

## Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии внешнего избыточного давления

© В.М. Дубровин, Т.А. Бутина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Предложен метод расчета динамической устойчивости цилиндрической оболочки при нагружении внешним избыточным давлением, распределенным по ее поверхности. В качестве примера рассмотрен случай, когда давление меняется в соответствии с линейным законом.*

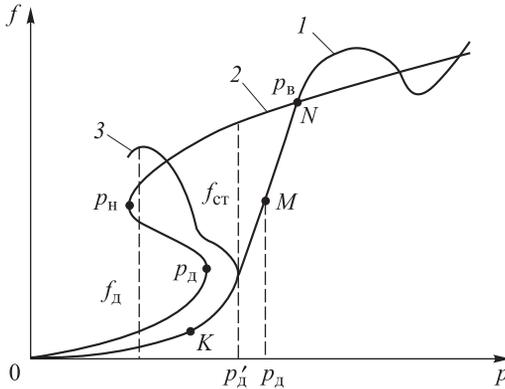
**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, прогиб, равновесное положение, диаграмма, коэффициент динамичности.

**Введение.** Рассмотрена динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего избыточного давления, изменяющегося во времени. Отметим, что если прогибы сравнимы с толщиной оболочки, задачу следует решать в нелинейной постановке.

**Оценка давления, действующего на поверхность оболочки.** Диаграмма стрела прогиба — нагрузка для цилиндрической оболочки представлена на рис. 1 [1–5]. Исследуя равновесные формы при статическом нагружении, получаем на диаграмме стрела прогиба — нагрузку линию с верхней  $p_v$  и нижней  $p_n$  критическими точками. Если нагрузка быстро возрастает во времени, внешние силы могут достигать уровня как нижней, так и верхней критических нагрузок (участок  $OK$ ), причем на начальном участке ( $p > p_v$ ) будут происходить колебания вокруг равновесных форм, характеризующихся малыми прогибами. Затем оболочка скачкообразно перемещается к равновесным положениям с большими прогибами (участок  $KN$ ). Далее начинаются колебания вокруг этих новых равновесных форм, имеющих ярко выраженный нелинейный характер. Этот процесс так называемого хлопка оболочки при быстро возрастающей нагрузке будем называть динамическим выпучиванием или динамической потерей устойчивости, а нагрузку, соответствующую моменту хлопка, — критической динамической нагрузкой  $p_d$ . Условно эта нагрузка определяется как абсцисса точки  $M$  перегиба кривой  $I$ , т. е. точки, соответствующей наибольшей скорости выпучивания оболочки.

До сих пор предполагалось, что приложенная к оболочке нагрузка возрастает во времени, а прошелкивание оболочки происходит на восходящей ветви нагружения. Если нагрузка возрастает до некоторого значения ( $p'_d < p_d$ ) и затем уменьшается согласно некоторому

закону, то в зависимости от скорости уменьшения падения нагрузки оболочка либо возвращается в исходное состояние, либо осуществляется прощелкивание оболочки на нисходящей ветви нагружения. Предполагается, что прощелкивание оболочки происходит, если наибольший прогиб  $f_d$  достиг статического прогиба  $f_{ст}$ , соответствующего нагрузке  $p'_d$ , что позволяет выяснить, возникнут ли при динамическом нагружении, совершающемся по сложной программе, заметные остаточные деформации.



**Рис. 1.** Диаграмма стрела прогиба — нагрузка для цилиндрической оболочки:  
 1 — статическое нагружение; 2 — динамическое нагружение (восходящая ветвь);  
 3 — динамическое нагружение (нисходящая ветвь)

