УДК 378.147.88

Разложение функции, описывающей последовательность прямоугольных импульсов, в тригонометрический ряд Фурье

© И.Н. Овчаренко

КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

Знание характеристик последовательностей прямоугольных импульсов, а также владение методами, алгоритмами и соответствующим математическим аппаратом позволяет эффективно решать все многообразие задач, связанных с применением прямоугольных импульсов. В статье рассмотрены результаты работы компьютерной программы, которая позволяет аппроксимировать периодическую функцию, описывающую прямоугольные импульсы, конечным числом гармоник тригонометрического ряда Фурье.

Ключевые слова: *прямоугольные импульсы, гармоники, тригонометрический ряд Фурье, компьютерная программа.*

Периодические последовательности прямоугольных импульсов различной длины и конфигурации находят применение в различных областях науки и техники. В настоящее время они составляют основу большинства новых мультимедиа технологий; применяются в персональных компьютерах, мобильных телефонах, в сети Интернет; хранятся на магнитных и лазерных дисках и т. д. Передача, хранение и обработка информации основаны на использовании последовательностей таких импульсов. В связи с этим необходимо знать характеристики последовательностей прямоугольных импульсов; владеть методами, алгоритмами и соответствующим математическим аппаратом, позволяющими эффективно решать все многообразие задач, связанных с применением прямоугольных импульсов.

Рассмотрим последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой A (в вольтах или амперах), периодом T (в секундах) и длительностью τ (в секундах) (рис. 1). Такую последовательность можно рассматривать как периодическую функцию f, описывающую сложные колебания. Данное сложное колебание можно представить как совокупность простых синусоидальных колебаний, т. е. разложить периодическую функцию f в тригонометрический ряд Фурье.

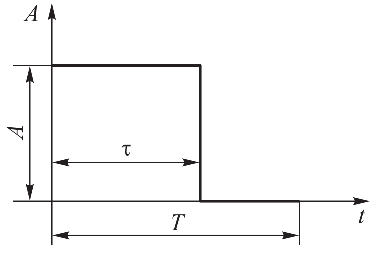


Рис. 1. Прямоугольный импульс

Тригонометрический ряд Фурье для функции f с периодом $T = 2\pi$ задается выражением [1, 2]

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где a_0, a_n, b_n и — коэффициенты тригонометрического ряда Фурье, определяемые по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Данные формулы легко обобщить на случай, когда период $T = 2l,$ где l — произвольное положительное число. Тогда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right];$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx;$$

Если функция f $2l$-периодична, то для определения коэффициентов a_0, a_n и b_n интегрирование можно выполнять по любому отрезку длины $2l,$ т. е. по отрезку $[a;\, a + 2l],$, где a — любое число. Тогда коэффициенты тригонометрического ряда Фурье примут вид

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{a}^{a+2l} f(x)\, dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_a^{a+2l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx.$$

Для прямоугольного импульса с амплитудой A периодом T и длительностью τ функция

$$f(t) = \begin{cases} A, & \text{если } t \in [0;\, \tau); \\ 0, & \text{если } t \in [\tau;\, T), \end{cases}$$

а коэффициенты тригонометрического ряда Фурье будут следующие:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_0^{\tau} A\,dt = 2A\frac{\tau}{T};$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^{\tau} A\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt = \frac{A}{\pi n}\sin\left(2\pi n\frac{\tau}{T}\right);$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^{\tau} A\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt = \frac{A}{\pi n}\left[1-\cos\left(2\pi n\frac{\tau}{T}\right)\right].$$

В результате функция, описывающая последовательность прямоугольных импульсов, разлагается в тригонометрический ряд Фурье, который задается формулой

$$f(t) = A\frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A}{\pi n}\sin\left(2\pi n\frac{\tau}{T}\right)\cos\left(\frac{\pi n t}{l}\right) + \frac{A}{\pi n}\left[1-\cos\left(2\pi n\frac{\tau}{T}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi n t}{l}\right)\right\}. \quad (16)$$

На практике используют не сам тригонометрический ряд Фурье, а его частичную сумму, содержащую конечное число слагаемых, каждое из которых описывает простое колебание, называемое гармоникой. Автором разработана компьютерная программа [3–5], которая позволяет аппроксимировать периодическую функцию, описывающую прямоугольные импульсы, конечным числом гармоник тригонометрического ряда Фурье.

