УДК 519.23+519.63

Анализ и идентификация одного класса систем с распределенными случайными параметрами

© З.Г. Широкова, Аунг Чжо Со, А.М. Макаренков

КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

Управление распределенными системами является сложной проблемой, решение которой требует построения адекватных математических моделей, включая модели, учитывающие воздействие случайных факторов. В статье описаны алгоритмы статистического анализа систем с распределенными параметрами в постановке задачи Гурса и параметрической идентификации в смысле определения статистических характеристик случайных параметров этих систем. Оба метода основаны на использовании так называемых проекционных моделей, которые являются результатом проекционной аппроксимации исходных непрерывных моделей, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных со случайными коэффициентами. Указанная аппроксимация выполняется с использованием матричных операторов. Ключевым моментом является процедура аналитического усреднения стохастического оператора системы, основанная на приближенном представлении данного оператора в виде матричного ряда. В результате получается усредненная проекционная модель системы с распределенными случайными параметрами. Задача идентификации неизвестных статистических характеристик случайных параметров математической модели сводится к задаче минимизации квадратичного функционала, вычисляемого с использованием усредненной проекционной модели. Рассмотрен пример решения задачи идентификации математического ожидания и дисперсии одного случайного параметра модели стохастической системы. Использование усредненных проекционных моделей позволяет строить эффективные вычислительные алгоритмы решения задач статистического анализа и параметрической идентификации. Данные алгоритмы допускают параллельную реализацию.

Ключевые слова: *распределенные параметры, статистический анализ, случайные параметры, стохастическая система, идентификация, математическая модель, проекционная аппроксимация, матричный оператор.*

Введение. Управление распределенными системами является актуальной проблемой современной теории автоматического управления и может быть рассмотрено как новый более сложный этап ее развития. Математические модели распределенных систем в отличие от моделей систем с сосредоточенными параметрами, рассматриваемыми в классической теории управления, описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Усложнение класса систем ведет к усложнению методов их исследования и проектирования, а также к необходимости широкого использования численных методов вследствие невозможности получения аналитических решений в большинстве случаев. Этим отчасти объясняется тот факт, что теория автоматического управления для систем с распределенными параметрами разработана к настоящему моменту не столь детально, как классическая теория автоматического управления.

В данной работе рассмотрены новые методы моделирования, анализа и параметрической идентификации объектов управления в классе линейных нестационарных систем с детерминированными и случайными распределенными параметрами, основанные на использовании ортогональных разложений и техники матричных операторов.

Исходная модель. Математическая модель системы с распределенными параметрами описывается уравнением вида

$$A\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}+2B\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t\partial x}+C\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+a(t,x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial t}+$$

$$+\,b(t,x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial x}+c(t,x)z(t,x)=y(t,x) \tag{1}$$

на прямоугольной области $S=\left[t_0,t_f\right]\times\left[x_0,x_f\right]$. Этот класс уравнений описывает многие физические процессы, протекающие в распределенных объектах управления. Для определенности будем полагать, что рассматривается так называемая задача Гурса, которая формулируется следующим образом. Требуется найти решение уравнения вида (1), в котором $A=C=0$ и $2B=1$. При этом заданы следующие дополнительные условия:

$$\begin{gathered} z(t_0,x)=\alpha(x),\ x\in\left[x_0,x_f\right];\ z(t,x_0)=\varphi(x),\ t\in\left[t_0,t_f\right]; \\ \alpha(x_0)=\varphi(t_0)=k. \end{gathered} \tag{2}$$

Задача Гурса возникает, например, при изучении процессов сорбции и десорбции газов, сушки и многих других физических процессов [1]. Коэффициенты $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$, входное воздействие $y(t,x)$ и выходной сигнал $z(t,x)$ считаем нестационарными случайными процессами. Дополнительные условия также будем полагать случайными. При этом коэффициенты, дополнительные условия и входное воздействие являются статистически независимыми и имеющими нормальный закон распределения.