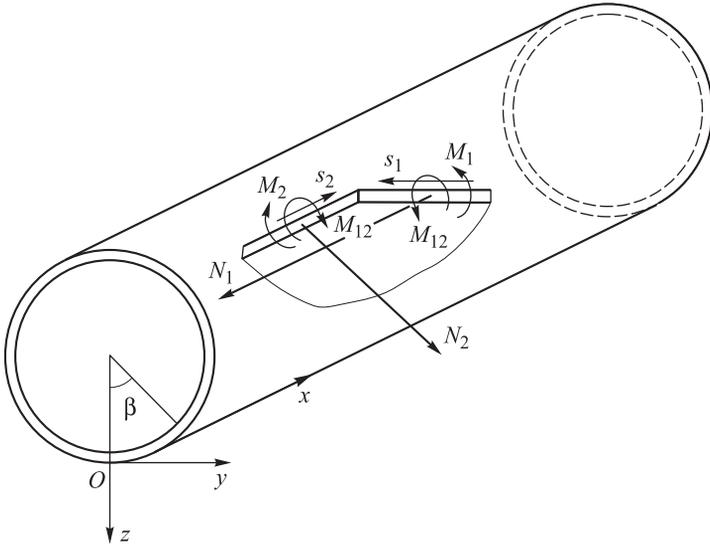
Уравнения, выражающие компоненты деформаций срединной поверхности оболочки в соответствии со схемой внутренних сил и моментов, приведенной на рис. 2, имеют вид [6–8]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - k_2 w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \chi_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — деформации растяжения (сжатия) в осевом и кольцевом направлениях;  $\gamma$  — деформация сдвига;  $u, \vartheta, w$  — компоненты деформации оболочки по осям  $x, y, z$ ;  $k_1, k_2$  — главные кривизны поверхности;  $\chi_1, \chi_2$  — деформация изгиба в осевом и кольцевом направлениях;  $\chi_3$  — деформация кручения.



**Рис. 2.** Схема внутренних сил и моментов в произвольном сечении оболочки

Эти величины связаны уравнением совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w, \quad (1)$$

где

$$L(w, w) = 2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]; \quad \nabla_k^2 = k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

При этом соотношение Гука можно представить следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1), \quad \tau = \frac{E}{2(1+\mu^2)} \gamma,$$

$$M_1 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{12} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, \tau$  — нормальные и касательные напряжения в срединной поверхности оболочки;  $E, \mu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Уравнения равновесия произвольного элемента оболочки можно записать в виде

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = \sigma_1 \delta \left( k_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sigma_2 \delta \left( k_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2\tau \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q,$$

где  $\delta$  — толщина оболочки;  $q$  — интенсивность действующей поперечной нагрузки.

При решении задачи устойчивости в качестве  $q$  рассматривают суммарную проекцию основных сил  $p_x, p_y, s$  на направление нормали к поверхности оболочки. Тогда

$$q = -\delta \left( P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Положительными считают силы, увеличивающие параметры кривизны, в частности, силы  $p_x$  и  $p_y$  положительные, если они являются сжимающими.

Введя в уравнение совместности деформаций (1) напряжения из соотношений теории упругости, получаем

$$\frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial y^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2} \right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w, \quad (3)$$

Выразив в формулах (2) и (3) напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \tau$  через функцию напряжений  $\Phi$  в виде

$$\sigma_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

имеем

$$\frac{D}{\delta} \nabla^4 w = L(w, \Phi) + \nabla_k^2 \Phi + \frac{q}{\delta}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \nabla_k^2 w,$$

где

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Поскольку для цилиндрической оболочки  $k_1 = 0, k_2 = 1/R$ , уравнения (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{\delta} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если оболочка до нагружения имеет начальные прогибы  $w_0(x, y)$ , то выражения для деформаций имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{1}{R} (w - w_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $w$  — полный прогиб оболочки.

