УДК 514.8

Поле электромагнитного узла и метрика Спарлинга – Тода

© В.Н. Тришин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрены явные антисамодуальные решения комплексных уравнений Эйнштейна на основе изотропных решений действительных уравнений Максвелла в вакууме. Показано, что решению уравнений Максвелла, описывающему поле электромагнитного узла, соответствует известная метрика Спарлинга – Тода.

***Ключевые слова**: антисамодуальные решения, уравнения Эйнштейна, электромагнитный узел, изотропное поле Максвелла.*

Введение. В настоящей работе рассмотрены антисамодуальные решения комплексных уравнений Эйнштейна, принадлежащие классу Керра – Шилда. Известно [1], что такие решения локально могут быть получены из изотропных решений действительных уравнений Максвелла в плоском пространстве.

Пусть M – комплексное четырехмерное многообразие с координатами (x, y, w, z). Используя спинорный формализм абстрактных индексов [2], записываем координаты в виде

$$X^{AA'} = \begin{pmatrix} y & w \\ -x & z \end{pmatrix} = \left(x^A, w^A\right), \tag{1}$$

где $x^A = X^{A0'} = (y, -x), \quad w^A = X^{A1'} = (w, z)$.

Индексы, принимающие значения 0,1, опускаются $\left(x_B = x^A \varepsilon_{AB}\right)$ и поднимаются $\left(x^A = \varepsilon^{AB} x_B\right)$ с помощью антисимметричного спин-тензора $\varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA}$.

Вакуумные уравнения Эйнштейна приводят к условиям

$$\Phi_{ABA'B'} = 0, \quad R = 0, \tag{2}$$

где $\Phi_{ABA'B'}$ – спинор Риччи; R – скалярная кривизна.

Условие антисамодуальности конформной кривизны имеет вид

$$\Psi_{A'B'C'D'} = 0, \tag{3}$$

где $\Psi_{A'B'C'D'}$ – самодуальный спинор Вейля.

Таким образом, тензор кривизны принимает вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Psi_{ABCD}\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'}. \quad (4)$$

Метрику антисамодуального многообразия Эйнштейна в координатах (x, y, w, z), удовлетворяющую условиям (2) и (3), можно записать в виде [3]

$$ds^2 = 2dx_A dw^A + 2\varphi_{AB} dw^A dw^B =$$
$$= 2\left(dwdx + dzdy\right) + 2\left(\Theta_{yy} dw^2 - 2\Theta_{xy} dwdz + \Theta_{xx} dz^2\right). \quad (5)$$

В метрике (5)

$$\varphi_{AB} = \varphi_{(AB)} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^A \partial x^B}. \quad (6)$$

Комплексная функция $\Theta(x, y, w, z)$ является решением второго уравнения Плебаньского [4]:

$$\Theta_{yz} + \Theta_{xw} = \Theta_{xy}^2 - \Theta_{xx}\Theta_{yy}. \quad (7)$$

Метрики в форме Керра – Шилда имеют следующее представление:

$$g = \eta + H\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}, \quad (8)$$

где η – метрика Минковского; $\mathbf{l}$ – некоторый изотропный вектор; H – функция координат многообразия.

Метрика (5) принадлежит [1] классу Керра – Шилда при условии, что поле φ_{AB} является изотропным:

$$\varphi_{AB}\varphi^{AB} = 2(\Theta_{xx}\Theta_{yy} - \Theta_{xy}^2) = 0. \quad (9)$$

Тогда из второго уравнения Плебаньского (7) следует, что потенциал Θ должен удовлетворять волновому уравнению

$$\Theta_{yz} + \Theta_{xw} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) при условии (6) эквивалентно вакуумным уравнениям Максвелла в пространстве Минковского:

$$\nabla^{AA'}\varphi_{AB} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, запишем метрику антисамодуального многообразия Эйнштейна в форме Керра – Шилда:

$$ds^2 = 2dx_A dw^A + 2\chi(\xi_A dw^A)^2. \qquad (12)$$

В метрике (12) спинорное поле ξ_A определяет главное изотропное направление поля Максвелла:

$$\varphi_{AB} = \chi\xi_A\xi_B. \qquad (13)$$

Конструкция изотропного поля Максвелла. По теореме Робинсона [5], уравнения Максвелла для (13) приводят к условию бессдвиговости для конгруэнции, определяемой спинорным полем ξ_A, а именно:

$$\xi^A\xi^B\nabla_{AA'}\xi_B = 0. \qquad (14)$$

Действительно-аналитические решения этой системы в плоском пространстве

$$ds^2 = 2dx_A dw^A = 2(dwdx + dzdy)$$

можно получить с помощью теоремы Керра (см., например, работу [1]).

