УДК 519.254

Алгоритмы учета неопределенности информации при точечном оценивании потоков в сетях

© Ю.Е. Гагарин

КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

Рассмотрены алгоритмы учета погрешности исходной информации в задачах оптимизации систем, обладающих сетевой структурой. На примере задачи о максимальном потоке показаны особенности применения алгоритмов.

Ключевые слова: *линейное программирование, алгоритмы учета неопределенности, сетевые структуры, измерения с ошибками, оптимальное решение.*

Многочисленные территориально распределенные системы — транспортные, информационные, энергетические и т. п. — обладают сетевой структурой. Для описания таких коммуникационных сетей служит взвешенный граф, ребрам и вершинам которого приписывают веса, соответствующие пропускным способностям и потребностям. Формулируемые задачи для взвешенных графов позволяют оценить значения функционалов, заданных на этих графах, и при фиксированных весах вершин синтезировать такие веса на ребрах графа, чтобы реализовывалось решение между истоками и стоками графа при достижении экстремума функционала, заданного на множестве ребер этого графа. Подобные задачи формулируются в терминах линейного программирования, но удобнее формулировать задачи линейного программирования в терминах распределения потоков на графах.

Методы линейного программирования являются наиболее эффективными и известными методами решения моделей исследования операций и применяются в различных областях. Широкое их использование подкрепляется высокоэффективными компьютерными алгоритмами линейного программирования, на которых базируются алгоритмы более сложных типов моделей и задач исследования операций, включая целочисленное, нелинейное и стохастическое программирование.

Условия, в которых определяется оптимальное решение задачи линейного программирования, находят отражение в момент формирования модели. В действительности эти условия не остаются неизменными. Поэтому особое значение приобретает анализ устойчивости, т. е. возможность оценить изменения в оптимальном решении, вызванные изменениями в параметрах исходной модели: в коэффициентах целевой функции, элементах матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, и в правой части условий-ограничений. Особенно важно знать, при каких изменениях параметров задачи оптимальное решение этой задачи остается неизменным. Параметры задачи линейного программирования можно варьировать путем изменения условий функционирования описываемых объектов. Например, в транспортных моделях может меняться количество транспорта, который перемещается из одного пункта в другой, или пропускная способность между узлами транспортной сети. Эти изменяющиеся параметры влекут неопределенность параметров задачи [1].

Параметры задачи линейного программирования могут являться случайными величинами, и тогда важно знать, как может изменяться решение задачи в зависимости от изменения исходных данных. При этом необходимо иметь по крайней мере сведения о математическом ожидании и дисперсии этих случайных величин, если нет возможности оценить их функции распределения. В таком случае неопределенностям значений параметров необходимо указать соответствующие доверительные вероятности. Как правило, в подобных случаях для получения оптимального решения рассматривают серию прямых близких задач, изменяя значения параметров.

В задаче о максимальном потоке [2] каждая дуга сети характеризуется некоторой пропускной способностью. Пусть узел s — источник, узел t — сток, v — внешний поток, входящий в сеть в узле s и выходящий из нее в узле t. Задачу о максимальном потоке можно записать как задачу линейного программирования: найти максимум v при ограничениях

$$\sum_{k\in M_{O_i}} f_k - \sum_{k\in M_{T_i}} f_k = 0,\ \ i \in N - (s,\, t);$$

$$\sum_{k\in M_{O_i}} f_k - \sum_{k\in M_{T_i}} f_k - v = 0;$$

$$\sum_{k\in M_{O_i}} f_k - \sum_{k\in M_{T_i}} f_k + v = 0;$$

$$0 \le v \le v_r;$$

$$0 \le f_k \le c_k\,,\ \ k \in M,$$

где M — список дуг; O_i, T_i — набор начальных и конечных узлов соответственно; f_k — поток по дуге k; N — множество узлов; c_k — пропускная способность дуги k (определяет верхнюю границу потока по дуге).

В стандартной постановке задачи о максимальном потоке поток сохраняется при прохождении по дугам сети. Если f_k является потоком в начале дуги k, а f_k' — в ее конце, то $f_k' = f_k$.

В различных сетевых структурах поток f_k или пропускная способность c_k дуги может меняться в некоторых пределах. Так, в транспортных системах в разное время суток поток может изменяться, например возрастать в часы пиковой нагрузки. В то же время пропускная способность в часы пиковой нагрузки уменьшается. Таким образом, поток и пропускная способность не будут определяться однозначно, а будут иметь некоторую погрешность: $f_k \pm \Delta f_k$ и $c_k \pm \Delta c_k$.