На рис. 2 показаны результаты работы программы для последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой $A = 1$ В, периодом $T = 2$ с и длительностью $\tau = 1$ с, т. е. длительность импульса составляет

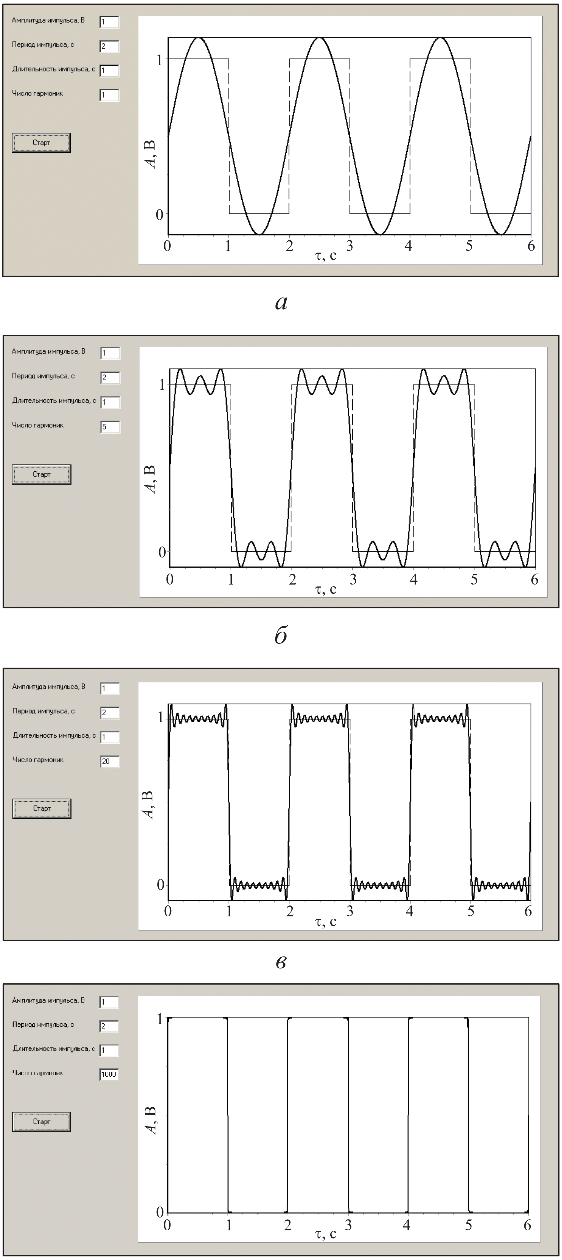
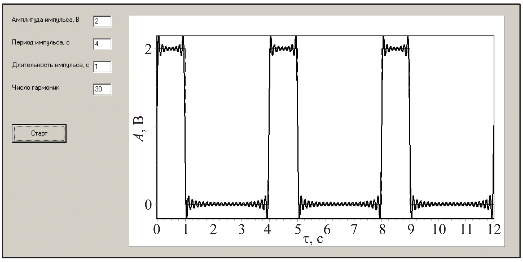


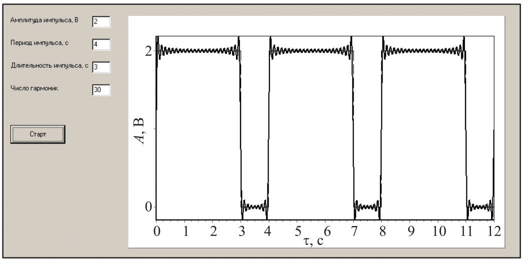
Рис. 2. Результаты работы программы для последовательного прямоугольных импульсов

