УДК 681.513.5

Симплекс-метод решения задачи быстродействия при наличии ограничения на скалярное управление и фазовых ограничений

© В.И. Краснощеченко

КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

Рассмотрено решение задачи быстродействия для линейных стационарных объектов со скалярным ограниченным управлением и фазовыми ограничениями в виде параллелепипеда. В предложенном алгоритме используется переход от задачи быстродействия к задаче линейного программирования, которая решается симплекс-методом. Изложенный метод относится к группе методов параметризации управления.

Ключевые слова: *задача быстродействия, фазовое ограничение, линейное программирование, симплекс-метод*

Введение. Задачи оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями наиболее характерны для практики, так как отражают реальное функционирование объектов управления. Вместе с тем, с точки зрения нахождения решения — это и наиболее трудные задачи. Разработано много методов решения подобных задач. Среди них наиболее известные и хорошо разработанные: принцип максимума Понтрягина [1–3]; прямые методы [4], методы параметризации управления [5], метод штрафов [6]. Из современных подходов укажем методы, основанные на использовании линейных матричных неравенств [7, 8]. Несмотря на обилие подходов к решению задач с ограничениями, среди них отсутствует какой-либо доминирующий, поскольку каждый имеет как достоинства, так и недостатки, например по точности, сходимости или вычислительной сложности. И выбор метода в большой степени зависит от конкретной задачи.

Постановка задачи. Задана линейная стационарная система управления со скалярным ограниченным управлением и ограничением на переменные состояния в виде параллелепипеда:

объект управления

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + bu(t); \tag{1}$$

интервальное ограниченное управление

$$u \in U = \left[u^-, u^+\right] \subset R^1,\ u^- < 0,\ u^+ > 0; \tag{2}$$

параллелепипед (область допустимых траекторий)

$$\mathbf{x} \in \prod_{i=1}^{n} \left[x_i^-, x_i^+\right] = G \subset R^n. \tag{3}$$

Предполагается, что условия управляемости в области G выполнены.

Замечание. Если на какую-либо координату не накладываются ограничения, например x_k, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, в качестве «границ» на эту координату выбираются числовые значения, заведомо значительно превышающие по модулю абсолютные значения данной координаты при движении системы без фазовых ограничений.

Заданы начальная и конечная точки: $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in G$. Необходимо обеспечить перевод системы из начальной в конечную точку за минимальное время с соблюдением всех ограничений.

Представление задачи быстродействия с фазовыми ограничениями как задачи линейного программирования. Обозначим через $\mathbf{x}^+ = \left(x_1^+ x_2^+ \cdots x_n^+\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^- = \left(x_1^- x_2^- \cdots x_n^-\right)^{\mathrm{T}}$ векторы правых и левых границ координат состояния соответственно.

Шаг 1. *Переход к дискретной модели заданной системы*. Имеем

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}u(k), \tag{4}$$

где $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(kh)$; h — шаг дискретизации, и соответствующие матрицы

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}h};\ \mathbf{G} = \int_0^h e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b}dt. \tag{5}$$

Последовательно получаем

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}u(0);$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{F}\mathbf{x}(1) + \mathbf{G}u(1) = \mathbf{F}\left(\mathbf{F}\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}u(0)\right) + \mathbf{G}u(1) = \mathbf{F}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{F}\mathbf{G}u(0) + \mathbf{G}u(1);$$

....

Тогда на шаге k

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{F}^{k-i-1}\mathbf{G}u(i). \tag{6}$$

Шаг 2. *Учет ограничений на фазовые координаты и конечных условий.* Учет ограничений на фазовые координаты: $\mathbf{x}^- \le \mathbf{x}(k) \le \mathbf{x}^+$, $k = 1, ..., N$ (считаем, что $\mathbf{x}(0) \in G$) обеспечивается выполнением следующих неравенств:

$$\mathbf{x}^- - \mathbf{F}^k\mathbf{x}(0) \le \sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{F}^{k-i-1}\,\mathbf{G}u(i) \le \mathbf{x}^+ - \mathbf{F}^k\mathbf{x}(0),\ k = 1, ..., N, \tag{7}$$

где $N = T/h$ — общее число шагов.