Учет погрешности Δf_k может привести к тому, что поток по дуге сети уменьшится практически до нуля или даже станет отрицательной величиной, т. е. изменит свое направление. При учете погрешности Δc_k пропускная способность может также снизиться до нуля.

Учет неопределенности исходной информации приводит к изменению условий ограничений, что, в свою очередь, может изменить множество допустимых решений задачи линейного программирования, а в результате и оптимальное решение задачи.

Для оценивания погрешностей Δf_k и Δc_k существует ряд статистических подходов, которые основаны на разных моделях «измерения с ошибками».

Наиболее часто [3] ставится задача определения оценок параметров модели:

$$y_i = f\left(x_i, \theta\right) + \varepsilon_i, \ \ i = \overline{1, n},$$

где ε_i — случайная ошибка, имеющая нормальное распределение с параметрами $M\left(\varepsilon_i\right) = 0$, $D\left(\varepsilon_i\right) = \sigma_i^2 I$, $D\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0$, $i, j = \overline{1, n}$.

Данная постановка является классической регрессионной задачей, решаемой методом максимума правдоподобия или методом наименьших квадратов (МНК).

Если $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $i = \overline{1, n}$, и значение σ^2 не задано, то оценку параметра σ^2 можно найти по формуле

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{s}{n - p},$$

где $s = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f\left(x_i, \hat{\theta}\right) \right]^2$; p — число параметров.

Регрессионный анализ предполагает, что переменные x являются детерминированными. На практике это требование очень часто не выполняется, поэтому возникает необходимость учета погрешностей аргумента x.

Рассмотрим пассивный эксперимент определения оценок параметров функции $\eta = f\left(\xi, \overline{\theta}\right)$, где $\overline{\theta}$ — вектор неизвестных параметров. В процессе наблюдения получаем набор значений x_i и y_i, определяемых как

$$y_i = \eta_i + \varepsilon_i;$$
$$x_i = \xi_i + \delta_i,$$

где ε_i, δ_i — ошибки значений функции и аргумента, $i = \overline{1,\ n}$.

Предположим, что ошибки измерений ε_i и δ_i — нормально распределенные случайные величины с нулевыми средними значениями, дисперсиями $\sigma^2\left(y_i\right)$ и $\sigma^2\left(x_i\right)$ соответственно и коэффициентом корреляции $\rho_i = 0$.

Рассмотрим несколько алгоритмов решения данной задачи.

I. Один из алгоритмов при оценивании параметров МНК подразумевает использование вместо истинных значений ξ_i наблюдаемых значений x_i. При этом ошибка δ_i игнорируется, и в результате имеем следующую модель:

$$y = f\left(x, \overline{\theta}\right) + ошибка.$$

В основном, как показано в работе [4, 5], этот подход дает несостоятельную оценку с большим асимптотическим смещением.

В работе [5] рассмотрен случай, когда ξ — случайная величина, выбранная независимо от ε_i и δ_i, с характеристиками $E\left(\xi\right) = \mu$, $\operatorname{cov}\left(\xi\right) = \Sigma_\xi$. Значения ξ_i аппроксимируются результатами измерений x_i и при нормальном законе распределения случайной величины ξ_i

$$E\left(\xi \middle| x\right) = x\Lambda + \mu\left(I - \Lambda\right),$$

где $\Lambda = \left[\Sigma_\xi + \sigma^2\left(x\right)I\right]^{-1}\Sigma_\xi$, имеет место модель

$$y = f\left(x\Lambda + \mu\left(I - \Lambda\right), \overline{\theta}\right) + ошибка.$$

Когда μ и Λ неизвестны, то, используя исходную выборку x_i, $i = \overline{1, n}$, определяют оценки $\hat{\mu}$, $\hat{\Lambda}$ и в итоге получают модель

$$y = f\left(x\hat{\Lambda} + \hat{\mu}\left(I - \hat{\Lambda}\right),\ \hat{\theta}\right) + ошибка = f\left(\hat{\xi}, \hat{\theta}\right) + ошибка.$$

Оценки параметров такой модели могут быть определены МНК.

II. Поставленная задача может быть решена итеративным МНК с уточняемыми весами [6, 7]. Предполагается, что x_i является выборкой из некоторой генеральной совокупности с функцией плотности распределения $f\left(x_i \middle| x_{0i}\right)$. При этом первые моменты функции $f\left(x_i \middle| x_{0i}\right)$ известны и конечны.

