatika i Telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2012, no. 1, pp. 148–158.

[18] Sokolov A.A., Tizik A.P., Tsurkov V.I. *Izvestiya RAN.Teoriya i sistemy upravleniya — Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*, 2013, no. 4, pp. 88–98.

[19] http://math.semestr.ru/transp/index.php

Gurchenkov A.A. (b. 1939**)**, Dr. Sci. (Phis. & Math.), Professor of the Higher Mathematics Department of Bauman Moscow State Technical University. He is the author of about 130 publications in the field of applied mathematics and mechanics, including 8 monographs. Scientific interests in modelling and control of fluid-containing rotating rigid bodies. e-mail: challenge2005@mail.ru

Tizik A.P. (b. 1942) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1965. Ph.D. (Phys.&Math.), Senior Researcher at Dorodnicyn Computing Centre of RAS. Scientific interests in operations research, discrete programming, transportation problems, decomposition of large-scale problems. e-mail: tizik_ap@mail.ru

Torchinskaya E.V. (b. 1990) is a postgraduate at Moscow Institute of Physics and Technology (State University). Scientific interests in optimization, decomposition of large-scale problems.