Схемы проекционной аппроксимации. Одним из современных подходов к построению математических моделей и решению задач теории управления является использование методов обобщенной спектральной теории и теории матричных операторов [2]. Эти методы, известные как проекционные или спектральные, основаны на конечномерной аппроксимации математической модели системы с использованием ортогональных разложений. Проекционная аппроксимация исходной модели (1) позволяет перейти от дифференциального уравнения в частных производных к равносильному матрично-операторному уравнению. Важным моментом является то, что в результате удается найти выражение для решения данного матрично-операторного уравнения, определяющее явную линейную зависимость между проекционными характеристиками выходного и входного сигналов системы. Это позволяет распространить многие проекционные методы решения задач теории управления, разработанные для систем с сосредоточенными параметрами, на системы с распределенными параметрами.

Возможны различные схемы проекционной аппроксимации уравнения (1) в зависимости от типа этого уравнения и вида краевых условий. В некоторых случаях удается использовать схему, основанную на применении матричных операторов интегрирования и умножения [2]. Универсальной является схема, основанная на применении матричных операторов дифференцирования и умножения [2]. Ниже рассмотрена схема проекционной аппроксимации, которая, в отличие от первой из упомянутых, не требует предварительного интегрирования уравнения (1) и характеризуется такой же алгоритмической прозрачностью перехода к матрично-операторному уравнению, как и вторая, особенно при нулевых краевых условиях, но в отличие от последней является вычислительно устойчивой и не требует применения метода наименьших квадратов.

Раскладывая функции в уравнении (1) по двумерному ортогональному базису:

$$\mathbf{\Phi}_p(t)\mathbf{\Phi}_p^{\mathrm{T}}(x)=\left[\phi_1(t)\ldots\phi_p(t)\right]^{\mathrm{T}}\left[\phi_1(x)\ldots\phi_p(x)\right],$$

и заменяя каждый оператор в пространстве функций на соответствующий матричный оператор, сведем уравнение (1) к равносильному матрично-операторному уравнению

$$\mathbf{D}^t\mathbf{D}^x\mathbf{C}^z+\mathbf{U}^a\mathbf{D}^t\mathbf{C}^z+\mathbf{U}^b\mathbf{D}^x\mathbf{C}^z+\mathbf{U}^c\mathbf{C}^z=\mathbf{C}^y, \tag{3}$$

где $\mathbf{D}^t$, $\mathbf{D}^x$ — матричные операторы дифференцирования по переменным t и x; $\mathbf{C}^z$, $\mathbf{C}^y$ — проекционные характеристики выходного сигнала и входного воздействия; $\mathbf{U}$ — матричный оператор умножения на функцию, указанную в индексе. Матрицы $\mathbf{C}^z$ и $\mathbf{C}^y$ представляют собой вектор-столбцы из последовательности строк квадратных матриц коэффициентов разложения соответствующих функций по двумерному ортогональному базису. Размер этих вектор-столбцов обозначим как pp, где p — число базисных функций. Двойной размер pp означает, что квадратные матрицы размером $p\times p$ растянуты в столбцы длиной pp, образованные из последовательности строк указанных квадратных матриц:

$$\mathbf{C}_{p\times p} \to \mathbf{C}_{pp} = \left(c_{11},\, c_{12},\, \ldots,\, c_{1p},\, \ldots,\, c_{p1},\, c_{p2},\, \ldots,\, c_{pp}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Матричные операторы $\mathbf{D}^t$ и $\mathbf{D}^x$ действуют на столбцах размером pp и имеют размер $pp \times pp$. Необходимость растягивания матриц в столбцы обусловлена спецификой построения матричного оператора умножения $\mathbf{U}$, который также имеет размер $pp \times pp$.

Умножая левую и правую части уравнения (3) на матричные операторы интегрирования $\mathbf{P}^x$ и $\mathbf{P}^t$ по переменным x и t, имеем

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{P}^x\mathbf{P}^t\mathbf{U}^a\mathbf{D}^t + \mathbf{P}^x\mathbf{P}^t\mathbf{U}^b\mathbf{D}^x + \mathbf{P}^x\mathbf{P}^t\mathbf{U}^c\right)\mathbf{C}^z = \mathbf{P}^x\mathbf{P}^t\mathbf{C}^y + \mathbf{C}^0. \qquad (4)$$

Такое умножение равносильно интегрированию в пространстве функций, поэтому матрично-операторное уравнение (4) равносильно интегральному уравнению второго рода, а добавленный справа вектор-столбец $\mathbf{C}^0$, определяемый как

$$\mathbf{C}^0 = \left(\mathbf{I} + \mathbf{P}^x\mathbf{U}^{a(t_0,x)}\right)\mathbf{C}^{z(t_0,x)} + \left(\mathbf{I} + \mathbf{P}^t\mathbf{U}^{b(t,x_0)}\right)\mathbf{C}^{z(t,x_0)} + \mathbf{C}^k, \qquad (5)$$

учитывает дополнительные условия (2).