С учетом выражений (6) уравнения (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{D}{\delta} \nabla^4 (w - w_0) &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w - w_0). \end{aligned} \quad (7)$$

В случае подкрепленных оболочек можно считать, что ребра жесткости (продольные — стрингеры и поперечные — шпангоуты) расположены достаточно часто так, что конструкцию можно рассматривать как ортотропную с приведенными жесткостями в продольном и кольцевом направлениях. Тогда, принимая, что главные направления жесткости совпадают с линиями главных кривизн оболочки, а жесткость на кручение подкрепляющих элементов мала, вместо уравнений (7) получаем

$$\begin{aligned} \nabla_D^4 (w - w_0) &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta}, \\ \nabla_h^4 \Phi &= -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\nabla_h^4 = h_2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2h_3 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + h_1 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4},$$

$$\nabla_d^4 = D_1 \frac{\partial}{\partial \alpha^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4},$$

$$h_1 = \frac{1}{E\delta_1}, \quad h_2 = \frac{1}{E\delta_2}, \quad h_3 = \frac{1}{G\delta} - \frac{2\mu}{E\delta},$$

где  $\delta_1 = \delta + \frac{F_c}{b_c}$  — приведенная толщина оболочки в продольном

направлении;  $\delta_2 = \delta + \frac{F_{ш}}{b_{ш}}$  — приведенная толщина оболочки в коль-

цевом направлении;  $D_1 = \frac{EJ_c}{b_c} + \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$  — приведенная жесткость

оболочки в продольном направлении;  $D_2 = \frac{EJ_{ш}}{b_{ш}} + \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$  — при-

веденная жесткость оболочки в кольцевом направлении;

$D_3 = \left[ \mu(D_1 + D_2) + \frac{G\delta^3}{3} \right]$  — приведенная жесткость оболочки на кру-

чение ( $F_c, F_{ш}$  — площади поперечных сечений стрингера и шпангоута;  $J_c, J_{ш}$  — моменты инерции сечений стрингера и шпангоута;  $b_c, b_{ш}$  — шаг стрингеров и шпангоутов).

При решении динамической устойчивости следует учитывать инерционные нагрузки, соответствующие нормальному прогибу  $w$  оболочки. Согласно работам [9–11], инерционные нагрузки, соответствующие перемещениям  $u$  и  $\vartheta$  в срединной поверхности, можно не учитывать, не внося при этом существенных погрешностей в окончательный результат. Тогда с учетом сил инерции, соответствующих перемещению, справедливы следующие исходные уравнения нелинейной теории для оценки динамической устойчивости оболочек:

для изотропной оболочки

$$\begin{aligned} \frac{D}{\delta} \nabla^4 (w - w_0) &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta} - \frac{\gamma_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2}; \end{aligned} \quad (8)$$

для конструктивно ортотропной оболочки

$$\begin{aligned} \nabla_D^4 (w - w_0) &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{\delta} - \frac{\gamma_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \nabla_h^4 \Phi &= -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (w - w_0)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\gamma_1$  — удельная масса материала оболочки.

Уравнения (8) и (9) позволяют оценить устойчивость оболочки при динамическом нагружении, соответствующем различным расчетным случаям.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку под действием внешнего давления, распределенного по ее поверхности. Предполагается, что торцевые шпангоуты шарнирно скреплены с оболочкой и остаются круговыми. Полный и начальный прогибы оболочки представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} w &= f (\sin \alpha x \sin \beta y + \psi \sin^2 \alpha x + \varphi), \\ w_0 &= f_0 (\sin \alpha x \sin \beta y + \psi \sin^2 \alpha x + \varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\alpha = \pi/l$ ;  $\beta = n/R$  ( $l$  — длина оболочки;  $n$  — число полуволн в продольном направлении, которое можно принять равным единице).

С учетом выражений (10) решение второго уравнения (8) может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} \Phi &= E (a_1 \cos 2\alpha x + a_2 \cos 2\beta y + a_3 \sin \alpha x \sin \beta y + a_4 \sin 3\alpha x \sin \beta y) - \\ &\quad - \frac{qR}{2\delta} x^2 - \frac{qR}{4\delta} y^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{16\alpha^2} \left[ \frac{(f - f_0)^2 \beta^2 2}{2} + (f - f_0) f_0 \beta^2 - \frac{2(f - f_0) \psi}{R} \right]; \\ a_2 &= \frac{\alpha^2}{32\beta^2} (f^2 - f_0^2); \quad a_3 = \frac{\alpha^2 (f - f_0)}{R(\alpha^2 + \beta^2)} - \frac{\alpha^2 \beta^2 (f^2 - f_0^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}; \\ a_4 &= \frac{\alpha^2 \beta^2}{(9\alpha^2 + \beta^2)^2} (f^2 - f_0^2). \end{aligned}$$

Последние два члена в формуле (11) отвечают напряжениям в срединной поверхности, определяемым с помощью безмоментной теории.