Представим неравенства (7) в виде $2Nn$ односторонних неравенств:

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{F}^{k-i-1}\mathbf{G}u(i)\le \mathbf{x}^{+}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0);\\ -\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{F}^{k-i-1}\mathbf{G}u(i)\le -\left(\mathbf{x}^{+}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0)\right).\end{gathered}\tag{8}$$

Попадание в конечную точку обеспечивается n ограничениями типа равенств

$$\sum_{i=0}^{N-1}\mathbf{F}^{N-i-1}\mathbf{G}u(i)=\mathbf{x}_1-\mathbf{F}^{N}\mathbf{x}_0.\tag{9}$$

Шаг 3. *Переход к канонической форме задачи линейного программирования для фазовых ограничений.* В симплекс-методе требуется привести ограничения (8), (9) к канонической форме задачи линейного программирования [9]:

правые части всех ограничений должны быть неотрицательными;

все ограничения должны быть приведены к равенствам;

все переменные должны быть неотрицательными.

Сделаем необходимые преобразования в правой и левой частях ограничений (8), (9) так, чтобы правые части всех ограничений были неотрицательными: если правая часть меньше нуля, то умножаем на –1 левую и правую части и меняем знак отношения (только для ограничений (8)) на противоположный. Сгруппируем преобразованные неравенства (8) в две группы и добавим к ним скорректированные равенства (9). Получим

$$\sum_{i=0}^{N-1}q_{ji}^{L}u(i)\le b_{jL},\ j=1,\ ...,\ k_L;\tag{10}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}q_{ji}^{B}u(i)\ge b_{jB},\ j=1,\ ...,\ k_B;\ \ k_L+k_B=2Nn;\tag{11}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}q_{ji}^{E}u(i)=b_{jE},\ \ j=1,\ ...,\ n.\tag{12}$$

Здесь

$$q_{ji}^{L}=\left(\mathbf{F}^{k-i-1}\mathbf{G}\right)_{p_k};\quad b_{jL}=\left(\mathbf{x}^{+}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0)\right)_{p_k}\ge 0,\ \text{если}\ \left(\mathbf{x}^{+}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0)\right)_{p_k}\ge 0;$$

$$q_{ji}^{L}=0,\ \text{если}\ i>k,$$

или

$$q_{ji}^{L}=\left(-\mathbf{F}^{k-i-1}\mathbf{G}\right)_{p_k};\quad b_{jL}=-\left(\mathbf{x}^{-}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0)\right)_{p_k}\ge 0,\ \text{если}\ -\left(\mathbf{x}^{-}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0)\right)_{p_k}\ge 0;$$

$$q_{ji}^{L}=0,\ \text{если}\ i>k;$$

$$k=[1,\ ...,\ N],\ i=0,1,\ ...,\ k;\ j=[1,\ ...,\ k_L];\ \ p_k\in\{1,\ ...,\ n\};$$

$$q_{ji}^{B}=\left(-\mathbf{F}^{k-i-1}\mathbf{G}\right)_{p_k};\quad b_{jB}=-\left(\mathbf{x}^{+}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0)\right)_{p_k}>0,\ \text{если}\ \left(\mathbf{x}^{+}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0)\right)_{p_k}<0;$$

$$q_{ji}^{B}=0,\ \ \text{если}\ i>k,$$

или

$$q_{ji}^{B}=\left(\mathbf{F}^{k-i-1}\mathbf{G}\right)_{p_k};\quad b_{jB}=\left(\mathbf{x}^{-}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0)\right)_{p_k}>0,\ \text{если}\ -\left(\mathbf{x}^{-}-\mathbf{F}^{k}\mathbf{x}(0)\right)_{p}<0;$$

$$q_{ip}^{B}=0\text{, если}\ i>k;$$

$$k=[1,\ ...,\ N];\ \ i=0,1,...,\ k;\ \ j=[1,\ ...,\ k_B];\ \ p_k\in\{1,\ ...,\ n\};$$

$$q_{ji}^{E}=\left(\mathbf{F}^{N-i-1}\mathbf{G}\right)_{p_k};\ b_{jE}=\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{F}^{N}\mathbf{x}_0\right)_{p_N}\ge 0,\ \text{если}\ \left(\mathbf{x}_1-\mathbf{F}^{N}\mathbf{x}_0\right)_{p_N}\ge 0,$$

