

## Оценка приближенных математических моделей для нахождения параметров процесса растворения

© Т.С. Китаева

КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калуга, 248000, Россия

*Рассмотрена проблема подземного растворения солей. Выделены основные подходы: задача с краевыми условиями на границе камеры растворения, аналитический метод, полумэмпирический метод. Принято, что все процессы протекают в изотермических условиях.*

**Ключевые слова:** *растворение, математическое моделирование, краевые задачи, параметры растворения, пограничный слой.*

Практические задачи растворения солей через скважины требуют получения зависимости выходной концентрации добываемого соляного раствора и формообразования камеры растворения от горно-геологических и технологических факторов.

Подземный участок технологического процесса условно рассматривают как некий объект, о внутренней структуре и взаимосвязях которого мало известно. Измерения показателей непосредственно в активной зоне камеры невозможны по техническим или экономическим причинам.

Отмеченные особенности процессов подземного растворения солей заставляют дополнять их комплексом исследований на основе математического моделирования. Математическое описание геотехнологических процессов базируется на уравнениях конвективной диффузии Навье — Стокса и турбулентного течения, причем значительное внимание уделяется обоснованию корректности вводимых допущений. В результате оно сводится к системе дифференциальных уравнений второго порядка, которые оказываются нелинейными. Кроме того, они многомерны и могут быть рассмотрены как задачи с граничными условиями, наибольший интерес из которых представляют условия на границе камеры. Решение подобных краевых задач аналитическими методами практически невозможно, а их упрощение связано с существенными допущениями относительно реальных процессов, большая часть из которых не может быть проверена. Поэтому приходится ограничиваться приближенными оценками, сводя решение общей проблемы к ряду частных задач, поддающихся решению аналитически на аналоговых или цифровых ЭВМ, что позволяет рассчитать отдельные параметры процессов или установить однозначную связь между ними.

В связи с этим можно выделить несколько подходов в решении указанной проблемы. Например, исходное математическое описание процессов растворения в камере дополнительно упрощается путем разделения всей области течения раствора на центральную зону и турбулентный, естественно-конвективный пограничный слой [1]. Центральная зона рассматривается как идеальная жидкость, в которой диффузионный перенос вещества пренебрежимо мал по сравнению с конвективным. В свою очередь, центральная зона подразделяется на зону интенсивного перемешивания раствора, для которой используется модель полного смешения, и область, где существенна плотностная стратификация раствора. Для этой последней области используют модели идеального вытеснения, причем предполагают, что при малых скоростях движения раствора в этой области изменение концентрации по радиусу незначительно.

Для пограничного слоя с учетом порядка величин отдельных членов уравнений Навье — Стокса и конвективной диффузии для осесимметричной геометрии течения используют уравнение сохранения количества движения и интегральное уравнение конвективной диффузии, выражающее материальный баланс по соли для элемента динамического пограничного слоя толщиной  $\delta$ :

$$\frac{d \int_0^{\delta} v_x dy}{dx} = \alpha q \sin \theta \int_0^{\delta} (C - C_0) dy - \frac{\tau_{\omega}}{\rho_0}; \quad (1)$$

$$\frac{dR \int_0^{\delta} v_x (C - C_0) dy}{dx} = \omega(C_0, \theta) - \beta(\bar{C} - C_0)R - \int_0^{\delta} v_x dy R \frac{dC_0}{dx},$$

где  $v_x$  — скорость движения раствора в пограничном слое;  $x, y$  — координата вдоль и перпендикулярно поверхности растворения соответственно;  $\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dc}$  при  $C = C_0$ ;  $\rho_0, \rho$  — плотность раствора в пограничном слое и в объеме;  $q$  — количество соли в пограничном слое;  $\theta$  — угол наклона растворяющейся поверхности;  $C, C_0$  — концентрация раствора в пограничном слое и окружающем растворе соответственно;  $\tau_{\omega}$  — касательное напряжение по стенке;  $\omega(C_0, \theta) = K(C_0, \theta)(C_H - C_0)$  — скорость растворения;  $K$  — коэффициент;  $C_H$  — концентрация насыщения;  $\beta$  — коэффициент массоотдачи к поверхности от пограничного слоя в окружающий раствор;  $\bar{C}$  — средняя концентрация раствора в ограниченном слое;  $R$  — радиус камеры растворения.

Так, уравнение материального баланса учитывает перенос соли от пограничного слоя в центральную зону, а также вертикальный градиент концентрации в окружающем растворе. Полученная система уравнений приводится к системе дифференциальных уравнений для расчета течения во всей области раствора, включая пограничный слой и центральную зону, причем значения ряда коэффициентов, таких как  $\beta$  и  $\tau_{\omega}$ , устанавливают дополнительно с помощью специальных экспериментов.

