УДК 62.55

Алгоритм исследования нелинейных систем автоматического управления в стохастических режимах

© Чжо Ту Аунг, Д.В. Мельников

КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

Рассмотрен алгоритм исследования устройств, динамика которых описывается нелинейными дифференциальными стохастическими уравнениями. Метод исследования основан на замене стохастической задачи эквивалентным семейством детерминированных задач, полученным по разработанной методике, что позволяет с необходимой точностью вычислять вероятностные характеристики случайных процессов систем управления. Алгоритм исследования обладает высокой степенью универсальности, не накладывает ограничений на стационарность и законы распределения случайных сигналов и случайных параметров системы управления, позволяет вычислять не только моментные характеристики, но и вероятности. Точность расчета вероятностных характеристик определяется количеством выборок случайных величин, полученных детерминированным способом.

Ключевые слова: *стохастическая система, случайный процесс, ортонормированный базис, дисперсия, корреляционная функция, моделирование.*

Устройства, работающие в стохастических режимах, используют в системах радиосвязи и радиолокации, радиопротиводействия и радионавигации, в измерительной технике. Разработка выделенного класса радиоэлектронных устройств с учетом их возможного использования в стохастических режимах требует решения таких научно-исследовательских задач, как установление количественных характеристик влияния параметров указанных систем на качество выходного сигнала; получение взаимосвязи вероятностных характеристик входного и выходного сигналов; выявление параметров, целенаправленная вариация которых приводит к эффективному управлению выходной мощностью, коэффициентами усиления и шума, фазовыми и другими характеристиками прибора [1]. Круг перечисленных задач значительно расширяется, когда на вход электронного устройства подается как случайный, так и детерминированный сигнал на фоне случайной помехи [1]. Именно поэтому анализ стохастических процессов в электронных системах в настоящее время выглядит весьма актуальным.

Существуют точные и приближенные методы исследования стохастических систем. К точным относятся такие методы, которые в принципе позволяют отыскать характеристики сигналов, полностью определяющие их в статистическом смысле: n-мерные законы распределения или их моментные характеристики высших порядков. Это, например, метод, основанный на интегрировании уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова. Применение для исследования систем этих уравнений позволяет определять одномерные дифференциальные законы распределения фазовых координат либо аналитически, либо численным интегрированием дифференциальных уравнений в частных производных [2, 3]. Существуют и другие точные методы статистического исследования систем автоматического управления [4].

Практическое применение точных методов часто связано с большими трудностями. Это послужило причиной для разработки приближенных методов расчета и проектирования нелинейных систем при случайных воздействиях, направленных на решение инженерных задач, к особенностям которых относится достаточно высокий порядок исследуемых систем, а также наличие нескольких нелинейных элементов и нескольких случайных воздействий, поступающих на систему.

В инженерной практике для исследования стохастических систем большое распространение получили метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) и метод статистической линеаризации. Очевидными достоинствами метода Монте-Карло являются универсальность и простота, возможность применения к любым нелинейным системам, причем степень сложности метода мало зависит от сложности исследуемой системы автоматического управления. К его недостаткам следует отнести необходимость накопления больших массивов информации о выходных координатах системы, что связано с выполнением значительного объема вычислений, а также наличие статистической неопределенности получаемых результатов. Существенным недостатком является громоздкость модели, включающей генераторы случайных возмущений, и, следовательно, большая трудоемкость. Причем ошибки моделирования случайных возмущений не самоисправляются, а накапливаются при увеличении числа возмущений, а моделирование случайных возмущений с высокой точностью требует больших объемов дополнительных вычислений. Так же следует отметить, что на основе данного метода значительные трудности представляет решение задачи синтеза [2, 3].

К наиболее часто используемым на практике принадлежит метод статистической линеаризации, разработанный И. Е. Казаковым и Р. Бутоном. Однако он нашел широкое применение только для класса стационарных систем, подверженных случайным воздействиям; при исследовании процессов управления в нестационарных нелинейных системах статистическое исследование значительно усложняется.