или

$$q_{ji}^{E}=\left(-\mathbf{F}^{N-i-1}\mathbf{G}\right)_{p_N};\ b_{jE}=-\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{F}^{N}\mathbf{x}_0\right)_{p_N},\ \ \text{если}\ \left(\mathbf{x}_1-\mathbf{F}^{N}\mathbf{x}_0\right)_{p_N}<0;$$

$$i=[0,1,\ ...,\ N-1];\ \ j=[1,...,\ n];\ \ p_N\in\{1,...,\ n\}.$$

Верхние индексы L, B, E относятся соответственно к ограничениям вида $\le,\ \ge,\ =$.

Для выравнивания ограничений (10) добавим в левую часть данных ограничений неотрицательные остаточные переменные, представленные вектором

$$\mathbf{s}_r=\left(s_{r1}\,s_{r2}\ldots s_{rk_L}\right)^{\mathrm{T}},\ \ s_{ri}\ge 0,\ \ i=1,\ ...,\ k_L.$$

Для выравнивания ограничений (11) вычтем из левой части неотрицательные избыточные переменные, представленные вектором

$$\mathbf{s}_o=\left(s_{01}\,s_{02}\ldots s_{0k_B}\right)^{\mathrm{T}},\ \ s_{oi}\ge 0,\ i=1,\ ...,\ k_B.$$

Получаем систему $2Nn$ равенств:

$$\sum_{i=0}^{k-1} q_{ji}^{L} u(i) + s_{rj} = b_{jL}, \; j = 1, \ldots, k_L, \; k = 1, \ldots, N; \qquad (13)$$

$$q_{ji}^{L} = 0, \text{ если } i \ge k;$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} q_{ji}^{B} u(i) - s_{oj} = b_{jB}, \; j = 1, \ldots, k_B, \; k_L + k_B = 2Nn; \qquad (14)$$

$$q_{ji}^{B} = 0, \text{ если } i \ge k.$$

Поскольку текущее управление $u(i) \in U \subset R^1$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, может иметь любой знак, сделаем необходимую замену

$$u(i) = u'(i) - u''(i); \;\; u'(i), \; u''(i) \ge 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тогда уравнения (12)–(14) примут вид

$$\sum_{i=0}^{k-1} q_{ij}^{L} u'(i) - \sum_{i=0}^{k-1} q_{ij}^{L} u''(i) + s_{rj} = b_{jL}, \; j = 1, \ldots, k_L, \; k = 1, \ldots, N; \qquad (15)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} q_{ij}^{B} u'(i) - \sum_{i=0}^{k-1} q_{ij}^{B} u''(i) - s_{oj} = b_{jB}, \; j = 1, \ldots, k_B; \qquad (16)$$

$$k = 1, \ldots, N; \; k_L + k_B = 2Nn;$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} q_{ij}^{E} u'(i) - \sum_{i=0}^{N-1} q_{ij}^{E} u''(i) = b_{jE}, \; j = 1, \ldots, n. \qquad (17)$$