Обозначив в уравнении (4) сумму матриц в скобках, за исключением единичной матрицы $\mathbf{I}$, как $\mathbf{A}^z$, перепишем его в виде

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}^z\right)\mathbf{C}^z = \mathbf{P}^x\mathbf{P}^t\mathbf{C}^y + \mathbf{C}^0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой результат проекционной аппроксимации исходной модели (1). Существует теорема [2] о единственности решения уравнения (6) при достаточно больших p, из которой также следует обратимость матрицы $\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}^z\right)$. Это позволяет записать решение данного уравнения следующим образом:

$$\mathbf{C}^z = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}^z\right)^{-1}\mathbf{P}^x\mathbf{P}^t\mathbf{C}^y + \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}^z\right)^{-1}\mathbf{C}^0 = \mathbf{A}\mathbf{C}^y + \mathbf{A}^0\mathbf{C}^0, \qquad (7)$$

где $\mathbf{A}^z$ — матрица, представляющая собой проекционную характеристику системы с распределенными параметрами; $\mathbf{A}^0$ — матрица, выражающая проекционную характеристику преобразования ее начального состояния.

Учет фактора случайности параметров. Выражение (7) определяет явную линейную зависимость между столбцами (растянутыми в столбцы квадратными матрицами) коэффициентов разложения входного воздействия и выходного сигнала системы по двумерному ортогональному базису. Если для детерминированных систем это выражение сразу позволяет определить выходной сигнал системы как функцию $z(t,x)$, восстанавливаемую по проекционной характеристике $\mathbf{C}^z$, то для систем со случайными параметрами определенную проблему составляет обращение случайной матрицы $\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}^z\right)$.

Для решения указанной проблемы предлагается воспользоваться приемом разложения обратного оператора $\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}^z\right)^{-1}$ в матричный ряд, который может быть легко усреднен, что удобно для решения задач статистического анализа [2]. Следует отметить, что при этом не возникает необходимости явно учитывать статистическую связь между выходным сигналом системы и ее случайными параметрами, поскольку проекционные характеристики статистических мер выходного сигнала могут быть найдены в конечном итоге только через проекционные характеристики статистических мер входного воздействия, случайных коэффициентов и дополнительных условий. При необходимости можно учесть статистическую связь между входным воздействием, случайными коэффициентами и дополнительными условиями.

Если коэффициенты уравнения (1) являются случайными функциями, можно для упрощения процедуры усреднения представить их в виде канонических разложений по двумерным базисам неслучайных координатных функций. В результате матрицы $\mathbf{U}$ в уравнении (4), соответствующие этим случайным коэффициентам, будут заменены суммами произведений гауссовых случайных величин коэффициентов канонических разложений и детерминированных матриц $\mathbf{U}$ операторов умножения на координатные функции, а усреднение сведется к выражению моментов упомянутых случайных величин через их единичные дисперсии. Если коэффициенты уравнения (1) являются случайными величинами, то их моменты при усреднении будут выражаться через заданные дисперсии.

Представляя матрицу $\mathbf{A}^z$ в виде суммы детерминированной матрицы $\bar{\mathbf{A}}^z$ и случайной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}^z$, что соответствует представлению случайных коэффициентов исходного уравнения в виде суммы детерминированной и случайной составляющих, запишем выражение

$$\left(\mathbf{I}+\bar{\mathbf{A}}^z+\tilde{\mathbf{A}}^z\right)^{-1}=\mathbf{A}_0\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\tilde{\mathbf{A}}^z\mathbf{A}_0\right)^i, \qquad (8)$$

где $\mathbf{A}_0=\left(\mathbf{I}+\bar{\mathbf{A}}^z\right)^{-1}$ — детерминированная обратная матрица. (Вопрос сходимости ряда (8) рассмотрен в работе [2].)