Предлагаемый далее метод детерминированных эквивалентов исследования стохастических систем использует замену случайных воздействий эквивалентными неслучайными, и таким образом стохастическая задача заменяется эквивалентной детерминированной. Такая же идеология применена в методе эквивалентных возмущений (метод Доступова) и интерполяционном методе (метод Чернецкого) [4].

В наиболее общем виде можно предложить следующую математическую формулировку задачи исследования радиотехнических устройств в стохастических режимах.

1. Задана система дифференциальных уравнений относительно выходных координат системы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ в форме

$$\frac{dX_i}{dt} = g_i\left(t;\ X_1, X_2, \ldots, X_n;\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_m;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\right),\ X_i(0) = 0, \quad (1)$$

где t — время; g_i — некоторые функции; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — фазовые (выходные) координаты системы; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ — случайные функции времени, моделирующие случайные воздействия на систему; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — случайные функции времени, моделирующие случайные отклонения параметров системы управления.

2. Заданы вероятностные характеристики случайных функций (величин) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ в виде моментов или законов распределения вероятностей.

3. Заданы функции от выходных координат $\eta_k\left(t; X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)\right)$, $k = 1, 2, \ldots,$ определяющих форму вероятностных характеристик.

Требуется по заданной системе дифференциальных уравнений (1) и заданным вероятностным характеристикам случайных функций $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ определить математические ожидания функций η_k, т. е. $M\left[\eta_k\right]$, $k = 1, 2, \ldots$

Математические ожидания $M\left[\eta_k\right]$ в частных случаях могут выражать следующие вероятностные характеристики: математические ожидания выходных координат; дисперсии выходных координат; интегральные многомерные законы распределения выходных координат; математические ожидания, дисперсии и интегральные законы для некоторых функций от выходных координат; вероятность того, что некоторая функция от выходных координат будет в течение выбранного промежутка времени изменяться в заданной области; вероятность того, что несколько функций от выходных координат будут в заданные интервалы времени изменяться в заданных областях и т. д.

Задачу получения реализаций случайной функции по ее заданным вероятностным характеристикам с применением ЭВМ целесообразно решать, используя те или иные представлением случайных функций в форме детерминированных функций от случайных величин (представления Карунена, Пугачева, Котельникова, Чернецкого, представления с помощью интерполяционных полиномов и рядов Фурье) [3]. После таких представлений систему (1) можно записать следующим образом:

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i\left(t;\, X_1, X_2, \ldots, X_n;\, V_1, V_2, \ldots, V_l\right),\;\; X_i\left(0\right) = 0, \tag{2}$$

где t — время; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — фазовые координаты системы; $V_1, V_2, \ldots, V_l$ — некоррелированные случайные величины (индекс l учитывает и все случайные величины, появившиеся в ходе проведенных преобразований) с известными дифференциальными законами распределения $f^{V_1}, f^{V_2}, \ldots, f^{V_l}$.

Таким образом, от общей задачи анализа приходим к более простой задаче: определить математическое ожидание $M\left[\eta_k\right]$ $k = 1, 2, \ldots,$ если задана система дифференциальных уравнений (2) и плотности распределения независимых случайных величин $V_1, V_2, \ldots, V_l$.

Пусть правые части системы (2) непрерывны относительно параметров $V_1, V_2, \ldots, V_l$ и допускают разрывы первого рода относительно аргумента t. Тогда интегралы уравнений (4) можно записать в форме [4]

$$X_i\left(t\right) = X_i\left(V_1, V_2, \ldots, V_l;\, t\right),\;\; i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

В данной работе в качестве аппарата приближения функций (3) предлагается использовать спектральный способ с разложением решения в ряд по системам ортонормированных многочленов по каждому аргументу.

