

## Математическое моделирование отрывного дозвукового обтекания осесимметричных тел с учетом донного давления

© В.Н.Тимофеев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Представлены результаты математического моделирования процесса отрывного обтекания осесимметричных тел на базе концепции вязко-невязкого взаимодействия. Были рассмотрены умеренные дозвуковые скорости потока газа. Численное моделирование процесса обтекания тел осуществлено методом дискретных вихрей. Для более полного учета влияния донного давления была применена формула Хорнера. Изучались режимы течения с линией отрыва потока, близкой к контуру донного среза. Рассмотрены цилиндрические тела с головной частью оживальной формы без хвостовой части. По результатам математического моделирования предложены зависимости длины хвостового участка эквивалентного тела от числа Рейнольдса и длины обтекаемого тела. Представленные в работе зависимости позволяют построить относительно несложную замкнутую методику расчета отрывного дозвукового обтекания тел с учетом влияния донного давления.*

**Ключевые слова:** дозвуковое отрывное обтекание, математическое моделирование, метод дискретных вихрей, донное давление.

**Введение.** На базе концепции вязко-невязкого взаимодействия в работе [1] сформулированы основные положения методики математического моделирования обтекания тел с отрывом дозвукового потока в донной области. Указанная методика позволяет проводить оперативный анализ распределения давления на поверхности обтекаемого тела в случаях, когда линия отрыва близка к контуру донного среза. Составной частью методики математического моделирования является численное моделирование невязкого обтекания тел.

Сферу применения методики математического моделирования отрывного обтекания тел можно существенно расширить, если учесть донное давление, которое зависит от формы и геометрических параметров обтекаемого тела и от режимов течения в пограничном слое, а следовательно, от чисел Маха и Рейнольдса. На основании именно такого подхода и в дополнение к полученным ранее результатам [2] после проведенной работы были предложены зависимости, которые позволили построить замкнутую и относительно несложную методику расчета отрывного дозвукового обтекания тел с учетом влияния донного давления. Эти зависимости найдены с помощью сочетания численного и физического моделирования.

Для целостности восприятия ниже представлены основные положения и наиболее важные расчетные соотношения работ [1, 2], на основании которых строилось дальнейшее исследование.

Согласно теории пограничного слоя, давление в произвольной точке поверхности  $\Sigma_0$  обтекаемого тела вплоть до линии отрыва можно считать равным давлению в соответствующей точке поверхности  $\Sigma_1$ , смещенной на малую толщину вытеснения  $\delta^*$  по нормали к  $\Sigma_0$ .

В соответствии с концепцией вязко-невязкого взаимодействия [3] поверхность  $\Sigma_1$  за линией отрыва потока дополняется поверхностью  $\Sigma_2$ , моделирующей спутный след. В совокупности эти поверхности образуют поверхность  $\Sigma$  эквивалентного тела, называемого также телом вытеснения. Поверхность  $\Sigma_1$  составляет переднюю часть эквивалентного тела, а поверхность  $\Sigma_2$  — его заднюю часть. Кроме того, давление на поверхности  $\Sigma_0$  обтекаемого тела следует находить из расчета обтекания поверхности  $\Sigma$  эквивалентного тела невязким потоком жидкости или газа. Ориентируясь на изучение в перспективе обтекания тел сложной геометрической формы при ненулевых углах атаки и скольжения, в настоящей работе выполняли численное моделирование невязкого обтекания поверхности эквивалентного тела.

Придерживаясь подхода, заключающегося в отказе от сложного расчетного итерационного построения эквивалентного тела, при определении его поверхности имели в виду следующие соображения. Поправку на малую толщину вытеснения  $\delta^*$  не учитывали и для режимов течения с линией отрыва потока, близкой к контуру донного среза, поверхность  $\Sigma_1$  передней части эквивалентного тела считали совпадающей с поверхностью  $\Sigma_0$  обтекаемого тела. Форму поверхности  $\Sigma_2$  задней части эквивалентного тела выбирали в соответствии с рекомендациями, изложенными в работе [2]. А именно, предполагали, что нормаль к поверхности эквивалентного тела при переходе через линию отрыва потока изменяется непрерывным образом, т. е. отсутствует излом поверхности эквивалентного тела в окрестности донного среза. Считали, что если спереди к линии отрыва потока примыкает сужающийся или цилиндрический участок эквивалентного тела, то и хвостовой участок поверхности эквивалентного тела должен быть сужающимся или, по крайней мере, нерасширяющимся. Для осесимметричного обтекания тел, не имеющих сужающихся или расширяющихся хвостовых частей,

конфигурацию хвостового участка эквивалентного тела выбирали в виде сужающейся оживальной поверхности.