Еще одним примером приближенной математической модели является метод растворения отдельной ступени [2]. В данном случае рассматривают следующие потоки: входящий в зону потолка камеры со средней концентрацией  $C_1$  поток  $Q_1$ , припотолочный поток  $Q_2$  и поток, вызванный стеканием пограничного слоя с боковой поверхности ступени  $Q_4$ , причем

$$Q_2 = Q_4 + \frac{dV_1}{d\tau}; \quad Q_3 = Q_1 - Q_2, \quad (2)$$

где  $\frac{dV_1}{d\tau}$  — изменение объема  $V_1$  камеры вследствие растворения боковой поверхности ступени.

При этом вводят следующие допущения:

скорости растворения боковой и горизонтальной поверхности ступени равны и постоянны ( $\omega_6 = \omega_r = \text{const}$ ) до тех пор, пока  $Q_4 < Q_1$ ;

концентрация раствора, заполняющего область отработанной ступени, за пределами пограничного слоя остается постоянной и равной  $C_A$ ;

соль, перешедшая из твердой фазы в жидкую в процессе растворения, целиком находится в объеме текущего слоя:

$$Q_4 = 2\pi r \bar{V} \bar{\delta}, \quad (3)$$

где  $\bar{V}$ ,  $\bar{\delta}$  — средние скорость и толщина пограничного слоя.

В результате получают зависимости для изменения объема ступени после растворения боковой и горизонтальной поверхностей, а также текущие координаты точки ступени, выбранной на выступе:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{d\tau} &= \frac{2\pi r_0}{\gamma} \int_0^{h_0^*} \omega_6(h) dh; \\ \frac{dV_2}{d\tau} &= -\frac{2\pi}{\gamma} \int_0^R r \omega_r(r) dr; \end{aligned} \quad (4)$$

$$h_0^* = h_0 - \frac{1}{\gamma} \int_{r_0}^R r \omega_r(r) dr; \quad (4)$$

$$r_0^* = r_0 + \frac{\omega_6(h)}{\gamma} \tau,$$

где  $h_0, r_0$  — начальная высота и радиус ступени, при этом такие зависимости, как  $\omega_r = f(r)$ ,  $\omega_6 = f(h)$  должны быть получены экспериментально.

Вопрос о том, каких размеров должна быть камера, чтобы с заданной производительностью получать соляной раствор кондиционной концентрации, является наиболее сложным и решают его по-разному. Например, аналитическим решением для концентрации растворителя в камере конической формы с допущением, что перешедшая в раствор соль равномерно распределена по всему объему камеры [3].

Исходное уравнение имеет вид

$$dq = \bar{\omega} S d\tau, \quad (5)$$

где  $dq$  — количество соли, растворяющейся за время  $d\tau$  с поверхности  $S$ ,  $dq = V d\bar{C}$ .

Полагая, что объем  $V$  и поверхность  $S$  независимы от времени  $\tau$  и средней концентрации  $\bar{C}$ , интегрируя выражение

$$d\bar{C} = \frac{dq}{V} = \frac{\bar{\omega} S d\tau}{V}, \quad (6)$$

при условии, что  $\bar{C} = C_0$  при  $\tau = \tau_0$ , получим

$$\bar{C} = C_n - (C_n - C_0) e^{-\frac{KS}{V}(\tau - \tau_0)}, \quad (7)$$

где  $KS = \sum_{i=1}^n K_{\varphi_i} S_{\varphi_i}$ ;  $K_{\varphi_i}$  — коэффициент скорости растворения  $i$ -го

элемента поверхности камеры, имеющего угол наклона к горизонту  $\varphi_i$ ;  $S_{\varphi_i}$  — площадь  $i$ -го элемента поверхности камеры с наклоном к горизонту под углом  $\varphi_i$ . В связи с существенными упрощениями зависимость (7) не отражает влияния на концентрацию ряда важных факторов. Кроме того, из нее вытекает невозможность достижения концентрации насыщения, что противоречит данным практики. Необходимость определения локальных значений  $K_{\varphi_i}$  и  $S_{\varphi_i}$  значительно затрудняет использование этой зависимости, которая дает лишь среднюю концентрацию, тогда как практический интерес представляет распределение концентрации по высоте камеры.

Другой подход к решению этой задачи с теми же исходными уравнениями заключается в том, что процесс насыщения в камере рассматривают по схеме идеального вытеснения [4]. Концентрация каждого из  $n$  слоев объемом  $V$ , радиусом  $R$  и высотой  $h$ , на которые условно разделена камера, зависит от времени пребывания его в камере. При этом каждый слой, представляющий собой усеченный конус, насыщался через боковые поверхности и основания. Зависимость площади боковой поверхности от времени обработки слоя выражается формулой

$$S = \frac{\pi R^2}{(V/Q)^{2/3} \sin \alpha} \left[ \left( \frac{V}{Q} + a - \tau \right)^{2/3} - \left( \frac{V}{Q} - \tau \right)^{2/3} \right], \quad (8)$$

где  $a = 1$  ч.