Положим, что

$$X_i\left(t;\, V_1, V_2, \ldots, V_l\right) \in L^2\left(\left[a_1, b_1\right] \times \left[a_2, b_2\right] \times \ldots \times \left[a_l, b_l\right]\right),\;\; i = \overline{1, n},$$

т. е. решение $X_i = X_i\left(t;\, V_1, V_2, \ldots, V_l\right)$ интегрируемо с квадратом по переменным $V_1, V_2, \ldots, V_l$, а $\left[a_z, b_z\right]$ — область значений аргумента V_z, т. е. $V_z \in \left[a_z, b_z\right]$, $z = \overline{1, l}$. Такая функция может быть разложена по ортонормированному базису. Полученный ряд будет сходиться в среднеквадратичном. Для каждого аргумента V_z на сегменте $\left[a_z, b_z\right]$ определим систему ортонормированных полиномов $\mathbf{P}^{V_z} = \left\{P_0^{V_z}, P_1^{V_z}, P_2^{V_z}, \ldots\right\}$ с весом ρ^{V_z}, $z = \overline{1, l}$. Так, для аргумента V_1 $P_v^{V_1}\left(V_1\right) = \sum_{j=0}^{v} c_{vj}^{V_1} V_1^{\,j}$ с весом ρ^{V_1}, для аргумента V_l $P_v^{V_l}\left(V_l\right) = \sum_{j=0}^{v} c_{vj}^{V_l} V_l^{\,j}$ с весом ρ^{V_l}.

Разложим функцию $X_i\left(V_1, V_2, \ldots, V_l; t\right)$ по ортонормированным многочленам:

$$X_i\left(V_1, V_2, \ldots, V_l; t\right) \approx$$

$$\approx \sum_{\nu_1=0}^{N_1} \sum_{\nu_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{\nu_l=0}^{N_l} c_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}^{X_i}(t) P_{\nu_1}^{V_1}(V_1) P_{\nu_2}^{V_2}(V_2) \cdots P_{\nu_l}^{V_l}(V_l), \tag{4}$$

где $N_z + 1$ — число полиномов разложения по переменной V_z, $z = \overline{1,\ l}$;

$$c_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}^{X_i}(t) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_l}^{b_l} \rho^{V_1}(V_1)\rho^{V_2}(V_2)\cdots\rho^{V_l}(V_l) X_i\left(V_1, V_2, \ldots, V_l; t\right) \times$$

$$\times P_{\nu_1}^{V_1}(V_1) P_{\nu_2}^{V_2}(V_2) \cdots P_{\nu_l}^{V_l}(V_l) dV_1 dV_2 \cdots dV_l \tag{5}$$

— коэффициенты Фурье;

Коэффициенты Фурье определяются через неизвестные стохастические решения $X_i\left(V_1, V_2, \ldots, V_l; t\right)$. Чтобы их найти, нужно вычислить l-кратные интегралы численным методом, воспользовавшись формулой прямого произведения соответствующих одномерных формул численного интегрирования (при этом остаточные члены аппроксимации одномерных интегралов в значительной мере компенсируются и вычислительная погрешность не возрастает):

$$c_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}^{X_i}(t) \approx$$

$$\approx \sum_{k_1=1}^{q_1} \cdots \sum_{k_l=1}^{q_l} A_{k_1}^{V_1} \cdots A_{k_l}^{V_l} X_i\left(t; V_{1k_1}, V_{2k_2}, \ldots, V_{lk_l}\right) P_{\nu_1}^{V_1}\left(V_{1k_1}\right) \cdots P_{\nu_l}^{V_l}\left(V_{lk_l}\right). \tag{6}$$

Здесь q_z — выборок случайной величины V_z, $z = \overline{1,\ l}$; $A_{k_1}^{V_1}, \ldots, A_{k_l}^{V_l}$ — некоторые коэффициенты, определяющие методы интегрирования соответствующих одномерных интегралов; $X_i\left(V_{1k_1}, \ldots, V_{lk_l}\right)$ — реализации случайных функций, полученные в результате численного решения (2) на ЭВМ для всевозможных комбинаций выборок случайных величин; $V_{1k_1}, \ldots, V_{lk_l}$ — выборки случайных величин $V_1, \ldots, V_l$ соответственно.

