УДК 621.387

Моделирование тепловых процессов идеального термокатода с использованием пакета прикладных программ MathCad

© И.К. Белова

КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

Рассмотрены вопросы, связанные с анализом процесса разогрева термокатода с применением закона сохранения энергии. Проведено моделирование процесса разогрева термокатода на основе тонкого стержня, нагреваемого электрическим током. Процесс разогрева описан дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка, вывод которого основан на закономерностях по теплопроводности твердых тел, теории теплопроводности и известном математическом аппарате с использованием средств вычислительной техники.

Ключевые слова: *термокатод, процесс разогрева, теплопроводность, программная модель, MathCad.*

Термокатоды используют в газоразрядных ионных лазерах на ионизированных газах. Применение таких приборов имеет достаточно широкий спектр. В настоящее время их используют в системах экологической безопасности. Накаленные катоды в этих приборах должны обеспечить высокую плотность электронов для создания сильноточного дугового разряда низкого давления и малый уровень распыления при интенсивной ионной бомбардировке их поверхностей в течение нескольких тысяч часов.

Перспективной основой для создания таких приборов являются накаленные катоды, разогреваемые до рабочей температуры либо прямым пропусканием тока через тело катода, либо косвенно от постоянного источника теплоты. Термокатод является не отдельной деталью прибора, а частью его физико-химической системы. В условиях газоразрядных приборов недопустим отбор тока с катода, пока последний не приобретет температуру, при которой его эмиссионная способность не будет равна отбираемому от него току. В этом случае энергетический баланс определяется мощностью накала, тепловых потерь, потерь в держателях и теплопроводностью газа. Все перечисленные составляющие становятся функциями времени t с момента включения нагрева.

Рассмотрим способ решения уравнения теплопроводности для прямонакаленного катода для условий вакуума. В качестве математической модели такого катода выберем тонкий стержень (нить), нагреваемый электрическим током, причем допустим, что на поверхности стержня имеет место теплообмен с окружающей средой [1, 2].

Стержень предполагаем настолько тонким, что в любой момент времени температура всех точек его поперечного сечения будет одной и той же. Если принять ось стержня за ось абсцисс, то его температура $T = T(x,\, t)$ будет функцией координаты x и времени t. Процесс разогрева в этом случае описывается дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка, вывод которого основывается на следующих закономерностях теплопроводности твердых тел [3], теории теплопроводности и известном математическом аппарате [2, 3]:

количество теплоты, которое необходимо сообщить одному телу (катоду), чтобы повысить его температуру на ΔT,

$$\Delta Q = C\rho V \Delta T,$$

где C, ρ, V — теплоемкость, плотность материала и объем катода соответственно;

количество теплоты, протекающее через поперечное сечение стержня за время Δt, пропорционально площади сечения S, скорости изменения температуры $\partial T / \partial x$ в направлении, перпендикулярном сечению, и промежутку времени Δt:

$$\Delta Q = -\lambda_S \frac{\partial T}{\partial x} \Delta t,$$

где λ_S — теплопроводность материала держателя (знак «–» свидетельствует о том, что направление теплового потока противоположно направлению градиента температур).

Выделим участок стержня, ограниченный поперечными сечениями с абсциссами x и $x + \Delta x$, и составим для него уравнение теплового баланса. Количество теплоты, входящее через поперечное сечение с абсциссой x, в точке $x + \Delta x$ составит [2]

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x.$$

Поэтому тепловой поток, входящий через сечение с абсциссой $x + \Delta x$,

$$-\lambda_S \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \right) \Delta t.$$

Разность входящего и выходящего тепловых потоков составит количество теплоты, сообщенное выбранному участку стержня за время Δt:

$$\Delta Q_1 = \lambda_S \frac{\partial T}{\partial x} \Delta t - \lambda_S \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \right) \Delta t = -\lambda_S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \Delta t.$$

Если выбранный участок стержня находится в лучистом теплообмене со средой, имеющей температуру T_0, то, согласно закону Стефана — Больцмана, количество теплоты, теряемой участком,

$$\Delta Q_2 = -\varepsilon \omega \sigma \left(T^4 - T_0^4 \right) \Delta x \Delta t,$$

где ε — степень черноты; ω — периметр поперечного сечения стержня; σ — удельное электрическое сопротивление; знак «–» взят потому, что теплота излучается телом (теряется).

От источника накала к стержню подводится количество теплоты, которое можно задать несколькими способами.

Если $I_{\text{н}}$ — ток накала, то подводимое к участку стержня за время Δt количество теплоты [2, 3]

$$\Delta Q_3 = \frac{I_{\text{н}}^2 \sigma}{S} \Delta x \Delta t.$$

Уравнение теплового баланса на выбранном участке имеет вид

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3.$$

Задав объем участка стержня как $V = S\Delta x$, можно записать

$$SC\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda_S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \varepsilon \omega \sigma \left(T^4 - T_0^4 \right) + \frac{P_{\text{н}}}{l},$$

где $P_{\text{н}}$ — подводимая мощность накала; l — длина стержня.