Спинор ξ_A неявно определен уравнением

$$F(\xi_A, -i\xi_A X^{AA'}) = 0, \qquad (15)$$

где $F(\mathbb{Z}_\alpha)$ – произвольная голоморфная однородная функция (дуального) твистора $\mathsf{Z}_\alpha = (\xi_A, \omega^{A'})$ с $\omega^{A'} = -i\xi_A X^{AA'}$.

Функция $\chi(x)$ в выражении (13) должна удовлетворять системе уравнений

$$\xi^A\nabla_{AA'}\ln\chi = -\nabla_{AA'}\xi^A - \eta_{A'}. \qquad (16)$$

В уравнениях (16) η_A определяется из выражения

$$\xi^A\nabla_{AA'}\xi_B = \xi_B\eta_{A'}. \qquad (17)$$

Данная система для аналитических конгруэнций, заданных с помощью теоремы Керра функцией $F(\mathbb{Z}_\alpha)$, всегда имеет решения. Для их явного построения удобно воспользоваться результатами работы [6]. В ней было показано, что общее аналитическое решение для $\chi(x)$ имеет вид

$$\chi = \varkappa G,$$

где функция $\varkappa$ определена условием

$$\varkappa\left(\frac{\partial F}{\partial\xi_A} - iX^{AA'}\frac{\partial F}{\partial\omega^{A'}}\right) = \xi^A, \qquad (18)$$

функция $G(\mathbb{Z}_\alpha)$ – произвольная голоморфная однородная функция твистора $\mathbb{Z}_\alpha$ степени однородности $(m-4)$; m – степень однородности функции $F(\mathbb{Z}_\alpha)$.

Поле электромагнитного узла. Рассмотрим простейший случай линейной функции $F(\mathbb{Z}_\alpha) = \mathbb{A}^\alpha \mathbb{Z}_\alpha$, где $\mathsf{A}^\alpha = (0, s, 0, 1)$ – заданный твистор с $s = \mathrm{const}$. Уравнение (15) в координатах (1) принимает вид

$$s\xi_1 - i(\xi_0 w + \xi_1 z) = 0. \tag{19}$$

Отсюда для проективной компоненты спинора $\lambda = \xi_1/\xi_0$ получаем

$$\lambda = -\frac{w}{z + is}. \tag{20}$$

В декартовых координатах $ds^2 = 2(dwdx + dzdy) = dT^2 - dX^2 - dZ^2$,

$$X^{AA'} = \begin{pmatrix} y & w \\ -x & z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} T+Z & X+iY \\ X-iY & T-Z \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Таким образом,

$$\lambda = -\frac{X + iY}{T + i\sqrt{2} \cdot s - Z}. \tag{22}$$

Полученное спинорное поле ξ_A определяет в пространстве Минковского хорошо известную конгруэнцию Робинсона [2]. Соответствующее изотропное поле Максвелла принимает вид

$$\varphi_{AB} = \varkappa G \begin{pmatrix} \xi_0\xi_0 & \xi_0\xi_1 \\ \xi_1\xi_0 & \xi_1\xi_1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где $\varkappa = \dfrac{-i\xi_0}{z + is}$; $G\left(\xi_A, -i\xi_A X^{AA'}\right)$ – произвольная голоморфная функция степени однородности (–3).

Используя выражение для проективной компоненты λ, получаем следующее выражение для изотропного поля Максвелла, задаваемого конгруэнцией Робинсона:

$$\varphi_{AB} = -i\frac{g\left(\lambda, -i\left(y - x\lambda\right), -i\left(w + z\lambda\right)\right)}{z + is} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $\lambda = -\dfrac{w}{z+is}$; g – произвольная голоморфная функция трех переменных.

В частности, выбирая функцию $G(\mathbb{Z}_\alpha)$ в виде

$$G(\mathbb{Z}_\alpha) = \frac{1}{4(\mathbb{Z}_2 + s\mathbb{Z}_0)^3} = \frac{1}{4i\xi_0^3(y - x\lambda + is)^3}, \tag{25}$$

получаем для поля Максвелла выражение

$$\varphi_{AB} = -\frac{(z+is)^2}{4\left(yz + xw + is(y+z) - s^2\right)^3}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

В декартовых координатах (26) можно представить в виде

$$\varphi_{AB} = -\frac{\left(T + i\sqrt{2}s - Z\right)^2}{\left(\left(T + i\sqrt{2}s\right)^2 - X^2 - Y^2 - Z^2\right)^3}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

Здесь

$$\lambda = -\frac{X + iY}{T + i\sqrt{2}\cdot s - Z}, \tag{28}$$

что соответствует (при $s \neq 0$) полю электромагнитного узла Хопфа, приведенному в работе [7]. Интегральные кривые поля вектора Пойнтинга для этого решения имеют структуру расслоения Хопфа.