Общее число интегрирований системы (2) меняется по мультипликативному закону ($N = q_1 q_2 \cdots q_l$) в зависимости от числа выборок каждой случайной величины. Поэтому необходимо выбирать такие методы интегрирования соответствующих одномерных интегралов, которые определяют коэффициенты $A_{k_1}^{V_1}, \ldots, A_{k_l}^{V_l}$, чтобы при возможно меньшем числе выборок случайных величин точнее рассчитать коэффициенты Фурье [5].

Аналогично можно найти спектральное разложение любой функции:

$$\eta\left(t;V_1,V_2,\ldots,V_l\right) \approx$$

$$\approx \sum_{\nu_1=0}^{N_1} \sum_{\nu_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{\nu_l=0}^{N_l} c_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}^{\eta}\left(t\right) P_{\nu_1}^{V_1}\left(V_1\right) P_{\nu_2}^{V_2}\left(V_2\right) \cdots P_{\nu_l}^{V_l}\left(V_l\right), \qquad (7)$$

где

$$c_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}^{\eta}\left(t\right) \approx$$

$$\approx \sum_{k_1=1}^{q_1} \cdots \sum_{k_l=1}^{q_l} A_{k_1}^{V_1} \cdots A_{k_l}^{V_l} \eta\left(t;V_{1k_1},\ldots,V_{lk_l}\right) P_{\nu_1}^{V_1}\left(V_{1k_1}\right) \cdots P_{\nu_l}^{V_l}\left(V_{lk_l}\right), \qquad (8)$$

при этом ее реализации находятся через реализации выходных координат при конкретных значениях случайных величин. Так, реализации функций η для математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции фазовой координаты, корреляционного момента между фазовыми координатами $X_i\left(t\right)$ и $X_j\left(t\right)$ и интегрального закона распределения сигнала $X_i\left(t\right)$ при конкретных значениях случайных величин рассчитывают по следующим формулам:

$$\eta^{m_{X_i}}\left(t;\, V_{1k_1}, V_{2k_2}, \ldots, V_{lk_l}\right) = X_i\left(t;\, V_{1k_1}, V_{2k_2}, \ldots, V_{lk_l}\right);$$

$$\eta^{D_{X_i}}\left(t;V_{1k_1},V_{2k_2},\ldots,V_{lk_l}\right) = \left[X_i\left(t,V_{1k_1},V_{2k_2},\ldots,V_{lk_l}\right) - m_{X_i}\left(t\right)\right]^2;$$

$$\eta^{R_{X_iX_i}}\left(t_1,t_2;V_{1k_1},V_{2k_2},\ldots,V_{lk_l}\right) = \left[X_i\left(t_1;V_{1k_1},V_{2k_2},\ldots,V_{lk_l}\right) - m_{X_i}\left(t_1\right)\right]\times$$
$$\times\left[X_i\left(t_2;V_{1k_1},V_{2k_2},\ldots,V_{lk_l}\right) - m_{X_i}\left(t_2\right)\right];$$

$$\eta^{R_{X_iX_j}}\left(t;\, V_{1k_1}, V_{2k_2}, \ldots, V_{lk_l}\right) = \left[X_i\left(t;\, V_{1k_1}, V_{2k_2}, \ldots, V_{lk_l}\right) - m_{X_i}\left(t\right)\right]\times$$
$$\times\left[X_j\left(t;\, V_{1k_1}, V_{2k_2}, \ldots, V_{lk_l}\right) - m_{X_j}\left(t\right)\right];$$

$$\eta^{F_{X_i}}\left(t;\, V_{1k_1}, V_{2k_2}, \ldots, V_{lk_l}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{X_i\left(t;\, V_{1k_1}, V_{2k_2}, \ldots, V_{lk_l}\right) - x_i}{\left|X_i\left(t;\, V_{1k_1}, V_{2k_2}, \ldots, V_{lk_l}\right) - x_i\right|}\right].$$