Для получения зависимости длины заднего участка эквивалентного тела от числа Рейнольдса, а также от длин головной и цилиндрической частей обтекаемого тела была использована формула Хорнера [4]. Такой подход дал возможность построить относительно несложную замкнутую методику расчета отрывного дозвукового обтекания тел с учетом влияния донного давления.

**Математическая модель и алгоритм решения.** Были рассмотрены умеренные дозвуковые скорости набегающего потока воздуха или газа, среду считали несжимаемой, однородной и невесомой жидкостью, а ее движение — баротропным. В декартовой системе координат, связанной с обтекаемым телом, поведение среды описывается замкнутой системой, включающей уравнение неразрывности и уравнения движения в форме Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u, v, w$  — координаты вектора скорости  $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ , определяемые в декартовой системе координат;  $\rho$  и  $p$  — плотность и статическое давление.

На поверхности эквивалентного тела требовалось выполнение граничного условия непротекания, т. е. равенства нулю нормальной составляющей вектора скорости потока:

$$V_n(M_0)|_{\Sigma} = 0$$

или равносильного соотношения

$$\vec{V}(M_0)\vec{n}(M_0)|_{\Sigma} = 0, \quad (2)$$

где  $M_0$  — произвольная точка на поверхности  $\Sigma$  с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ ;  $\vec{n}(M_0)|_{\Sigma}$  — орт вектора нормали к указанной поверхности, проведенный в точке  $M_0$ .

В соответствии с граничным условием затухания возмущений на бесконечности (при  $M_0 \rightarrow \infty$ ) вектор скорости  $\bar{V}(M_0)$  должен стремиться к вектору скорости набегающего потока

$$V = u_\infty \bar{i} + v_\infty \bar{j} + w_\infty \bar{k},$$

где  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — векторы декартова базиса. Предполагалось, что всюду вне поверхности эквивалентного тела течение потенциальное. Для вектора возмущенной скорости, равного разности  $\bar{V}(M_0) - \bar{V}_\infty$ , был введен в рассмотрение потенциал  $\varphi(M_0)$  возмущенных скоростей, при этом скорость потока вычисляли по формуле

$$\bar{V}(M_0) = \bar{V}_\infty + \nabla \varphi(M_0), \quad (3)$$

где  $\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x_0} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y_0} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z_0}$  — оператор Гамильтона [5];

$\nabla \varphi(M_0) = \text{grad } \varphi$  — градиент потенциала возмущенных скоростей.

При сделанных предположениях для установившихся движений среды справедлив интеграл Бернулли, поэтому статическое давление определяли вслед за нахождением модуля вектора скорости. После подстановки выражения, равного правой части уравнения (3), в первое уравнение системы (1), которое записывали в виде  $\text{div } \bar{V} = 0$ , получали соотношение  $\text{div grad } \varphi = 0$ , представляющее собой уравнение Лапласа относительно потенциала возмущенных скоростей:  $\Delta \varphi = 0$ , где  $\Delta = \partial^2 / \partial x_0^2 + \partial^2 / \partial y_0^2 + \partial^2 / \partial z_0^2$  — оператор Лапласа.

После подстановки указанного выражения в условие непротекания (2) из равенства

$$((\bar{V}_\infty + \text{grad } \varphi) \cdot \bar{n}(M_0))|_\Sigma = 0$$

с учетом взаимосвязи между градиентом и производной по направлению нормали

$$(\text{grad } \varphi \cdot \bar{n}(M_0))|_\Sigma = \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial n} \Big|_\Sigma$$

было сформулировано граничное условие для уравнения Лапласа, определяющее нормальную производную потенциала возмущенных скоростей:

$$\frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial n} \Big|_\Sigma = -\bar{V}_\infty \cdot \bar{n}(M_0) \Big|_\Sigma. \quad (4)$$

Граничное условие непротекания, записанное в форме (4), в совокупности с граничными условиями затухания возмущений на бесконечности дало возможность заключить, что потенциал возмущенных скоростей  $\varphi(M_0)$  должен являться решением внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi(M_0 = 0); \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial n} \right|_{\Sigma} = -V_{\infty} \cdot \bar{n}(M_0) \Big|_{\Sigma}; \quad (6)$$

$$\varphi(M_0) \rightarrow 0, M_0 \rightarrow \infty; \quad (7)$$

$$\nabla\varphi(M_0) \rightarrow 0, M_0 \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Внешняя задача Неймана имеет единственное решение, которое представляется в виде потенциала двойного слоя:

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\bar{r} \cdot \bar{n}(M)}{r^3} g(M) d\Sigma, \quad (9)$$

где  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  — точка, в которой вычисляются потенциал возмущенных скоростей и скорость потока;  $M(x, y, z)$  — точка, расположенная на элементе площади  $d\Sigma$ ;  $\bar{n}(M)$  — орт вектора нормали к поверхности  $\Sigma$ , проведенный в точке  $M$ ;  $g(M)$  — поверхностная плотность потенциала двойного слоя;  $\bar{r}$  — вектор, направленный из точки  $M$  в точку  $M_0$ ;  $r$  — модуль указанного вектора, вычисляемый по формуле

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Потенциал двойного слоя (9) является решением уравнения Лапласа (5) и удовлетворяет граничным условиям (7), (8) затухания возмущений на бесконечности. Граничное условие непротекания (6) будет выполнено и потенциал двойного слоя станет решением внешней задачи Неймана, если поверхностная плотность  $g(M)$  будет решением интегрального уравнения [6]:

$$\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Sigma} \left( \frac{\bar{r} \cdot \bar{n}(M)}{r^3} \right) g(M) d\Sigma \right) \Bigg|_{M_0} = -\bar{V}_{\infty} \cdot \bar{n}(M_0),$$

где  $M_0$  — текущая точка на поверхности  $\Sigma$ , а нормальную производную  $\partial/\partial_n$  следует понимать в смысле, определенном, например, в работе [7].

Поверхностную плотность потенциала двойного слоя находили с помощью численного моделирования. Предпочтение было отдано методу дискретных вихрей [8]. Поверхность эквивалентного тела аппроксимировали конечным числом панелей, представляющих собой многоугольники  $\Sigma_k$ ,  $k=1, \dots, N$  (здесь  $N$  — общее число панелей, которые аппроксимируют поверхность  $\Sigma$ ). На каждой панели поверхностную плотность потенциала двойного слоя  $g(M)$  считали постоянной и на многоугольнике  $\Sigma_k$  ее обозначали как  $g_k$ ,  $k=1, \dots, N$ .

Свойства аддитивности и линейности поверхностного интеграла и свойство линейности градиента позволили представить формулу для вычисления потенциала возмущенных скоростей в следующем виде:

$$\varphi(M_0) = \sum_{k=1}^N g_k \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_k} \frac{\bar{r} \cdot \bar{n}(M)}{r^3} d\Sigma,$$

а формулу для вычисления скорости потока как

$$\bar{V}(M_0) = \bar{V}_\infty + \sum_{k=1}^N g_k \left( \frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\Sigma_k} \frac{\bar{r} \cdot \bar{n}(M)}{r^3} d\Sigma \right). \quad (10)$$

Градиент потенциала двойного слоя, размещенного на панели  $\Sigma_k$  с постоянной поверхностной плотностью  $g_k$ , равен скорости, индуцированной замкнутой вихревой нитью  $L_k$ , расположенной на границе  $\partial\Sigma_k$  панели  $\Sigma_k$ , при условии, что циркуляция  $\Gamma_k$  этой вихревой нити, равна  $-g_k$ . С помощью формулы Био — Савара градиент потенциала двойного слоя панели  $\Sigma_k$  с постоянной поверхностной плотностью  $g_k$  был преобразован следующим образом:

$$\frac{g_k}{4\pi} \nabla \int_{\Sigma_k} \frac{\bar{r} \cdot \bar{n}(M)}{r^3} d\Sigma = \frac{\Gamma_k}{4\pi} \int_{L_k} \frac{d\bar{s} \times \bar{r}}{r^3}.$$

Для удобства записи и проведения расчетов в рассмотрение введен вектор, называемый вектором функции скорости и равный скорости, индуцированной  $k$ -й вихревой нитью  $L_k$  с единичной циркуляцией:

$$\bar{w}_k(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_k} \frac{d\bar{s} \times \bar{r}}{r^3}.$$

После выражения вектора функции скорости через поверхностный интеграл, определяющий градиент потенциала двойного слоя панели  $\Sigma_k$  в следующей форме:

$$\bar{w}_k(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\Sigma_k} \frac{\bar{r} \cdot \bar{n}(M)}{r^3} d\Sigma,$$

формулу (10) преобразовывали к виду, позволяющему применить метод дискретных вихрей [9]:

$$\bar{V}(M_0) = \bar{V}_\infty + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \bar{w}_k(M_0). \quad (11)$$

В соответствии с алгоритмами метода дискретных вихрей функцию скорости каждого вихревого многоугольника находили как сумму функций скорости составляющих его вихревых отрезков.