Шаг 4. *Учет ограничений на управление* $u(i) \le u^+$, $-u(i) \le -u^-$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, *с приведением их к канонической форме.* Введем остаточные переменные (вектор $\mathbf{s}_r^u$ размерности $2N \times 1$) в ограничения на управление (2) и учтем неограниченность в знаке управления на каждом шаге:

$$u'(i) - u''(i) + s_{r,\,2(i+1)}^{u} = u^+; \qquad (18)$$

$$-u'(i) + u''(i) + s_{r,\,2(i+1)}^{u} = -u^-, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Шаг 5. *Формирование начального допустимого базиса.* Чтобы получить начальный допустимый базис для задачи линейного программирования, добавим формально к ограничениям (16), (17) остаточные искусственные (неотрицательные) переменные $\left(R_i \ge 0, \, i = 1, \ldots, k_B + n\right)$. Тогда уравнения (16), (17) примут вид

$$\sum_{i=0}^{k-1} q_{ij}^{B} u'(i) - \sum_{i=0}^{k-1} q_{ij}^{B} u''(i) - s_{oj} + R_j = b_{jB},\ j = 1, \ldots, k_B,\ k = 1, \ldots, N; \quad (19)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} q_{ij}^{E} u'(i) - \sum_{i=0}^{N-1} q_{ij}^{E} u''(i) + R_p = b_{jE},\ j = 1, \ldots, n,\ p = k_{B+1}, \ldots, k_B + n. \quad (20)$$

Шаг 6. *Формирование целевой функции*

$$z = \underbrace{\min}_{u'(0), \ldots, u''(N-1)} \sum_{i=1}^{k_B+n} R_i. \quad (21)$$

Важно подчеркнуть, что если задача линейного программирования (15), (18)–(20) с целевой функцией (21) имеет решение (как необходимое условие, время управления должно быть не менее минимально требуемого, т. е. времени задачи быстродействия и минимального количества переключений с учетом в том числе фазовых ограничений), то оптимальное значение целевой функции всегда равно нулю: $z^* = 0$. В этом случае обеспечивается точное попадание в конечную точку с одновременным выполнением всех ограничений. При этом в оптимальном базисе остаточные искусственные переменные либо отсутствуют, либо равны нулю (при малом числе шагов дискретизации N). Поэтому и $z^* = 0$.

Шаг 7. *Выбор начального допустимого базиса и формирование z-строки начальной симплекс-таблицы.* Начальный допустимый базис будет состоять из всех остаточных переменных уравнений (15), (18) и остаточных искусственных переменных уравнений (19), (20), т. е. всего $(2N+1)n + 2N$ переменных:

$$\mathbf{x}_B(0) = \{\mathbf{s}_r,\ \mathbf{s}_r^u,\ \mathbf{R}\}. \quad (22)$$

Нетрудно показать, что каноническое представление z-строки

$$z - \sum_{i=1}^{k_B+n} R_i = 0, \quad (23)$$

после подстановки базисных переменных $R_i,\ i = 1, \ldots, k_B + n,$ из ограничений (19), (20) в уравнение (23) имеет вид

$$\begin{aligned} z &+ \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{k_B} q_{ji}^{B} + \sum_{j=1}^{n} q_{ji}^{E} \right) u'(i) - \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{k_B} q_{ji}^{B} + \sum_{j=1}^{n} q_{ji}^{E} \right) u''(i) - \sum_{j=1}^{k_B} s_{oj} + \\ &+ \sum_{j=1}^{k_L} 0 \cdot s_{rj} + \sum_{j=1}^{2N} 0 \cdot s_{rj}^{u} + \sum_{j=1}^{k_B+n} 0 \cdot R_j = \sum_{j=1}^{k_B} b_{jB} + \sum_{j=1}^{n} b_{jE}. \end{aligned} \quad (24)$$

Шаг 8. *Составление начальной симплекс-таблицы.* Начальная симплекс-таблица $\mathbf{CT}_0$ (представляющая каноническую форму вершины многогранника решений в расширенном пространстве) с особой базисной переменной z, со всеми введенными переменными и правой частью — это матрица переменной размерности: от максимальной $\left((n+1)(2N+1)\right)\left(4N(n+1)+n+2\right)$, когда все фазовые ограничения имеют отрицательные правые части (имеется $2Nn$ избыточных переменных), до минимальной размерности $\left((n+1)(2N+1)\right)\times$ $\times\left((n+2)(2N+1)\right)$, когда все фазовые ограничения имеют только неотрицательные правые части (избыточные переменные отсутствуют). Число строк совпадает с числом базисных переменных, включая особую (не исключаемую) базисную переменную z, т. е. $(2N+1)(n+1)$.