Приближенное представление функций η в виде спектрального представления (7) позволяет вычислить соответствующую вероятностную характеристику путем ее интегрального осреднения с весом, равным плотности распределения случайных величин:

$$m_\eta(t) = M\left[\eta(t; V_1, V_2, \dots, V_l)\right] = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_l}^{b_l} \eta(t; V_1, V_2, \dots, V_l) \prod_{z=1}^{l} f^{V_z}(V_z)\, dV_z,$$

что можно сделать сколь угодно точно, так как подынтегральное выражение является аналитической функцией. Такова идеология метода.

Можно показать, что в зависимости от выбора систем ортонормированных многочленов и численных методов расчета коэффициентов Фурье возникают многочисленные разновидности метода, т. е. конкретные расчетные формулы, условия сходимости, выражения погрешности получаемых результатов.

Наиболее точным и простым для реализации на ЭВМ является алгоритм, в котором для каждой случайной величины V_z определяется система многочленов, ортонормированных с весом, равным плотности ее распределения f^{V_z}, а коэффициенты Фурье находятся с помощью квадратур Гаусса [5]. Расчетная формула статистических характеристик в этом случае определяется выражением

$$m_\eta(t) \approx \sum_{k_1=1}^{q_1} \cdots \sum_{k_l=1}^{q_l} A_{k_1}^{V_1} \cdots A_{k_l}^{V_l} \eta\left(t; V_{1k_1}, V_{2k_2}, \dots, V_{lk_l}\right) \tag{9}$$

и позволяет в принципе рассчитать приближенно значения любых вероятностных характеристик, необходимых для статистического анализа систем управления, т. е. является универсальной. Выборками случайных величин в этом случае являются корни соответствующих полиномов, определяемые детерминированным способом, а гауссовы коэффициенты находят по формуле [5]

$$A_{k_z}^{V_z} = \frac{a_{q_z}}{a_{q_z-1}} \frac{1}{P_{q_z}'^{V_z}\left(V_{zk_z}\right) P_{q_z-1}^{V_z}\left(V_{zk_z}\right)}, \quad z = \overline{1, l}; \ \ k_z = \overline{1, q_z}. \tag{10}$$

В качестве примера рассмотрим простейшую систему автоматического регулирования, на входе которой действует случайный процесс $Y(t)$. Дифференциальное уравнение такой системы имеет вид

$$\frac{dX}{dt} + bX = Y(t), \quad X\left(0\right) = 0.$$

Пусть случайная функция $Y(t)$ является стационарной, имеет математическое ожидание, равное нулю, а ее корреляционная функция выражается формулой

$$K_Y(\tau) = \sigma_X^2 e^{-h|\tau|};\ b = 1;\ h = 1;\ \sigma_X^2 = 4.$$

Требуется определить математическое ожидание и дисперсию выходной координаты X в момент времени $t = 1$.

Этот простой пример выбран неслучайно — он допускает точное аналитическое решение. Из заданного дифференциального уравнения и начальных условий следует, что

$$X(t) = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}Y(\tau)d\tau; \quad M\left[X(t)\right] = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}M\left[Y(\tau)\right]d\tau.$$

По условию задачи $M\left[Y(\tau)\right] = 0,$ поэтому $M\left[X(t)\right] = 0$. Вычислим дисперсию

$$D\left[X(t)\right] = M\left[\left(X(t) - M\left[X(t)\right]\right)^2\right] =$$

$$= \int_0^t\int_0^t e^{-(t-\tau_1)}e^{-(t-\tau_2)}K_Y(\tau_1 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_0^t\int_0^t e^{-(t-\tau_1)}e^{-(t-\tau_2)}4e^{-|\tau_1-\tau_2|}d\tau_1 d\tau_2.$$