Обычно уравнение теплопроводности применяют в более удобном для анализа виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\lambda}{C\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \left(T^4 - T_0^4 \right) + \frac{P_{\text{н}}}{l}. \quad (1)$$

Уравнения теплопроводности имеют единственное решение при наличии начального и граничных условий [2, 3]. Для катодов прямого накала начальное условие формулируется сравнительно просто и заключается в том, что начальная температура катода равна температуре окружающей среды:

$$T(x, 0) = T_0. \quad (2)$$

Граничные условия сводятся к заданию условий теплообмена на ограничивающих поверхностях. Задают либо распределение температуры на ограничивающих поверхностях, либо тепловой поток через ограничивающую поверхность, либо температуру тела связывают с температурой окружающей среды через коэффициенты теплоотдачи [2].

Для катодов прямого накала границы заданы его длиной l. Это могут быть точки с координатами $\pm l/2$, если центр координатной системы находится в центре катода, либо точки с координатами $x = 0$ и $x = l$, если начало координат совмещено с одним из концов катода. Самый простой случай граничных условий — постоянная температура концов катода:

$$T(0, t) = T(l, t) = T_0. \tag{3}$$

В связи с условностью начала отсчета температуры и учетом граничных условий за начало отсчета температуры можно принять температуру T_0.

Преобразуем уравнение (1), начальное условие (2) и граничное условие (3) применительно к идеальному катоду, который отличается от реального лишь отсутствием тепловых потерь на его концах [2]. Это означает отсутствие градиента температур по длине катода, а следовательно, и теплового потока в тело катода ($\Delta Q = 0$ означает, что $\partial^2 T/\partial x^2 = 0$). Приближение к идеальному катоду заключается в пренебрежении членом $\dfrac{\lambda}{C\rho}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ в уравнении (1) и граничным условием (3). Для общности будем считать, что в начальный момент времени катод находится под дежурным нагревом с температурой $T_{\text{д}}$. В этих условиях уравнение теплопроводности и начальное условие примут вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\varepsilon\omega\gamma}{SC\rho}\left(T^4 - T_0^4\right) + \frac{P_{\text{н}}}{SC\rho l}; \tag{4}$$

$$T(0) = T_{\text{д}}.$$

Если пренебречь производной второго порядка по координате, то нелинейное дефференциальное уравнение (1) в частных производных принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения в полных производных (после проведенных упрощений температура зависит только от времени).

Нелинейность уравнения (1) определяется наличием члена, содержащего T^4. Известно лишь несколько точных решений, рассматривающих процесс излучения по закону Стефана — Больцмана [2]. Математические сложности решения нелинейных уравнений приводят к необходимости либо решать их с использованием средств информационных технологий, либо упрощать задачу. В настоящее время существует большое количество прикладных математических программ, позволяющих решать дифференциальные уравнения разной степени сложности. Наиболее часто используемой является MathCad.

В качестве математической модели процесса разогрева термоэмиссионного катода можно использовать одномерное уравнение теплопроводности для тонкого стержня конечной длины, которое можно записать в виде [4]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_S}{C\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k_1\left(T^4 - T_0^4\right) - k_2\left(T - T_0\right) + \frac{P_{\text{н}}}{SC\rho l}, \tag{5}$$

где k_1, k_2 — коэффициенты; T — температура катода; T_0 — температура окружающей среды. Первые три члена в правой части уравнения обусловлены тепловыми потерями в держателях катода вследствие лучистого теплообмена и теплопроводности газа соответственно, а четвертый — мощностью накала.

Рассмотрим численное решение уравнения (5), когда можно пренебречь влиянием лучистого теплообмена и теплопроводности газа. В этом случае имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_S}{C\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{P_{\text{н}}}{SC\rho l}. \tag{6}$$

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных в MathCad имеется опция

$$\text{Pdesolve}\left(u, x, \begin{pmatrix}0\\ L\end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix}0\\ T\end{pmatrix}, N_x, N_t\right),$$

где $u(x,t)$ — искомая функция; $(0, L)$ — отрезок по оси x, на котором ищется решение; $(0, T)$ — отрезок по оси t, на котором ищется решение; N_x, N_t — число точек разбиения отрезков $(0, L)$ и $(0, T)$ соответственно.

Обратим внимание на следующие особенности опции Pdesolve:

уравнение в частных производных записывается с помощью булевых знаков равенства;

все функции и производные должны определяться как функции двух переменных;

в качестве граничных условий в точках 0 и L можно использовать как условия Дирихле, так и условия Ньюмана;

для решения уравнения Пуассона или Лапласа данная опция непригодна (вместо нее следует использовать встроенные функции multigrid или relax);

в качестве метода решения используется метод прямых;

для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных следует использовать опцию numol.