Заметим, что потенциал $\Theta(x)$ для поля электромагнитного узла (26)

$$\Theta = \frac{1}{8\left(yz + xw + is(y+z) - s^2\right)}. \tag{29}$$

В декартовых координатах (29) можно записать в виде

$$\Theta = \frac{1}{4\left(\left(T + i\sqrt{2}s\right)^2 - X^2 - Y^2 - Z^2\right)}. \tag{30}$$

Метрика Спарлинга – Тода. Метрика (12) антисамодуального пространства Керра – Шилда, построенная с помощью поля Максвелла (26), имеет вид

$$ds^2 = 2\left(dwdx + dzdy\right) - \frac{\left((z+is)dw - wdz\right)^2}{2\left(yz + xw + is(y+z) - s^2\right)^3}. \tag{31}$$

Эта метрика является известной метрикой Спарлинга – Тода [8], которая описывает антисамодуальное вакуумное пространство типа N по Петрову. Ее кривизна

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Psi_{ABCD}\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'}$$

характеризуется конформным спинором Вейля

$$\Psi_{ABCD} = \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x^{(A}\partial x^{B}\partial x^{C}\partial x^{D)}},$$

где потенциал Θ задан выражением (29).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Tod K.P. Self-dual Kerr – Schild metrics and null Maxwell fields. *Journal of Mathematical Physics*, 1982, vol. 23, pp. 1147–1148.

[2] Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство-время*. *Т. 2: Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени*. Москва, Мир, 1988, 572 с.

[3] Dunajski M. *Solitons, instantons, and twistors*. Oxford, OUP, 2010, 359 p.

[4] Plebanski J. Some solutions of complex Einstein equations. *Journal of Mathematical Physics*, 1975, vol. 16, pp. 2395–2402.

[5] Robinson I. Null electromagnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 1961, vol. 2, pp. 290–291.

[6] Nagatomo K. On a construction of null electromagnetic fields. *Osaka Journal of Mathematics*, 1983, vol. 20, pp. 285–301.

[7] Dalhuisen J. W., Bouwmeester D. Twistors and electromagnetic knots. *Journal of Physics*, 2012, vol. A45, pp. 135201–135209.

[8] Sparling G.A.J., Tod K.P. An example of an H-space. *Journal of Mathematical Physics*, 1981, vol. 22, pp. 331–332.

Статья поступила в редакцию 07.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тришин В.Н. Поле электромагнитного узла и метрика Спарлинга – Тода. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 9. URL: http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/1244.html

Тришин Владимир Николаевич родился в 1977 г., окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 2000 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор научных работ в области математических методов в общей теории относительности.
e-mail: trishinvn@bmstu.ru

The field of the electromagnetic knot and the Sparling—Tod metrics

© V.N. Trishin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers explicit anti-selfdual solutions of complex Einstein equations constructed from null Maxwell fields. It is shown that the solution of source-free Maxwell equations describing electromagnetic unit corresponds to well-known Sparling—Tod metrics.

Keywords: *anti-selfdual solutions, Einstein equations, electromagnetic unit, null Maxwell fields.*

REFERENCES

[1] Tod K.P. Self-dual Kerr—Schild metrics and null Maxwell fields. *Journal of Mathematical Physics*, 1982, vol. 23, pp. 1147–1148.
[2] Penrose R., Rindler W. *Spinors and space-time. Vol. 2. Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry.* Cambridge etc., Cambridge University Press, 1986. IX, 501 p., ISBN 0 521 25267 9.
[3] Dunajski M. *Solitons, instantons, and twistors*. Oxford, OUP, 2010, 359 p.
[4] Plebanski J. Some solutions of complex Einstein equations. *Journal of Mathematical Physics*, 1975, vol. 16, pp. 2395–2402.
[5] Robinson I. Null electromagnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 1961, vol. 2, pp. 290–291.
[6] Nagatomo K. On a construction of null electromagnetic fields. Osaka Journal of Mathematics, 1983, vol. 20, pp. 285–301.
[7] Dalhuisen J. W., Bouwmeester D. Twistors and electromagnetic knots. *Journal of Physics*, 2012, vol. A45, pp. 135201–135209.
[8] Sparling G.A.J., Tod K.P. An example of an H-space. *Journal of Mathematical Physics*, 1981, vol. 22, pp. 331–332.

Trishin V.N. (b. 1977) graduated from the Physics Department of Lomonosov Moscow State University. Ph.D, Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. Author of 7 scientific papers in the field of mathematical methods in the general theory of relativity.
e-mail: trishinvn@bmstu.ru