Разбив область интегрирования при $t = 1$ на две области: $D_1,$ где $\tau_1 > \tau_2,$ и $D_2,$ где $\tau_2 > \tau_1,$ из последней формулы получим

$$D\left[X(t)\right] = 4e^{-2}\int_0^t\int_0^t e^{\tau_1+\tau_2}e^{-|\tau_1-\tau_2|}d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= 4e^{-2}\left[\int_0^1 d\tau_1\int_0^{\tau_1} e^{2\tau_2}d\tau_2 + \int_0^1 d\tau_2\int_0^{\tau_2} e^{2\tau_1}d\tau_1\right] = 2 - 6e^{-2}.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере точные значения математического ожидания и дисперсии при $t = 1$ соответственно равны

$$m_X(t)\big|_{t=1} = 0,\ D_X(t)\big|_{t=1} = 2 - 6e^{-2} = 1{,}1879882.$$

Решим поставленную задачу методом детерминированных эквивалентов. Для этого представим случайную функцию в виде неканонического разложения [4]

$$Y(t) = \sigma_X\left(\sin V_2' t + V_1\cos V_2' t\right),$$

где V_1, V_2' — независимые случайные величины,

$$M\left[V_1\right]=0;\ \sigma_{V_1}=2;\ f\left(V_2'\right)=\frac{1}{\pi\left(V_2'^2+1\right)}.$$

Согласно неканоническому разложению случайных функций, закон распределения случайной величины V_1 выберем нормальным. Для случайной величины V_2' с плотностью распределения вероятностей $f\left(V_2'\right)$ используем известное ψ-преобразование к равномерному закону [4]:

$$V_2'=\psi\left(V_2\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}V_2.$$

В результате неканонического представления случайной функции $Y(t)$ исходное дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{dX}{dt}+bX=2\left\{\sin\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}V_2\right)t\right]+V_1\cos\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}V_2\right)t\right]\right\},$$

где V_1 имеет стандартную форму нормального закона распределения, а V_2 — равномерного закона распределения.

Ортонормированная система многочленов с весовой функцией, равной плотности случайной величины V_1 $\left(f\left(V_1\right)=1\big/\sqrt{2\pi}\cdot e^{-V_1^2/2}\right)$, представляет собой полиномы Эрмита:

$$P_0^{V_1}\left(V_1\right)=1;\ P_1^{V_1}\left(V_1\right)=V_1;\ P_2^{V_1}\left(V_1\right)=0,707V_1^2-0,707;$$
$$P_3^{V_1}\left(V_1\right)=0,408V_1^3-1,225V_1;\quad P_4^{V_1}\left(V_1\right)=0,204V_1^4-1,225V_1^2+0,612.$$

Ортонормированная система многочленов с весовой функцией, равной плотности случайной величины V_2 $\left(f\left(V_2\right)=1/2\right)$, представляет собой полиномы Лежандра $\left[-1,1\right]$:

$$P_0^{V_2}\left(V_2\right)=1;\ P_1^{V_2}\left(V_2\right)=1,7321V_2;\ P_2^{V_2}\left(V_2\right)=3,3541V_2^2-1,118;$$
$$P_3^{V_2}\left(V_1\right)=6,6144V_2^3-3,9686V_2;\ P_4^{V_2}\left(V_1\right)=13,125V_2^4-11,25V_2^2+1,125.$$

Следует отметить, что для каждой весовой функции, являющейся плотностью распределения вероятности случайной величины, существует единственная ортогональная (ортонормированная) система многочленов [5].

Возьмем для V_1 две выборки $\left(q_1=2\right)$, а для случайной величины V_2 — пять $\left(q_2=5\right)$, т. е. $N=q_1q_2=10$. Тогда выборки случайных величин (корни соответствующих многочленов) и коэффициенты интегрирования (10) принимают следующие значения:

$$V_{11} = -1,\ V_{12} = -1,\ \ A_1^{V1} = 0,5,\ A_2^{V1} = 0,5;$$

$$V_{21} = -0{,}90618,\ V_{22} = -0{,}53847,\ V_{23} = 0,\ V_{24} = 0{,}53847,\ V_{25} = 0{,}90618;$$

$$A_1^{V2} = 0{,}11846,\ A_2^{V2} = 0{,}23931,\ A_3^{V2} = 0{,}284444,$$
$$A_4^{V2} = 0{,}23931,\ A_5^{V2} = 0{,}11846.$$