Для построения трехмерного графика решения имеется опция $\mathrm{CreateMesh}\left(u,\ 0,\ L,\ 0,\ T,\ N_l,\ N_t\right)$ (рисунок).

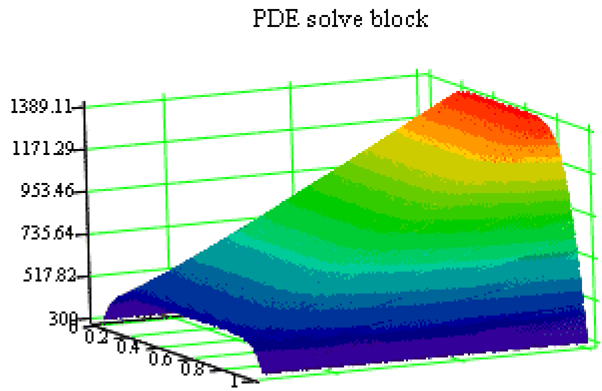

График процесса разогрева идеального катода, построенный средствами MathCad

Средства вычислительной техники позволяют рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения, а не уравнения в частных производных. Математическое различие между двумя классами уравнений заключается в том, что для существования единственности решения обыкновенных уравнений достаточно лишь начального условия, а условия на границах не рассматриваются. Это означает, что обыкновенные дифференциальные уравнения не учитывают тепловых потоков в теле катода, определяемых второй производной температуры катода по координате. Уравнение (4) является обыкновенным дифференциальным уравнением в частных производных в случае пренебрежения тепловыми потоками в теле катода (член $\frac{\lambda_S}{C\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$), что, строго говоря, возможно лишь в случае идеальных катодов прямого накала.

Математические требования необходимости граничных условий при решении уравнений в частных производных имеют четкий физический смысл: уравнение теплопроводности с членом вида $\frac{\lambda}{C\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ учитывает тепловые потери в теле катода, существование которых вызвано условиями на границах. Граничные условия оговаривают теплообмен катода с окружающим пространством.

Таким образом, пренебрежение тепловыми потоками — наиболее часто применяемый прием при исследовании процесса разогрева. В этом случае осуществляют переход от линейного уравнения теплопроводности к обыкновенным дифференциальным уравнениям или управлениям с разделяющимися переменными.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белова И.К., Дерюгина Е.О. Эмиссионные параметры термокатодов в разряде низкого давления. *Электромагнитные волны и электронные системы*, 2013, № 10, с. 59–63.

[2] Галкин В.А. *Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского*. Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011, 408 с.

[3] Голоскоков Д.П. *Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple*. Санкт-Петербург, Питер, 2004, 539 с.

[4] Тупчиев В.А. *Обобщенные решения законов сохранения*. Москва, Физматлит, 2006, 228 с.

Статья поступила в редакцию 05.06.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Белова И.К. Моделирование тепловых процессов идеального термокатода с использованием пакета прикладных программ MathCad. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 8. URL: http://engjournal.ru/catalog/machin/energy/1276.html

Белова Ирина Константиновна родилась в 1964 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1988. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная техника, информационные технологии и прикладная математика». Область научных интересов: физика конденсированного состояния, информационные технологии, прикладная информатика. e-mail: bik23@yandex.ru

Modelling of thermal processes of an ideal hot cathode employing the MathCad applications

© I.K. Belova

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia

The article examines the issues associated with the analysis of the hot cathode heating process using the law of conservation of energy. We conducted the simulation of the hot cathode heating process using a thin rod, heated by electric current. The heating process is described by the differential equation in partial derivatives of the second order, and its output is based on the regularities of the thermal conductivity of solid bodies, the theory of thermal conductivity and the well-known mathematical apparatus by means of computers.

Keywords: *hot cathode, heating process, thermal conductivity, software model, MathCad.*

Belova I.K. (b. 1964) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1988. Ph.D., Assoc. Professor of the Department of Computing Machinery, Information Technologies and Applied Mathematics at Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University. Scientific interests: physics of condensed state, IT, applied informatics e-mail: bik23@yandex.ru

REFERENCES

[1] Belova I.K., Deryuguina E.O. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy — Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2013, no. 10, pp. 59–63.

[2] Galkin V.A. Analiz matematicheskikh modelei: sistemy zakonov sokhraneniya, uravneniya Boltsmana i Smolukhovskogo [Analysis of mathematical models: systems of conservation laws, Boltzmann and Smoluchowski equations]. Moscow, BINOM, Knowledge Laboratory Publ., 2011, 408 p.

[3] Goloskokov D.P. *Uravneniya matematicheskoi fiziki. Reshenie zadach v sisteme Maple*. Saint Petersburg, Piter Publ., 2004, 539 p.

[4] Tupchiev V.A. Obobschennye resheniya zakonov sokhraneniya [Generalized solutions to conservation laws]. Moscow, Fizmathlit Publ., 2006, 228 p.