Далее проводится стандартная процедура оптимизации симплекс-методом [9]:

проверка оптимальности текущего базиса;

если он не оптимален, определение включаемой, затем исключаемой переменных;

нахождение матрицы перехода и переход к новой симплекс-таблице (новой вершине многогранника решений) и т. д.

Процедура поиска минимального времени управления. Точность работы алгоритма зависит от количества шагов дискретизации N.

Шаг 1. Задают начальное количество шагов дискретизации N (обычно 50…100); необходимую терминальную точность $\left\|\mathbf{x}\left(t_1^*\right)-\mathbf{x}_1\right\|\leq$ $\leq\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — малое число, и некоторое малое (заведомо меньшее оптимального времени t_1^*) начальное значение $t_1(1)$ конечного времени t_1 (определяется эмпирически исходя из динамических характеристик системы). (Аргумент в скобках обозначает номер итерации.)

Шаг 2. Итерационным способом, начиная с $t_1(1)$ и постепенно увеличивая с шагом Δt_1 конечное время управления t_1, определяют минимальное время t_1^*, при котором:

обеспечивается необходимая терминальная точность $\left\|\mathbf{x}\left(t_1^*\right)-\mathbf{x}_1\right\|\leq$ $\leq\varepsilon$;

выполняются все ограничения;

управление принимает предельные значения, за исключением интервалов времени движения системы по границе фазовых ограничений.

Для каждого выбранного времени $t_1(i)$, $i=1, 2, \ldots,$ решают задачу линейного программирования. Оптимальное значение целевой функции задачи линейного программирования при $t_1 < t_1^*$ больше нуля: $z^* > 0$, а при $t_1 \ge t_1^*$ практически (в идеале точно) равно нулю: $z^* = 0$.

Если требуется повысить терминальную точность или/и имеются моменты ступенчатого переключения управления, то необходимо увеличивать число шагов N.

Пример применения представленного алгоритма управления. Рассмотрим систему второго порядка с матрицами

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,9 & -0,1 \end{pmatrix}; \ \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ограничением на управление $|u| \le 1,$ фазовыми ограничениями $|x_1| \le 0,5;\ |x_2| \le 2.$

Необходимо перевести данную систему из начального состояния $\mathbf{x}_0 = (-0,4;\quad -1,5)^{\mathrm{T}}$ в конечное $\mathbf{x}_1 = (-0,4;\quad 0)^{\mathrm{T}}$ за минимально возможное время t_1 с учетом всех ограничений.

На начальном этапе в алгоритме использовано $N = 100$ шагов кусочно-постоянного управления. Итерационным способом, начиная с начального значения $t_1(1) = 0,1$ с (в скобках указан номер итерации) и постепенно увеличивая с шагом $\Delta t_1 = 0,1$ с конечное время управления, было получено минимальное время $t_1^* = 1,25$ с (на последнем этапе шаг был уменьшен до $\Delta t_1 = 0,01$ с), при котором обеспечивалась необходимая терминальная точность $\left\| \mathbf{x}(t_1^*) - \mathbf{x}_1 \right\| \le \varepsilon,\quad \varepsilon = 0,02,$ и выполнялись все ограничения.

Результаты работы алгоритма приведены на рис. 1 и 2. На рис. 1 отображены графики координат состояния и управления для промежуточного времени $t_1(7) = 0,7$ с (время меньше минимально необходимого). Здесь число итераций для нахождения оптимального решения $N_{\text{iter}} = 203,$ значение целевой функции $z^*(7) = 0,453.$ На рис. 2 представлены графики координат состояния и управления для оптимального времени $t_1^* = 1,25$ с. Здесь число шагов дискретизации $N = 120$, число итераций для нахождения оптимального решения $N_{\text{iter}} = 295,$ значение целевой функции $z^* = 0,0145.$

Отметим, что движение по границе $x_1(t) = x_1^- = -0,5$ осуществляется непрерывно изменяющемся управлением, на остальных участках управление почти всюду принимает предельные значения.