Решая совместно систему уравнений (6) и (8), а также интегрируя левую и правую части полученного выражения от 0 до  $S$  и от 0 до  $\tau$ , с учетом, что  $Q = V/\alpha$ , а показатель экспоненты равен  $KS\alpha$ , получаем

$$C = C_n \left( 1 - e^{-KS/Q} \right). \quad (9)$$

Наиболее полные уравнения, выражающие материальный баланс по соли и по раствору в рамках модели идеального вытеснения в продольном направлении и смещения в поперечном, имеют вид

$$\begin{aligned} QCd\tau + \omega dSd\tau - \frac{\omega dS}{\gamma} Cd\tau - (Q + dQ)(C + dC)d\tau &= 0; \\ Qd\tau + \omega dSd\tau - \frac{\omega dS}{\gamma} \rho d\tau - (Q + dQ)(\rho + d\rho)d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразовав выражения (10) и выражения концентрации как функции плотности, а скорости растворения — как функции концентрации, получаем систему уравнений, описывающих распределение концентрации вдоль боковой поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{d(QC)}{dS} &= \frac{\omega(\gamma - C)}{\gamma}; \quad \frac{d(Q\rho)}{dS} = \frac{\omega(\gamma - \rho)}{\gamma}; \\ \omega &= K(1 - \chi)(C_n - C); \quad C = \beta\rho \ln(\rho - \rho_0); \\ Q &= Q_0; \quad C = C_0; \quad \rho = \rho_0 \quad \text{при } S = S_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\chi$  — коэффициент, зависящий от примесей;  $\beta$  — постоянный коэффициент, зависящий от температуры.

Аналитического решения системы (11) не получено. Введение дополнительных упрощений приводит к зависимости, аналогичной выражению (7).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Каплуков Д.Р., Калмыков В.Н., Рыльникова М.В. *Комбинированная геотехнология*. Москва, Руда и металлы, 2003.
- [2] Глухов Б.П. *Исследование структуры гидродинамических потоков в камере при подземном растворении залежей каменной соли. Труды ВНИИГ*. Москва, Недра, 1989.
- [3] Арен В.Ж. *Физико-химическая геотехнология*. Москва, Изд-во МГТУ, Сер. Высшее горное образование, 2001.
- [4] Хчеян Г.Х., Нафтулин И.С. *Геотехнологические процессы добычи полезных ископаемых*. Москва, Недра, 1993.

Статья поступила в редакцию 03.04.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Китаева Т.С. Оценка приближенных математических моделей для нахождения параметров процесса растворения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/1250.html>

**Китаева Тамара Сергеевна** родилась в 1949 г., окончила ГГУ им. Н.И. Лобачевского в 1972 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Физика» КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [tamara.kitaeva.49@mail.ru](mailto:tamara.kitaeva.49@mail.ru)

## Estimating approximate mathematical models for finding the parameters of the dissolution process

© T.S. Kitaeva

Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248000, Russia

*The article delves into the problem of underground salt dissolution. We employed the basic approaches: the problem with the boundary conditions at the border of the dilution chamber, analytical method, a semi-empirical method. All of the above approaches refer to the processes occurring under isothermal conditions.*

**Keywords:** *dissolution, mathematical modeling, boundary value problems, parameters of dissolution, the boundary layer.*

### REFERENCES

- [1] Kaplukov D.R., Kalmykov V.N., Rylnikov M.V. *Kombinirovannaya geotekhnologiya* [Combined geotechnology]. Moscow, Ore&Metals Publ., 2003.
- [2] Glukhov B.P. *Issledovanie struktury gidrodinamicheskikh potokov v kamere pri podzemnom rastvorenii zalezhei kamennoi soli* [Investigation of the structure of hydrodynamic flows in an underground chamber by dissolving rock salt deposits]. *Trudy VNIIG* [Proc. of the Russian Research Institute]. Iss. 56, Moscow, Nedra Publ., 1989.
- [3] Aren V.Zh. *Fiziko-khimicheskaya geotekhnologiya* [Physico-chemical technology]. Moscow, MGGU Publ., Series Higher mining education, 2001.
- [4] Khcheyan G.Kh., Naftulin I.S., Glukhov B.P. *Geotekhnologicheskie protsessy dobychi poleznykh iskopaemykh* [Geotechnological processes for mining operations]. Moscow, Nedra Publ., 2003.

**Kitaeva T.S.** (b. 1949) graduated from Gorky State University. Ph.D., Assoc. Professor of the Physics Department, Kaluga Branch of Bauman Moscow State Technical University. Research interests include the dissolution of underground salt, control of process parameters. e-mail: tamara.kitaeva.49@mail.ru