Для определения неизвестных циркуляций  $\Gamma_k$ ,  $k=1, \dots, N$ , граничные условия непротекания поверхности эквивалентного тела  $\Sigma$  удовлетворялись в контрольных точках  $C_v$ ,  $v=1, \dots, N$ , расположенных в геометрических центрах панелей ( $\Sigma_v$ ). Поскольку в контрольных точках нормальные производные потенциала двойного слоя непрерывны, с учетом соотношений

$$\frac{\partial \varphi(C_v)}{\partial n} = (\bar{V}(C_v) - \bar{V}_\infty) \cdot \bar{n}(C_v) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \bar{w}_k(C_v) \cdot \bar{n}(C_v)$$

граничное условие непротекания представляли в виде

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k (\bar{w}_k(C_v) \cdot \bar{n}(C_v)) = -\bar{V}_\infty \cdot \bar{n}(C_v), \quad v=1, \dots, N,$$

где  $\bar{n}(C_v)$  — орт вектора нормали к многоугольнику  $\Sigma_k$ , проведенный в контрольной точке  $C_v$ . В соответствии с последним равенством циркуляции  $\Gamma_k$  определяли из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^N a_{vk} \Gamma_k = b_v, \quad v=1, \dots, N, \quad (12)$$

в которой коэффициенты и правые части вычисляли следующим образом:

$$a_{vk} = \overline{w_k(C_v)} \cdot \overline{n(C_v)};$$

$$b_v = -\overline{V_\infty} \cdot \overline{n(C_v)}.$$

При проведении вычислений методом дискретных вихрей для замкнутых поверхностей матрица, составленная из коэффициентов  $a_{vk}$ , получилась вырожденной, поэтому систему (12) решали с использованием регуляризирующей переменной [6].

После нахождения неизвестных циркуляций  $\Gamma_k$  скорость потока в точках, находящихся вне поверхности тела, определяли из соотношения (11). В контрольных точках, лежащих на поверхности тела, учитывалось, что скорость как градиент потенциала двойного слоя испытывает разрыв:

$$\overline{\Delta V(C_v)} = \frac{\partial g(C_v)}{\partial \tau_1} \overline{\tau_1(C_v)} + \frac{\partial g(C_v)}{\partial \tau_2} \overline{\tau_2(C_v)}. \quad (13)$$

Здесь частные производные  $\frac{\partial g(C_v)}{\partial \tau_1}$  и  $\frac{\partial g(C_v)}{\partial \tau_2}$  следует вычислять по направлениям двух взаимно ортогональных ортов  $\overline{\tau_1(C_v)}$  и  $\overline{\tau_2(C_v)}$ , лежащих в касательной плоскости, проходящей через контрольную точку  $C_v$ . На каждой панели  $\Sigma_v$  поверхностная плотность  $g(C_v)$  была постоянной и равной  $-\Gamma_v$ , поэтому в формуле (13) частные производные определяли численным дифференцированием по значениям циркуляций  $v$ -го и соседних с ним вихревых многоугольников. После нахождения векторов  $\overline{\Delta V(C_v)}$  скорость потока в контрольных точках определяли как предельное значение градиента потенциала двойного слоя:

$$\overline{V}(C_v) = \overline{V_\infty} + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overline{w_k(C_v)} + \frac{1}{2} \overline{\Delta V(C_v)},$$

а статическое давление  $p$  находили из интеграла Бернулли:

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho_\infty (V_\infty^2 - V^2),$$

где  $V$  — модуль вектора скорости в рассматриваемой точке течения;  $V_\infty$  — модуль вектора скорости набегающего потока.

Безразмерные коэффициенты давления  $c_p = 2(p - p_\infty) / \rho_\infty V_\infty^2$  в соответствии с интегралом Бернулли рассчитывали по формуле

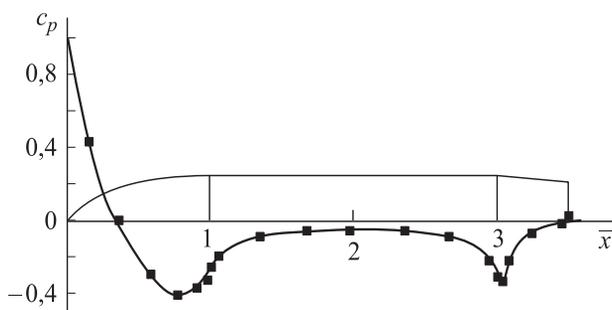
$$c_p = 1 - (V / V_\infty)^2. \quad (14)$$

**Результаты численных расчетов.** Обработка предложенной методики моделирования была проведена при изучении обтекания осесимметричных тел различной формы. Угол атаки был принят равным нулю, что давало возможность считать эквивалентное тело осесимметричным.