Заключение. Моделирование задачи линейного программирования с помощью симплекс-метода показало, что если не стремится к чрезмерной *по времени* точности перевода в терминальную точку, то 30…60 точек дискретизации вполне достаточно. Предложенный алгоритм можно с успехом применять для решения практических задач.

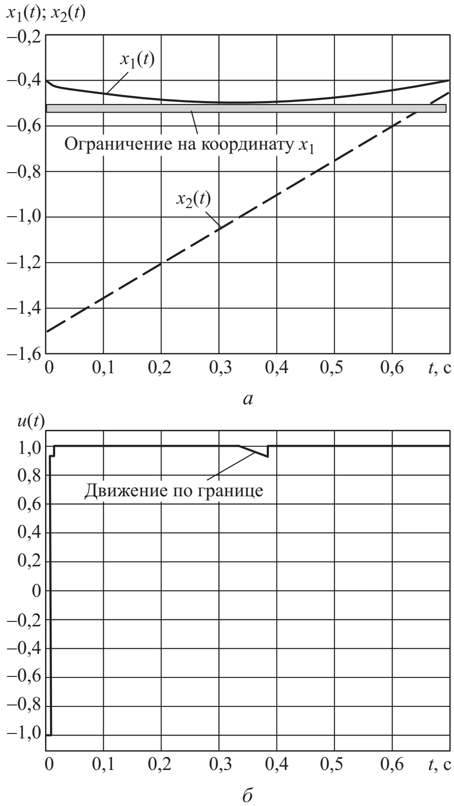

Рис. 1. Графики координат состояния (*а*) и управления (*б*) для промежуточного времени $t_1(7) = 0,7$ с (время меньше минимально необходимого)

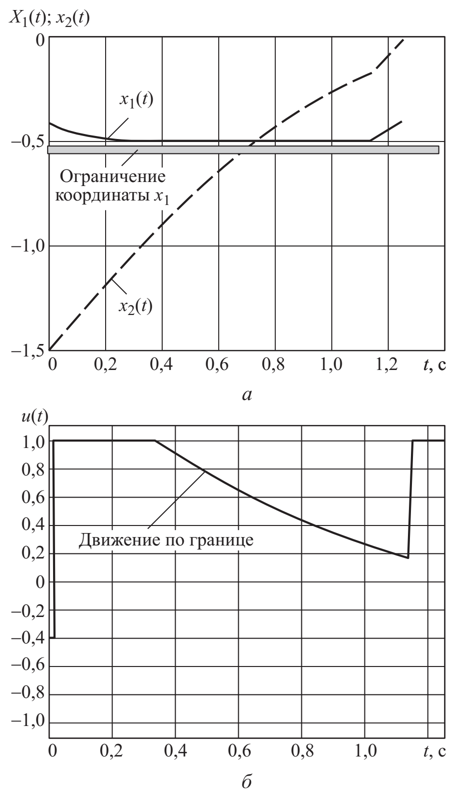

Рис. 2. Графики координат состояния (*а*) и управления (*б*) для оптимального времени $t_1^* = 1,25$ с

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гамкрелидзе Р.В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. *Известия АН СССР. Сер. Математика*, 1960, № 3, с. 315–356.

[2] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, 1968, т. 8, № 4, с. 725–779.

[3] Пупков К.А., Фалдин Н.В., Егупов Н.Д. *Методы синтеза оптимальных систем автоматического управления*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000, 512 с.

[4] Buskens C., Maurer H. SQR-methods for solving optimal control problems with state and control constraints: adjoin variables, sensitivity analysis and real time control. *J. of Comput.&Appl. Math.*, 2000, vol. 120, no. 1–2, pp. 85–108.