Далее рассмотрим задачу анализа, которая состоит в определении математического ожидания $m_z(t,x)$ и корреляционной функции $R_{zz}(t_1,x_1;\,t_2,x_2)$ выходного сигнала системы по заданным статистическим характеристикам $m_y(t,x)$ и $R_{yy}(t_1,x_1;\,t_2,x_2)$ входного воздействия и соответствующим статистическим характеристикам случайных коэффициентов $m_a(t,x)$, $R_{aa}(t_1,x_1;\,t_2,x_2)$; $m_b(t,x)$, $R_{bb}(t_1,x_1;\,t_2,x_2)$ и $m_c(t,x)$, $R_{cc}(t_1,x_1;\,t_2,x_2)$.

Усреднение решения (7) позволяет записать выражение для растянутой в столбец матрицы коэффициентов разложения функции математического ожидания выходного сигнала:

$$\mathbf{C}_{pp}^{m_z} = \mathsf{M}\left[\mathbf{A}_{pp\times pp}\right]\mathbf{C}_{pp}^{m_y} + \mathsf{M}\left[\mathbf{A}_{pp\times pp}^{0}\right]\mathbf{C}_{pp}^{m_0} \tag{9}$$

(в уравнении (9) указаны размеры матриц).

По проекционной характеристике $\mathbf{C}_{pp}^{m_z}$ восстанавливается функция математического ожидания выходного сигнала системы $m_z(t,\,x)$. Предварительно по этому вектор-столбцу с использованием процедуры, обратной растягиванию строк в столбцы, восстанавливается квадратная матрица коэффициентов разложения функции $m_z(t,\,x)$ по двумерному ортогональному базису и уже по этой матрице восстанавливается сама функция $m_z(t,\,x)$. В случае выбора в качестве базиса системы функций Уолша восстановленная функция представляется в виде квадратной матрицы своих дискретных значений размером $(p\times p)$.

Проекционная характеристика корреляционной функции выходного сигнала определяется выражением

$$\mathbf{C}_{pp\times pp}^{R_{zz}} = \mathsf{M}\left[\mathbf{A}_{pp\times pp}\left(\mathbf{C}_{pp\times pp}^{R_{yy}} + \mathbf{C}_{pp}^{m_y}\left(\mathbf{C}_{pp}^{m_y}\right)^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{A}_{pp\times pp}^{\mathrm{T}}\right] +$$

$$+\,\mathsf{M}\left[\mathbf{A}_{pp\times pp}^{0}\left(\mathbf{C}_{pp\times pp}^{R_{00}} + \mathbf{C}_{pp}^{m_0}\left(\mathbf{C}_{pp}^{m_0}\right)^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathbf{A}_{pp\times pp}^{0}\right)^{\mathrm{T}}\right] - \mathbf{C}_{pp}^{m_z}\left(\mathbf{C}_{pp}^{m_z}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{10}$$

которое получается после подстановки (7) в выражение для корреляционной функции

$$\mathbf{C}^{R_{zz}} = \mathsf{M}\left[\mathbf{C}^{z}\left(\mathbf{C}^{z}\right)^{\mathrm{T}}\right] - \mathbf{C}^{m_z}\left(\mathbf{C}^{m_z}\right)^{\mathrm{T}}$$

при условии некоррелированности входного воздействия и дополнительных условий.

При использовании базиса функций Уолша матрица дискретных значений корреляционной функции выходного сигнала, восстановленная по ее проекционной характеристике $\mathbf{C}_{pp\times pp}^{R_{zz}}$ с помощью четырехмерного обратного преобразования Уолша, может быть интерпретирована как клеточная матрица ($p\times p$ клеток размером $p\times p$ каждая), представляющая в двумерном виде четырехмерную матрицу корреляционной функции выходного сигнала системы с распределенными параметрами. Каждый элемент этой матрицы имеет четыре индекса: два определяют координаты клетки, два — координаты элемента внутри клетки. Такую же структуру имеют матрицы дискретных значений корреляционной функции входного воздействия и дополнительных условий.

Процедура усреднения выражений (9) и (10), в которых матричные операторы $\mathbf{A}_{pp\times pp}$, $\mathbf{A}_{pp\times pp}^{0}$ выражены в виде рядов (8), сводится к представлению моментов гауссовых случайных величин порядка выше второго через моменты первого и второго порядков. Указанную процедуру раскрытия моментов выполняем аналитически с использованием известного соотношения

$$\sum_{r=0}^{\infty}\alpha_r\frac{\lambda^r}{r!}=\prod_{r=1}^{\infty}\exp\left\{\frac{\chi_r\lambda^r}{r!}\right\},$$

которое является тождеством по λ и устанавливает связь между начальными моментами α_r и кумулянтами χ_r порядка r скалярной случайной величины. При этом ограничиваемся только кумулянтами первого и второго порядка, в точности соответствующими моментам первого и второго порядка гауссовой случайной величины. В результате выражения (9) и (10) преобразуются в формулы, в явном виде связывающие статистические характеристики входа, выхода и случайных параметров системы. Процедура раскрытия моментов может быть легко автоматизирована.