половину его периода. Видно, что при использовании всего одной гармоники получается очень грубое приближение (см. рис. 2, *а*), но уже пять гармоник дают приближение, довольно хорошо отражающее исходную функцию (см. рис. 2, *б*). В случае применения двадцати гармоник полностью сформированы передний и задний фронты импульса (см. рис. 2, *в*), а полное совпадение исходной функции и частичной суммы тригонометрического ряда Фурье получается при использовании одной тысячи гармоник (см. рис. 2, *г*).

Данная программа позволяет аппроксимировать последовательности прямоугольных импульсов конечным числом гармоник тригонометрического ряда Фурье при любых значениях амплитуд, периодов и длительностей импульсов (рис. 3).



а



б

Рис. 3. Результаты работы программы для случаев, когда соотношение между длительностью импульса и его периода равно 1:4 (*а*) и 3:4 (*б*)

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа.* Москва, Высшая школа, 1981, Т.2. 584 с.
[2] Фихтенгольц Г.М. *Основы математического анализа.* Санкт-Петербург, Издательство «Лань», 2005, Т.2., 464 с.
[3] Фаронов В.В. *Delphi. Программирование на языке высокого уровня.* Санкт-Петербург, Питер, 2006, 640 с.
[4] Фленов М.Е. *Библия Delphi.* Санкт-Петербург, БХВ-Петербург, 2004, 880 с.
[5] Осипов Д. *Delphi. Профессиональное программирование.* Санкт-Петербург, Символ-Плюс, 2004, 1056 с.

Статья поступила в редакцию 3.04.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Овчаренко И.Н. Разложение функции, описывающей последовательность прямоугольных импульсов, в тригонометрический ряд Фурье. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/it/hidden/1258.html

Овчаренко Игорь Николаевич родился в 1963 г., окончил физический факультет ЛГУ в 1987 г. Ассистент кафедры физики КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: физика атмосферы. e-mail: ino1963@yandex.ru

Decomposition of the function describing the sequence of rectangular pulses in trigonometric Fourier series

© I.N. Ovcharenko

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia

Periodic sequence of rectangular pulses of different lengths and configurations are widely applied in various fields of science and technology. Due to this it is necessary to know the characteristics of the sequence of rectangular pulses, master the methods, algorithms and corresponding mathematical apparatus, allowing to effectively solving all the variety of tasks associated with the use of rectangular pulses. The article examines working data of a computer program, which allows us to approximate periodic function that describes the rectangular pulses, by the finite number of harmonics of a trigonometric Fourier series.

Keywords: *rectangular pulses, harmonics, trigonometric Fourier series, computer program.*

REFERENCES

[1] Kudriavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza. T. 2.* [Course of Mathematical Analysis, vol. 2]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1981, 584 p.

[2] Fikhtengol'ts G.M. *Osnovy matematicheskogo analiza. T. 2*. [Principles of Mathematical Analysis, vol. 2]. St.-Petersburg, «Lan'» Publ., 2005, 464 p.

[3] Faronov V.V. *Delphi. Programmirovanie na iazyke vysokogo urovnia* [Delphi. Programming in high level language]. St.-Petersburg, Piter Publ., 2006, 640 p.

[4] Flenov M.E. *Bibliia Delphi* [Delphi Bible]. St.-Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2004, 880 p.

[5] Osipov D. *Delphi. Professional'noe programmirovanie* [Delphi. Professional Programming]. St.-Petersburg, Simvol-Plius Publ., 2004, 1056 p.

Ovcharenko I.N. (b. 1963) graduated from the Physics Department of Leningrad State University in 1987. Assistant Lecturer of the Physics Department at Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. Author of scientific papers in atmospheric physics. e-mail: ino1963@yandex.ru