[5] Teo K.L., Goh C.J.,Wong K.H. *A unified computational approach for optimal control problems*. New York: Longman Scientific and Technical, 1991, 267 p.

[6] Xing A.Q. The exact penalty function method in constrained optimal control problems. *J. of Math. Analysis & Appl.,*1984, vol. 186, pp. 514–522.

[7] Баландин Д.В., Коган М.М. Линейные матричные неравенства в синтезе регуляторов при ограничениях на управление и фазовые координаты. *Труды VIII Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'09* (*Москва, 26–30 января 2009 г.*), 2009, с. 31–34.

[8] Blanchini F. Non-quadratic Lyapunov functions for robust control. *Automatica*, 1995, no. 31, pp. 451–461.

[9] Таха Х. *Введение в исследование операций.* 7-е изд. Москва, Изд. дом «Вильямс», 2005, 912 с.

Статья поступила в редакцию 03.04.2014.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Краснощенко В.И. Симплекс-метод решения задачи быстродействия при наличии ограничения на скалярное управление и фазовых ограничений. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 6. URL: http:// engjournal.ru/catalog/it/asu/1252.html

Краснощеченко Владимир Иванович родился в 1953 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1981 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: синтез регуляторов; нелинейные системы; дифференциальная геометрия, топология и теория непрерывных групп в задачах управления; оптимальное управление; синтез наблюдателей. e-mail: kviip@yandex.ru

Simplex method for solving the brachistochrone problem at state and control constraints

© V.I. Krasnoshchechenko

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia

In this paper we consider the solution of the brachistochrone problem for linear time invariant objects with the scalar constrained control and state parallelepiped constraints. In the given algorithm we employ the transition from the brachistochrone problem to a problem of linear programming which is solved by the simplex method. The proposed method belongs to the group of control parameterization methods.

Keywords: *brachistochrone problem, state constraints, state constraint, linear programming, simplex method.*

REFERENCES

[1] Gamkrelidze R.V. *Izvestiya AN SSSR — Proc. Acad. Sci. USSR*., 1960, no. 3, pp. 315–356.
[2] Dubovitsky A.Ya., Milyutin A.A. *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki — Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics,* 1968, vol. 8, no. 4, pp. 725–779.
[3] Pupkov K.A., Faldin N.V., Egupov N.D. *Metody sinteza optimal'nykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Methods for the synthesis of optimal automatic control systems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2000, 512 p.
[4] Buskens C., Maurer H. *J. of Comput.&Appl. Math*., 2000, vol. 120, no. 1–2, pp. 85–108.
[5] Teo K.L., Goh C.J.,Wong K.H. *A unified computational approach for optimal control problems*. New York: Longman Scientific and Technical, 1991, 267 p.
[6] Xing A.Q. *J. of Math. Analysis & Appl.*,1984, vol. 186, pp. 514–522.
[7] Balandin D.V., Kogan M.M. Lineinye matrichnye neravenstva v sinteze regulyatorov pri ogranicheniyakh na upravlenie i fazovye koordinaty [Linear matrix inequalities in the synthesis of regulators with restrictions on the control and phase coordinates].*Trudy VIII Mezhdunarodnoi konferentsii "Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya" SICPRO'09* (*Moskva, 26–30 yanvarya 2009 g.*) [Proceed. of the VIII Intern. Conf. "System Identification and Control Problems" SICPRO'09 (Moscow, 26–30 Jan. 2009)], 2009, pp. 31–34.
[8] Blanchini F. *Automatica*, 1995, no 31, pp. 451–461.
[9] Taha H.A. *Operations Research: An Introduction*. 7th Ed. New Jersey, Pearson Education Inc., 2003, 905 p.

Krasnoschechenko V.I. (b.1953) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1981. Ph.D., Assoc. Professor of the Automatic Control Systems Department, Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. Research interests include synthesis of regulators; nonlinear systems; differential geometry, topology, and the theory of continuous groups in control; optimal control; synthesis of observers.
e-mail: kviip@yandex.ru