В этом случае для построения минимизируемого функционала F необходимо знать вид функции плотности распределения $f\left(y_i \middle| x_{0i}\right)$ или ее моменты. Для их определения в работе [7] предлагается использовать разложение функции $f\left(x_i, \overline{\theta}\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_{0i}. Тогда первый и второй моменты функции плотности распределения $f\left(y_i \middle| x_{0i}\right)$ будут определяться по формулам

$$E\left(y_i \middle| x_{0i}\right) \approx f\left(x_{0i}, \overline{\theta}\right);$$

$$\sigma^2\left(y_i \middle| x_{0i}\right) \approx \sigma^2\left(y_i\right) + \left[\left.\frac{\partial f\left(x_i, \overline{\theta}\right)}{\partial x_i}\right|_{x_i \approx x_{0i}}\right]^2 \sigma^2\left(x_i\right).$$

Итерационный процесс нахождения оценок параметров строится следующим образом.

1. Составляется функционал

$$F_0 = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - E\left(y_i \middle| x_{0i}\right)\right]^2 w_i^0,$$

где $w_i^0 = \sigma^{-2}\left(y_i\right)$, и находятся оценки параметров $\overline{\theta}^0$, при которых достигается минимум F_0, т. е. решается регрессионная задача.

2. Подсчитываются величины

$$w_i^1 = \sigma^{-2}\left(y_i \middle| x_{0i}\right).$$

3. Составляется сумма

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - E\left(y_i \middle| x_{0i}\right)\right)^2 w_i^1$$

и определяются оценки $\overline{\theta}^1$.

Операции 2 и 3 повторяются до тех пор, пока относительные изменения параметров на соседних итерациях не будут меньше некоторой малой величины γ:

$$\max\left|\frac{\theta_j^0-\theta_j^1}{\theta_j^0}\right|\le\gamma,\quad j=\overline{1,\,m}.$$

III. В работе [8] предложен алгоритм, позволяющий учитывать ошибки переменных x_i для линейных моделей:

$$y_i = a\xi_i + b + \varepsilon_i;$$
$$x_i = \xi_i + \delta_i,$$

где ε_i, δ_i — ошибки измеренных значений функции и аргумента, $i=\overline{1,n}$.

Традиционными методами, например МНК, определяют оценки параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}$ модели, считая, что x_i — детерминированные величины. При этом получают модель с известными параметрами:

$$y_i - \hat{b} = \hat{a}\xi_i + \varepsilon_i;$$
$$x_i = \xi_i + \delta_{i,}$$

где $i=\overline{1,n}$.

В матричном виде имеют регрессионную модель

$$\begin{bmatrix} y_i-\hat{b} \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ 1 \end{bmatrix}\xi_i + \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \delta_i \end{bmatrix},$$

где ξ_i — неизвестный параметр, подлежащий оцениванию.

IV. Возможность оценивания параметров функций любого вида с учетом погрешностей исходных данных дают методы конфлюентного анализа [1]. Доказано, что в этих методах итерационные процедуры нахождения оценок сходятся, а получаемые оценки параметров являются несмещенными.

При таком подходе исходная модель имеет вид

$$y_i = \eta_i + \varepsilon_i;$$
$$x_i = \xi_i + \delta_i,$$

где y_i, x_i — наблюдаемые значения; η_i, ξ_i — точные значения; ε_i, δ_i — ошибки измеренных значений, $i=\overline{1,n}$.

Оценки параметров $\overline{\theta}$ находятся из условия минимума функционала

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left(y_i-\eta_i\right)^2}{\sigma^2\left(y_i\right)}+\frac{\left(x_i-\xi_i\right)^2}{\sigma^2\left(x_i\right)}\right].$$

Сложность определения оценок параметров заключается в том, что неизвестны истинные значения ξ_i, а заданы лишь их доверительные интервалы. Поэтому перед тем, как определять оценки параметров $\overline{\theta}$, необходимо оценить значения ξ_i.