Для выявления особенностей расчетной схемы и отработки деталей алгоритма в работе [1] было проведено численное исследование обтекания цилиндрического тела, снабженного головной частью оживальной формы и хвостовой сужающейся частью конической формы. В качестве характерного линейного размера такого тела принят диаметр  $d$  миделевого сечения цилиндрической части. Длина головной оживальной части составляла  $d$ , средней цилиндрической —  $2d$ , а хвостовой части —  $0,5d$ . Полуугол сужения хвостовой конической части равнялся  $10^\circ$ . Сходимость алгоритма численного моделирования была проиллюстрирована на примере зависимости наибольшего по абсолютному значению разрежения  $c_{p\min}$ , наблюдаемого в области стыка оживального и цилиндрического участков обтекаемого тела, от суммарного числа панелей  $N$ , аппроксимирующих поверхность эквивалентного тела. Хорошее согласование расчетного распределения коэффициента давления  $c_p$  по поверхности оживально-цилиндрическо-конического тела с указанными геометрическими параметрами и экспериментальных данных работы [10] проиллюстрировано на рис. 1.

Для представляющих большой практический интерес осесимметричных тел, не имеющих сужающихся или расширяющихся хвостовых частей, на основе предложенной методики было проведено численное исследование распределения безразмерной скорости  $\bar{v} = v/V_\infty$  и коэффициента давления  $c_p$  по поверхности обтекаемого тела.

Анализ полученных результатов показал, что на большей части поверхности обтекаемого тела распределения безразмерной скорости и коэффициента давления слабо зави-

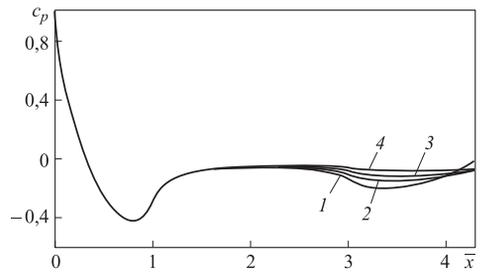
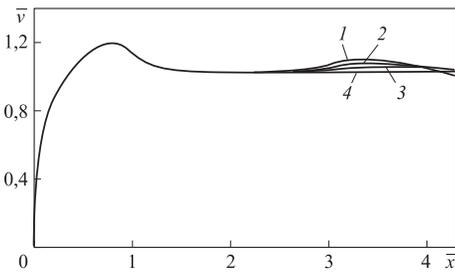


**Рис. 1.** Распределение коэффициента давления  $c_p$  вдоль образующей осесимметричного оживально-цилиндрическо-конического тела:

— — результаты численного моделирования;  
 ■ — экспериментальные данные

сят от длины  $l_{\text{сл}}$  задней части эквивалентного тела во всем исследованном диапазоне изменения этого параметра  $l_{\text{сл}} = 2d \dots 4d$ .

На рис. 2 и 3 представлены зависимости соответственно безразмерной скорости  $\bar{v} = v/V_\infty$  и коэффициента давления  $c_p$  на поверхности эквивалентного тела от безразмерной продольной координаты  $\bar{x} = x/d$  и длины  $l_{\text{сл}}$  хвостового участка эквивалентного тела.



**Рис. 2.** Зависимость безразмерной скорости  $\bar{v}$  на поверхности эквивалентного тела от безразмерной продольной координаты  $\bar{x}$  и длины  $l_{\text{сл}}$  хвостового участка эквивалентного тела:

$$l_{\text{сл}} = 2d (1); 2,5d (2); 3d (3); 4d (4)$$

**Рис. 3.** Распределение коэффициента давления  $c_p$  по образующей эквивалентного тела от безразмерной продольной координаты  $\bar{x}$  и длины  $l_{\text{сл}}$  хвостового участка эквивалентного тела:

$$l_{\text{сл}} = 2d (1); 2,5d (2); 3d (3); 4d (4)$$

Было установлено, что если длина хвостового участка эквивалентного тела превышает  $3,5d$ , то влияние параметра  $l_{\text{сл}}$  на распределение коэффициента давления проявляется лишь в окрестности донного среза.