Воспользовавшись формулой (9), легко найти математическое ожидание и дисперсию в момент времени $t = 1$ (реализации функции $X\left(t; V_{1k_1}, V_{2k_2}\right)$ можно найти аналитически, а в общем случае численным методом):

$$m_X\left(t\right)\Big|_{t=1} \approx -1{,}137328 \cdot 10^{-16};\ D_X\left(t\right)\Big|_{t=1} \approx 1{,}1551456.$$

При $q_1 = 3$, $q_2 = 8$ $(N = 24)$

$$m_X\left(t\right)\Big|_{t=1} \approx\ 1{,}8735013 \cdot 10^{-16},\ D_X\left(t\right)\Big|_{t=1} \approx 1{,}19864787.$$

При $q_1 = 4$, $q_2 = 9$ $(N = 36)$

$$m_X\left(t\right)\Big|_{t=1} \approx -1{,}367 \cdot 10^{-15},\ D_X\left(t\right)\Big|_{t=1} \approx 1{,}18476801695.$$

Сравнив полученные приближенные значения с найденными выше точными, можно установить сходимость метода детерминированных эквивалентов к точному значению с увеличением числа выборок случайных величин. Результаты анализа методами детерминированных эквивалентов и статистических испытаний сведены в таблицу.

Результаты анализа методами детерминированных эквивалентов и статистических испытаний

Параметр	Точное решение	Метод детерминированных эквивалентов / Метод статистических испытаний		
		$N = 10$ / $N = 5000$	$N = 24$ / $N = 10000$	$N = 36$ / $N = 15000$
$m_X\left(t\right)\big\|_{t=1}$	0	$-1{,}137 \cdot 10^{16}$ / $0{,}001106$	$1{,}873 \cdot 10^{-16}$ / $-0{,}00867$	$-1{,}367 \cdot 10^{-15}$ / $0{,}00955$
$D_X\left(t\right)\big\|_{t=1}$	1,187988	$1{,}155146$ / $1{,}284333$	$1{,}198647$ / $1{,}292682$	$1{,}184768$ / $1{,}268207$

Необходимо отметить, что реализации случайных функций $X_i\left(V_{1k_1}, ..., V_{lk_l}\right)$ можно вычислить проекционно-матричным методом [6]. Это оказывается эффективным, если модель радиотехнического устройства задана структурной схемой.

По сравнению с применяемыми в настоящие время методами исследования радиотехнических устройств в стохастических режимах метод детерминированных эквивалентов обладает следующими преимуществами:

1) высокая степень универсальности, обусловленная тем, что исходная математическая модель систем управления описывает почти все основные классы систем: непрерывного действия; дискретного действия; системы со случайным запаздыванием; линейные стационарные и нестационарные системы; линейные и нелинейные системы со случайно изменяющейся структурой, учитывающие случайное изменение параметров и входных воздействий; оптимальные и самонастраивающиеся системы;

2) отсутствие принципиальных ограничений на размерность системы, на число нелинейностей, случайных воздействий и параметров;

3) отсутствие ограничений на стационарность и законы распределения случайных сигналов и случайных параметров системы управления;

4) возможность расчета не только моментных характеристик, но и вероятностей;

5) возможность достижения произвольной точности получаемых результатов путем увеличения числа выборок случайных величин;

6) совместно с методами математического программирования можно рассматривать задачу синтеза стохастических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Калужской области (гранты № 14-41-03071, № 14-48-03013).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Арсеньев Г.Н., Зайцев Г.Ф. *Радиоавтоматика. Ч.2. Теория дискретных и оптимальных систем автоматического управления РЭС.* Москва, САЙНС-ПРЕСС, 2008, 480 с.