Истинные значения ξ_i будут определяться из условия

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right|_{\xi_i = \hat{\xi}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Задача минимизации функционала F эквивалентна решению системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - \eta_i}{\sigma^2(y_i)} \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_t} = 0, \quad t = \overline{1, s};$$

$$\frac{x_i - \xi_i}{\sigma^2(x_i)} + \frac{y_i - \eta_i}{\sigma^2(y_i)} \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Решение системы уравнений представляет собой итерационный процесс, который заканчивается при выполнении одного из следующих условий:

1) на очередном шаге значение функционала F меньше заданного числа γ;

2) на соседних итерациях значение функционала F и значения оценок параметров $\hat{\theta}$ отличаются незначительно, т. е.

$$\left|\frac{F_\nu - F_{\nu+1}}{F_\nu}\right| \le \gamma_1; \quad \max\left|\frac{\theta_t^\nu - \theta_t^{\nu+1}}{\theta_t^\nu}\right| \le \gamma_2, \quad t = \overline{1, s},,$$

где γ_1, γ_2 — заданные числа;

3) исчерпан лимит итераций.

Анализ рассмотренных алгоритмов учета погрешностей исходных данных показывает, что при моделировании транспортных сетей оценивание параметров линейных функций с учетом погрешностей в исходных данных сложностей не вызывает. Для нелинейных функций возникает проблема вычислительного характера, поскольку для получения оценок параметров в этом случае необходимо применять итерационные процедуры.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Грешилов А.А. *Математические методы принятия решений.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006, 584 с.

[2] Йенсен П., Барнес Д. *Потоковое программирование.* Москва, Радио и связь, 1984, 392 с.

[3] Бард Й. *Нелинейное оценивание параметров.* Москва, Статистика, 1979, 349 с.

[4] Успенский А.Б., Федоров В.В. *Вычислительные аспекты МНК при анализе и планировании регрессионных экспериментов.* Москва, Изд-во МГУ, 1975, 168 с.

[5] Gleser L.J. Improvements of the naive approach to estimation in nonliner errors-in-variables regression models. *Statist. Anal. Meas. Error Models and Appl.: Proc. AMS-IMS-SIAM*, 1990, pp. 99–114.

[6] Федоров В.В. *Теория оптимального эксперимента.* Москва, Наука, 1971, 312 с.

[7] Schater D.W. Measurement error model estimation using iteratively weighted teast squares. *Statist. Anal. Meas. Error Models and Appl.: Proc. AMS-IMS-SIAM*, 1990, pp. 129–138.

[8] Fuller W.A. *Measurement error models.* New York ect., Wiley, 1987, 440 p.

Статья поступила в редакцию 05.06.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гагарин Ю.Е. Алгоритмы учета неопределенности информации при точечном оценивании потоков в сетях. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 7. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/network/1285.html

Гагарин Юрий Евгеньевич родился в 1964 г., окончил КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1987 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладное обеспечение ЭВМ, информационные технологии и прикладная математика». Область научных интересов: математическое программирование, обработка статистических данных, математическое моделирование. e-mail: g_ug@mail.ru

Algorithms to deal with information uncertainty with point estimation of network flows

© Yu.E. Gagarin

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia

The paper considers the algorithms to deal with errors in initial information in network structure systems and problems of their optimization. We support the study with the sample problem on maximum flow and show how to employ the algorithms.

Keywords: *linear programming, algorithms to deal with uncertainty, network structure, measurement errors, the optimal solution.*

REFERENCES

[1] Greshilov A.A. *Matematicheskie metody priniatiya resheniy* [Mathematical methods of decision-making]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006, 584 p.

[2] Yensen P., Barnes D. *Potokovoe programmirovanie* [Flow programming]. [in Russian]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1984, 392 p.

[3] Bard Y. *Nelineinoe otsenivanie parametrov* [Nonlinear parameter estimation]. Moscow, Statistika Publ., 1979, 349 p.

[4] Uspensky A.B., Fedorov V.V. *Vychislitel'nye aspekty MNK pri analize i planirovanii regressionnykh eksperimentov* [Computational aspects of MLS in the analysis and design of regression experiments]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1975, 168 p.

[5] Gleser L.J. *Statist. Anal. Meas. Error Models and Appl., Proc. AMS-IMS-SIAM*, 1990, pp. 99–114.

[6] Fedorov V.V. *Teoriya optimal'nogo eksperimenta* [Theory of optimal experiment]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 312 p.

[7] Schater D.W. *Statist. Anal. Meas. Error Models and Appl., Proc. AMS-IMS-SIAM*, 1990, pp. 129–138.

[8] Fuller W.A. *Measurement error models.* New York ect., Wiley, 1987, 440 p.

Gagarin Yu.E. (b. 1964) graduated from Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University in 1987. PhD, Assoc. Professor at the Department of Applied Computer Software, Information Technology and Applied Mathematics at Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University. Research interests include mathematical programming, statistical data processing, mathematical modeling. e-mail: g_ug@mail.ru