В ряде случаев, например при нахождении силы лобового сопротивления, должно быть учтено донное давление, которое зависит от формы и геометрических параметров обтекаемого тела и от режимов течения в пограничном слое (от числа Рейнольдса). Определение донного давления и расчетным и экспериментальным путем — довольно сложная задача.

Предлагаемая методика моделирования станет полностью замкнутой, если удастся определить длину  $l_{\text{сл}}$  поверхности  $\Sigma_2$  задней части эквивалентного тела.

Первоначально (см. [2]) с этой целью были использованы экспериментальные данные, представленные в работе [9]. Для фюзеляжей с плоским донным срезом при числе Рейнольдса  $5 \cdot 10^6$  путем отбра-

сывания крайних представленных значений аэродинамического коэффициента донного сопротивления  $c_{x \text{ дон}}$ , лежащих в диапазоне 0,09...0,13, значение этого коэффициента было принято равным 0,1. Этому значению соответствовал коэффициент донного давления  $c_{p \text{ дон}} = 0,1$ . Из предположения о том, что отрыв потока происходит на линии донного среза, где коэффициент давления  $c_p$  равен коэффициенту донного давления  $c_{p \text{ дон}}$ , с использованием зависимостей  $c_p = c_p(\bar{x}, l_{\text{сл}})$ , аналогичных представленным на рис. 3, выбирали такую длину хвостового участка эквивалентного тела  $l_{\text{сл}}$ , при которой на донном срезе обтекаемого тела реализовалось бы равенство  $c_p = c_{p \text{ дон}}$ . В качестве примера для тела вращения с головной частью длиной  $d$  при изменении длины цилиндрического участка в пределах  $3d...5d$  было рекомендовано выбирать длину  $l_{\text{сл}}$  заднего участка эквивалентного тела  $2,3d...2,6d$ .

Такой подход позволяет получить приближенное решение задачи об отрывном дозвуковом обтекании тел, но не дает возможности установить зависимость донного давления от геометрических параметров обтекаемого тела и числа Рейнольдса.

Для более полного учета влияния донного давления и создания замкнутой расчетной методики предложено использовать формулу Хорнера [4]. Для осесимметрично обтекаемых тел, не имеющих хвостового участка, при допущении о совпадении линии отрыва потока с линией донного среза формула Хорнера будет иметь вид

$$c_{x \text{ дон}} = 0,015 \sqrt{d / (c_f (l_{\Gamma} + l_{\text{ц}}))},$$

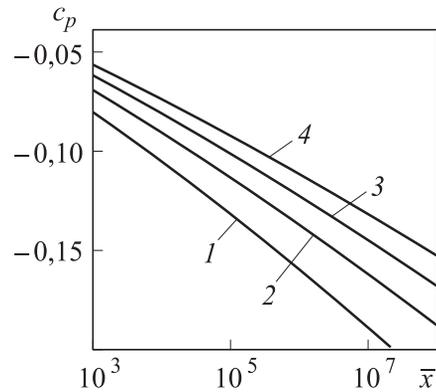
где  $c_{x \text{ дон}}$  — аэродинамический коэффициент донного сопротивления, обусловленный давлением, отнесенным к площади донного среза;  $d$  — диаметр миделевого сечения;  $c_f$  — коэффициент поверхностного трения плоской пластины в потоке несжимаемой среды, зависящий от числа Рейнольдса и координаты точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный  $l_{\Gamma}$ ;  $l_{\text{ц}}$  — длина соответственно головной и цилиндрической части обтекаемого тела.

В данной работе предполагалось, что режим течения в пограничном слое полностью турбулентный, поэтому коэффициент поверхностного трения вычисляли по формуле

$$c_f = 0,455 / (\lg \text{Re})^{2,58}, \quad (15)$$

где  $Re$  — число Рейнольдса, определяемое для полной длины обтекаемого тела.

Существенно, что значения аэродинамического коэффициента донного сопротивления, вычисленные по формуле Хорнера, хорошо согласуются с экспериментальными данными для фюзеляжей с плоским донным срезом при числах Рейнольдса  $5 \cdot 10^6$  и  $2 \cdot 10^7$  [8].