Возможность параллельных вычислений. Особенностью рассматриваемого метода анализа является представление решения в виде матричного ряда, члены которого могут быть вычислены независимо один от другого, что делает возможным объединение их в группы и параллельное вычисление этих групп на отдельных процессорах. В алгоритме, реализующем данный метод, можно выделить два уровня параллелизма. На верхнем уровне находятся упомянутые группы независимо вычисляемых членов матричных рядов, на нижнем — отдельные матрицы, над которыми осуществляются стандартные матричные операции при вычислении членов, входящих в группы. Выполнение этих матричных операций также допускает параллельное вычисление элементов матриц. Возможность использования параллельных вычислений при реализации алгоритма позволяет уменьшить время решения задач анализа, что важно для ускорения работы оптимизационных процедур, широко используемых при автоматизированном проектировании систем управления. Следует также отметить, что матричные операторы для аппроксимации уравнений в частных производных формируются на основе соответствующих матричных операторов, используемых для аппроксимации обыкновенных дифференциальных уравнений, и имеют блочную структуру. Поэтому вместо перемножения матриц размером $pp \times pp$ каждая, можно перемножать p^2 матриц размером $p \times p$, что позволяет уменьшить объем требуемой оперативной памяти.

Параметрическая идентификация. Рассмотрим метод идентификации, основанный на описанной выше проекционной аппроксимации исходной математической модели распределенной стохастической системы, который сводит задачу идентификации к задаче минимизации функционала, определяемого через статистические характеристики входного воздействия, выходного сигнала и случайных коэффициентов исходной модели.

Задачу идентификации рассмотрим в следующей постановке. Предположим, что для некоторой реальной распределенной системы известна структура ее математической модели, которая задана уравнением в частных производных второго порядка вида (1) с дополнительными условиями (2). Начальные условия будем считать нулевыми. Последнее предположение упрощает задачу и не является искусственным, поскольку в большинстве практических задач идентификации предполагается возможность задания не только стандартных входных воздействий, но и начального состояния системы. Считаем, что случайные коэффициенты дифференциального уравнения (1), статистические характеристики которых подлежат определению, состоят из двух составляющих: детерминированной, которая представляет собой математическое ожидание значения данного коэффициента, и случайной в виде случайной величины с нулевым средним значением. Случайные коэффициенты полагаем статистически независимыми и имеющими нормальный закон распределения. Требуется определить их математические ожидания и дисперсии.

Информация о статистических характеристиках входного воздействия и выходного сигнала системы может быть получена в результате лабораторных или практических испытаний, в ходе которых на вход системы подают некоторые стандартные воздействия и измеряют выходной сигнал системы. Статистическая обработка результатов измерений позволяет определить математические ожидания $m_z(t,x)$, $m_y(t,x)$ и корреляционные функции $R_{zz}(t_1,x_1;\, t_2,x_2)$ и $R_{yy}(t_1,x_1;\, t_2,x_2)$ этих сигналов, представляющих собой нестационарные случайные процессы.

Для входного воздействия предполагается нормальный закон распределения.

При решении задачи идентификации воспользуемся выражением для проекционной характеристики одной из статистических мер выходного сигнала системы — второго начального момента, которое имеет вид

$$\mathbf{C}^{\theta_{zz}} = \mathbf{A}_0 \mathrm{M}\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\tilde{\mathbf{A}}^z \mathbf{A}_0\right)^i \mathbf{P}^t \mathbf{P}^x \left[\mathbf{C}^{R_{yy}} + \mathbf{C}^{m_y} \left(\mathbf{C}^{m_y}\right)^{\mathrm{T}} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\tilde{\mathbf{A}}^z \mathbf{A}_0\right)^i \mathbf{P}^t \mathbf{P}^x \right]^{\mathrm{T}} \right\} \mathbf{A}_0^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

где $\mathbf{A}_0$ — матрица проекционной характеристики детерминированной части системы, вычисляемая через математические ожидания коэффициентов уравнения (1); $\tilde{\mathbf{A}}^z$ — матрица случайной составляющей проекционной характеристики системы, определяемая через случайные составляющие коэффициентов уравнения (1).