[2] Papoulis A. *Probability, random variables and stochastic prosses*. New York, McGraw-Hill, 1991, 666 p.

[3] Пупков К.А., Егупов Н.Д., Макаренков А.М., Трофимов А.И. *Теория и компьютерные методы исследования стохастических систем*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2003, 400 с.

[4] Пупков К.А., Егупов Н.Д., Трофимов А.И. *Методы теории автоматического управления.* Егупов Н.Д., ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998, 562 с.

[5] Крылов В.И. *Приближенное вычисление интегралов*. Москва, Наука, 1967, 500 с.

[6] Мельников Д.В., Корнюшин Ю.П. Проекционно-матричный метод анализа нелинейных систем автоматического управления. *Наука и образование*. 2006, с. 232–235.

Статья поступила в редакцию 05.05.2014.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Чжо Ту Аунг, Мельников Д.В. Алгоритм исследования нелинейных систем автоматического управления в стохастических режимах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 4. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/asu/1270.html

Чжо Ту Аунг аспирант кафедры «Системы автоматического управления» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: энергетические системы управления. e-mail: kyawthuaung310@gmail.com

Мельников Дмитрий Владимирович родился в 1975 г., окончил КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1998 г. Канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой «Электротехника» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: энергетические системы управления. e-mail: melnikov-dv@yandex.ru

Research algorithm of nonlinear systems of automatic control in stochastic conditions

© Chzho Tu Aung, D.V. Melnikov

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia

The main purpose of the article is to present the algorithm of studying the devices whose dynamics is described by stochastic nonlinear differential equations. The research method is based on replacing the stochastic task with the equivalent family of deterministic problems, obtained by the methods developed that allow us to accurately calculate probabilistic characteristics of random processes in control systems. The research algorithm is highly universal due to the fact that the original mathematical model of control systems describes almost all major classes of systems. The algorithm imposes no restrictions on the stationarity and the laws of distribution of random signals and random control system parameters; allows us to calculate not only the torque characteristics, but also the probabilities. The accuracy of calculating probability characteristics is determined by the number of samples of random variables, defined in a deterministic way.

Keywords: *stochastic system, random process, orthonormal basis, variance, correlation function, modeling.*

REFERENCES

[1] Arsenyev G.N., Zaitsev G.F. *Radioavtomatika. Chast 2. Teoriya diskretnykh i optimal'nykh sistem avtomaticheskogo upravleniya RES* [Radioautomatics. Part 2. The theory of discrete optimal and automatic control systems RES]. Moscow, Science Press Publ., 2008, 480 p.

[2] Papoulis A. *Probability, random variables and stochastic processes*. 3rd ed., New York, McGraw-Hill Publ., 1991, 666 p.

[3] Pupkov K.A., Egupov N.D., Makarenkov A.M., Trofimov A.I. *Teoriya i kompyuternye metody issledovaniya stokhasticheskikh sistem* [Theory and computer methods of stochastic systems investigation]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 400 p.

[4] Pupkov K.A, Egupov N.D., Trofimov A.I. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya*. [Methods of control theory]. N.D. Egupov, ed. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1998, 562 p.

[5] Krylov V.I. *Priblizhennoe vychislenie integralov* [Approximate calculation of integrals]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 500 p.

[6] Melnikov D.V., Kornyushin Yu.P. *Nauka i obrazovanie — Science and education*, 2006, pp. 232–235.

Kyaw Thu Aung is a postgraduate of the Automatic Control Systems Department at Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University. Author of 4 scientific works in the field of energy, electrical engineering, modeling and control of engineering systems. Research interests include energy control systems.
e-mail: kyawthuaung310@gmail.com

Melnikov D.V. (b. 1975) graduated from Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University in 1998. Ph.D., Assoc. Professor, he is the Head of the Electrical Department at. Author of over 125 scientific papers in the field of energy, electrical engineering, modeling and control of engineering systems. His research interests include energy management system. e-mail: melnikov-dv@yandex.ru