**Рис. 4.** Зависимость донного давления от геометрических параметров обтекаемого тела и числа Рейнольдса ( $l_T = d$ ):

$l_T = 3d$  (1);  $4d$  (2);  $5d$  (3);  $6d$  (4)

В силу допущения о совпадении линии отрыва потока с линией донного среза для осесимметрично обтекаемых тел, не содержащих хвостового участка, т. е. в случае, когда линия отрыва потока располагается на донном срезе цилиндрической части, коэффициент донного давления следует определять по формуле

$$c_{p \text{ дон}} = -c_{x \text{ дон}}$$

Таким образом, установлена следующая зависимость коэффициента донного давления от геометрических параметров обтекаемого тела и числа Рейнольдса:

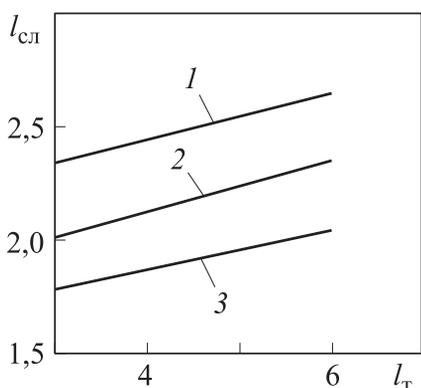
$$c_{p \text{ дон}} = 0,015 \sqrt{d / (c_f (l_T + l_{Ц}))}, \quad (16)$$

где коэффициент поверхностного трения необходимо вычислять по формуле (15).

Графическое изображение зависимости (16) для осесимметричного обтекания тел в случае, когда длина головной части  $l_2 = d$  фиксирована, а длина цилиндрической части варьируется в диапазоне  $l_{Ц} = (2 \dots 5)d$ , представлено на рис. 4 (в качестве параметра указана суммарная длина тела  $l_T = l_T + l_{Ц}$ ).

Зависимость донного давления от геометрических параметров обтекаемого тела и числа Рейнольдса устанавливали следующим образом. Фиксировали длину головной  $l_T$  и цилиндрической  $l_{Ц}$  частей обтекаемого тела и рассчитывали суммарную длину тела  $l_T = l_T + l_{Ц}$ . Затем выбирали текущее значение числа Рейнольдса  $Re$ . С помощью зависимости (16) определяли значение коэффициента донного давления  $c_{p \text{ дон}}$ , отвечающее выбранным значениям  $l_T$ ,  $l_{Ц}$ ,  $l_T$

и  $Re$ . В соответствии с предположением о том, что отрыв потока происходит на линии донного среза, оставалось найти такую длину  $l_{сл}$  хвостового участка эквивалентного тела, при которой на донном срезе обтекаемого тела коэффициент давления  $c_p$  был бы равен коэффициенту донного давления  $c_{p\text{дон}}$ . С этой целью осуществляли итерационный цикл расчетов, в котором варьировали длину  $l_{сл}$  заднего участка эквивалентного тела. В ходе выполнения итераций по соотношениям (11)–(14) для фиксированных значений  $l_T, l_{ц}, Re$  и варьируемых значений  $l_{сл}$  получали зависимости  $c_p = c_p(\bar{x}, l_{сл})$ , аналогичные представленным на рис. 3. Цикл завершался выбором такого значения длины  $l_{сл}$  хвостового участка эквивалентного тела, при которой на линии донного среза обтекаемого тела реализовалось равенство  $c_p = c_{p\text{дон}}$ .



**Рис. 5.** Зависимость длины  $l_{сл}$  хвостового участка эквивалентного тела от суммарной длины  $l_T$  обтекаемого тела и от числа Рейнольдса  $Re$  ( $l_T = d$ ):

$$Re = 10^6 (1); 5 \cdot 10^6 (2); 2 \cdot 10^7 (3)$$

в диапазоне  $l_{ц} = (2 \dots 5)d$ .

**Заключение.** Представленные в работе данные позволяют рекомендовать предложенную методику для расчета невязкого обтекания осесимметричных тел при решении задач пограничного слоя, при моделировании отрывного обтекания тел методами, основанными на концепции вязко-невязкого взаимодействия и для оперативного анализа распределения давления на поверхности обтекаемого тела в случаях, когда линия отрыва близка к линии донного среза. Зависимости длины хвостового участка эквивалентного тела от геометрических параметров

Таким образом, изменяя в пределах заданных диапазонов, а затем фиксируя значения  $l_T, l_{ц}$  и  $Re$ , удалось, применив описанный цикл, построить зависимость длины  $l_{сл}$  хвостового участка эквивалентного тела как от геометрических параметров обтекаемого тела, так и от числа Рейнольдса. В качестве примера на рис. 5 представлена зависимость  $l_{сл} = l_{сл}(l_T, Re)$  для случая осесимметричного обтекания тела с головной частью фиксированной длины  $l_T = d$  и цилиндрической частью, длина которой варьировалась в