После аналитического усреднения выражения (11), процедура которого аналогична процедуре усреднения выражений (9) и (10), получаем матричную формулу, в которую в явном виде входят математические ожидания и дисперсии случайных коэффициентов уравнения (1). Это дает возможность представить задачу определения данных статистических характеристик как задачу минимизации функционала:

$$J(\mathbf{K}) = \left[\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \left(c_{ij}^E (\mathbf{K}) \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{12}$$

где $c_{ij}^E(\mathbf{K})$ — элементы матрицы разности проекционных характеристик $\mathbf{C}^E(\mathbf{K}) = \mathbf{C}^{\theta_{zz}^{\text{и}}} - \mathbf{C}^{\theta_{zz}^{\text{р}}}(\mathbf{K})$; $\mathbf{C}^{\theta_{zz}^{\text{и}}}$ — проекционная характеристика второго начального момента измеренного выходного сигнала системы; $\mathbf{C}^{\theta_{zz}^{\text{р}}}(\mathbf{K})$ — проекционная характеристика второго начального момента выходного сигнала, рассчитанная по проекционной модели (11); $\mathbf{K}$ — вектор искомых статистических характеристик коэффициентов исходной модели; $s = p^2$; p — число базисных функций.

Минимизацию функционала (12) можно выполнить одним из стандартных методов поиска экстремума функций n-переменных при ограничении на положительность значений идентифицируемых дисперсий случайных коэффициентов. Результатом минимизации является определение искомых математических ожиданий и дисперсии коэффициентов исходной модели.

Пример. Рассмотрим задачу идентификации. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t \partial x} + a_2(t,x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} + a_1(t,x)\frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + a_0^{\text{сл}}(t,x)z(t,x) = y(t,x)$$

при следующих начальных условиях:

$$z(0,x)=0,\ x\in[0,1];\quad z(t,0)=0,\ t\in[0,1];\quad \alpha(0)=\phi(0)=0.$$

Информация о статистических характеристиках выходного сигнала системы при заданном входном воздействии была получена методом статистических испытаний для проекционной модели в форме (6). Число удерживаемых членов разложения по базису функций Уолша $p=8$, число испытаний 3000. На вход модели подавали случайное воздействие $y(t,x)$ с заданным математическим ожиданием $m_y(t,x)=1$ и функцией корреляции $R_{yy}(t_1,t_2;\ x_1,x_2)=e^{-|t_1-t_2|}e^{-|x_1-x_2|}$.

В качестве идентифицируемого случайного параметра модели был выбран коэффициент $a_0^{\text{сл}}(t,x)$, который в ходе испытаний вычислялся как сумма детерминированной составляющей $\overline{a}_0(t,x)=2tx$ и нормально распределенной случайной величины $\tilde{a}_0$ с математическим ожиданием $m_{\tilde{a}_0}=2$ и дисперсией $D_{\tilde{a}_0}=2$. Детерминированные коэффициенты были заданы следующим образом:

$$\overline{a}_2(t,x)=x^2-2x^3t;\quad \overline{a}_1(t,x)=x-t;\quad \overline{a}_0(t,x)=2tx.$$

По результатам статистических испытаний была определена проекционная характеристика второго начального момента $\mathbf{C}^{\theta_{zz}}$, выступающая в качестве проекционной характеристики $\mathbf{C}^{\theta_{zz}^{И}}$ при вычислении функционала (12).

Согласно описанному выше алгоритму идентификации, была выполнена минимизация функционала (12) методом прямого поиска Нелдера — Мида с помощью стандартной функции fminsearch пакета MATLAB. Начальная точка поиска $m_{\tilde{a}_0}=0,\ D_{\tilde{a}_0}=0$.

Удерживая первые три члена матричного ряда (8), удалось получить следующие результаты идентификации: $m_{\tilde{a}_0}=2{,}0476,\ D_{\tilde{a}_0}=2{,}0754$.