обтекаемого тела и от числа Рейнольдса, полученные в данной работе, позволяют расширить сферу применения представленной методики математического моделирования и использовать ее при решении ряда важных прикладных задач, к числу которых относится, например, задача о нахождении силы лобового сопротивления тел при осесимметричном обтекании.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тимофеев В.Н., Бушуев А.Ю. Математическое моделирование обтекания тел с отрывом дозвукового потока в донной области. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 2. URL: <http://engjournal.ru/articles/59/59.pdf> (дата обращения 10.12.2014).
- [2] Тимофеев В.Н., Бушуев А.Ю. Численное моделирование дозвукового отрывного обтекания осесимметричных тел. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/967.html> (дата обращения 10.10.2014).
- [3] Гогиш А.В., Степанов Г.Ю. *Отрывные и кавитационные течения*. Москва, Наука, 1990, 384 с.
- [4] Hoerner, S.F. Base Drag and Thick Trailing Edges. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1950, vol. 17, no. 10, pp. 622–628.
- [5] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды*. Т. 1: *Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
- [6] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент*. Москва, ТОО «Янус», 1995, 520 с.
- [7] Соболев С.Л. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука, 1992, 432 с.
- [8] Белоцерковский С.М., Ништ Н.И. *Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью*. Москва, Наука, 1978, 352 с.
- [9] Чжен П. *Отрывные течения*. В 3 т. Москва, Мир, 1972.
- [10] Woodward F.A. *An Improved Method for the Aerodynamic Analysis of Wing-Body-Tail Configurations in Subsonic And Supersonic Flow*. Washington, 1973, NASA CR-2228, pp.1–130.

Статья поступила в редакцию 10.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тимофеев В.Н. Математическое моделирование отрывного дозвукового обтекания осесимметричных тел с учетом донного давления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 10.  
URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1246.html>

**Тимофеев Валерий Николаевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика». Автор более 40 научных и методических работ. Область научных интересов — математическое моделирование, численные методы, механика жидкости и газа, аэродинамика, методы оптимизации.  
e-mail: [v\\_n\\_1951@mail.ru](mailto:v_n_1951@mail.ru)

## Mathematical modeling of separated subsonic flow around axially symmetrical bodies with base pressure

© V.N. Timofeev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article describes mathematical modeling of the process of the flow separation on axially symmetrical bodies conducted on the base of the concept of viscous–inviscid interaction. Moderate subsonic speeds of the flow of gas were examined. The numerical modeling of the flow process around bodies was carried out by the method of discrete vortices. Hoerner's formula was used for a more complete account of the base pressure influence. We studied flow conditions with flow separation line close to the contour of the rear section. Cylindrical bodies with the head part of the ogival form and without the rear part were examined. The dependences of the length of the tailed section of equivalent body on Reynolds number and length of the body, streamlined with the gas flow, were proposed according to the results of mathematical modeling. The dependences represented in the work make it possible to build the locked and relatively simple procedure of calculation of the separated subsonic flow around bodies taking into account the influence of base pressure.*

**Keywords:** subsonic separated flow, mathematical modeling, method of discrete vortices, base pressure.

### REFERENCES

- [1] Timofeev V.N., Bushuev A.Yu. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2012, iss. 2. Available at: <http://engjournal.ru/articles/59/59.pdf>
- [2] Timofeev V.N., Bushuev A.Yu. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 9. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/967.html>
- [3] Gogish A.V., Stepanov G.Yu. *Otryvnye i kavitatsionnye techeniya* [Detachable and cavitation flows]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 384 p.
- [4] Hoerner, S.F. Base Drag and Thick Trailing Edges. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1950, vol. 17, no. 10, pp. 622–628.
- [5] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 1. Tenzorniy analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor Analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.
- [6] Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integralnykh uravneniy i chislennyi experiment* [The method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow, Yanus Publ., Ltd., 1995, 520 p.
- [7] Sobolev S.L. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1992, 432 p.
- [8] Belotserkovsky S.M., Nisht N.I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh krylyev idealnoy zhidkostyu* [Separated and unseparated flow around thin wings by an ideal fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 352 p.
- [9] Zheng P. *Separated flows*. In 3 vols. Moscow, Mir Publ., 1972. [In Russian].
- [10] Woodward F.A. *An Improved Method for the Aerodynamic Analysis of Wing-Body-Tail Configurations in Subsonic And Supersonic Flow*. Washington, 1973, NASA CR-2228, p.1–130.

**Timofeev V.N.**, Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 40 scientific and methodical works. Research interests include mathematical modeling, numerical methods, mechanics of fluids, aerodynamics. e-mail: v\_n\_1951@mail.ru