Видно хорошее соответствие идентифицированных характеристик действительным характеристикам случайной величины $\tilde{a}_0$, которые были заданы при проведении статистических испытаний.

Заключение. Предлагаемый метод проекционной аппроксимации непрерывных математических моделей рассматриваемого класса стохастических систем с распределенными случайными параметрами позволяет строить эффективные вычислительные алгоритмы решения задач статистического анализа и параметрической идентификации, основанные на использовании усредненных проекционных моделей и методов математического программирования. При этом задача идентификации неизвестных статистических характеристик случайных параметров математической модели сводится к задаче минимизации легко вычисляемого квадратичного функционала.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* Москва, Наука, 2004, 743 с.

[2] Пупков К.А., Егупов Н.Д., Макаренков А.М., Трофимов А.И. *Теория и компьютерные методы исследования стохастических систем*. Москва, Физматлит, 2003, 400 с.

Статья поступила в редакцию 05.05.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

З.Г. Широкова, Аунг Чжо Со, А.М. Макаренков. Анализ и идентификация одного класса систем с распределенными случайными параметрами. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 11. URL: http:// engjournal.ru/ catalog/it/asu/1267.html

Широкова Зинаида Георгиевна родилась в 1971 г., окончила КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1996 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Электротехника» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: проекционные методы исследования систем со случайными параметрами. e-mail: sh0001@rambler.ru

Аунг Чжо Со получил степень магистра в КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2011 г. Аспирант кафедры «Системы автоматического управления» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: проекционные методы исследования систем со случайными параметрами. e-mail: aung.soe.98@facebook.com

Макаренков Александр Михайлович родился в 1961 г., окончил КФ МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1984 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: проекционные методы исследования систем со случайными параметрами. e-mail: amm2005@rambler.ru

Analysis and identification of one class of systems with distributed random parameters

© Z.G. Shirokova, Aung Kyaw Soe, A.M. Makarenkov

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia

Control of distributed systems is a complex problem that requires the construction of adequate mathematical models, including models, which take into account the effects of random factors. This article describes the method of statistical analysis of systems with distributed parameters in the Goursat problem statement and the method of parametric identification in the context of the definitions of the statistical characteristics of random parameters of these systems. Both methods are based on the use of the so-called projection models, which are the result of a projection approximation of the original continuous models, described by partial differential equations with random coefficients. This approximation is performed using the operational matrices. The key point is the analytical procedure of averaging stochastic system operator based on the approximate representation of that operator in the form of the matrix series. In result the averaged projection model of system with distributed random parameters is obtained. The problem of identification of unknown statistical characteristics of the random parameters of the mathematical model is reduced to the minimization of a quadratic functional, calculated using the averaged projection model. Example of solving the problem of identification of mean value and variance of a random parameter of stochastic system is considered. Using the averaged projection models allows building effective computational algorithms for solving problems of statistical analysis and parametric identification. These algorithms are suitable for parallel implementation.

Keywords: *distributed parameters, statistical analysis, random parameters, stochastic system, identification, mathematical model, projective approximation, matrix operator.*

REFERENCES

[1] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 2004, 743 p.

[2] Pupkov K.A., Egupov N.D., Makarenkov A.M., Trofimov A.I. *Teoriya i kompyuternye metody issledovaniya stokhasticheskikh system* [Theory and Computer Methods of Study of Stochastic Systems]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 400 p.

Shirokova Z.G. (b. 1971) graduated from Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University in 1996. Ph.D., Assoc. Professor of the Department of Electrical Engineering at the Kaluga branch of Bauman MSTU. She is the author and co-author of more than 40 publications in the field of application of projection methods for research of systems with random parameters. e-mail: sh0001@rambler.ru

Aung Kyaw Soe received a master's degree in Kaluga branch of Bauman Moscow State Technical University in 2011. He is a graduate student of the Department of Automatic Control Systems at Kaluga branch of Bauman MSTU. The area of his scientific interests is application of projection methods for research of systems with random parameters. e-mail: aung.soe.98@facebook.com

Makarenkov A. M. (b. 1961) graduated from Kaluga branch of Bauman Moscow Higher Technical School in 1984. Ph.D., Assoc. Professor of the Department of Automatic Control Systems at the Kaluga branch of Bauman MSTU. He is the author and co-author of more than 120 publications and one monograph in the field of application of projection methods for research of systems with random parameters. e-mail: amm2005@rambler.ru