Учитывая соотношения, выражающие деформацию через прогиб оболочки и функцию напряжений:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right),$$

и условие замкнутости оболочки в окружном направлении

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} dy = 0,$$

запишем выражение для параметра  $\varphi$  в виде

$$\varphi = \frac{R^2}{\delta(f - f_0)} \frac{q}{E} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right) - \frac{\psi}{2} + \frac{R}{8} (f + f_0) \beta^2.$$

Для определения параметров  $\psi$  и  $f$  справедливы следующие соотношения, полученные с использованием метода Бубнова — Галеркина:

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} X \sin \alpha x \sin \beta y dx dy = 0, \tag{12}$$

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} X \sin^2 \alpha x dx dy = 0,$$

где

$$X = \frac{D}{\delta} \nabla^4 (w - w_0) - L(w, \Phi) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{q}{\delta} + \frac{\gamma_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

С учетом выражений (10), (11) из соотношений (12) получаем уравнение, связывающее параметры прогиба с изменяющейся во времени нагрузкой:

$$\bar{q} = c_0 \left( 1 - \frac{\xi_0}{\xi} \right) + c_1 (\xi^2 - \xi_0^2) + c_2 (\xi^2 - \xi_0^2) \psi^2 -$$

$$- c'_2 \left( 1 - \frac{\xi_0}{\xi} \right) \xi_0 \psi - c_3 (\xi - \xi_0) \psi + c_4 \frac{1}{\xi} \frac{d^2 \xi}{dt^2}, \tag{13}$$

где

$$c_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\xi^2} \left[ \frac{1}{\pi^2 (1 + \xi^2)^2 \lambda} + \frac{\pi^2}{12(1 - \mu^2)} \frac{(1 + \xi^2)^2}{\xi^2} \lambda \right];$$

$$c_1 = \frac{\pi^2}{16 \left(1 + \frac{1}{2}\xi^2\right)} \frac{1 + \xi^4}{\xi^2} \lambda; \quad c_2 = \frac{\pi \xi^2}{1 + \frac{1}{2}\xi^2} \left[ \frac{1}{(1 + \xi^2)^2} + \frac{1}{(1 + 9\xi^2)^2} \right] \lambda;$$

$$c'_2 = \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)^2 \left(1 + \frac{1}{2}\xi^2\right)}; \quad c_3 = \frac{1}{4 \left(1 + \frac{1}{2}\xi^2\right)} \left[ 1 + \frac{8\xi^4}{(1 + \xi^2)^2} \right];$$

$$c_4 = \frac{\gamma_1 R^2}{\left(1 + \frac{1}{2}\xi^2\right) g E \eta};$$

$$\bar{q} = \frac{q}{E} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2; \quad \xi = \frac{f}{\delta}; \quad \xi_0 = \frac{f_0}{\delta}; \quad \eta = n^2 \frac{\delta}{R}; \quad \lambda = \frac{R\delta}{l^2}.$$

Из второго уравнения (12) находим

$$\Psi = \frac{N_3 \xi}{2(N_2 \xi^2 + N_1)}, \quad (14)$$

где

$$N_1 = \frac{\pi^4}{6(1 + \mu^2)} \lambda^2 + \frac{1}{8}; \quad N_2 = c_2 \frac{\pi^4}{4} \frac{1 + \frac{1}{2}\xi}{\xi^2} \lambda; \quad N_3 = \frac{c_3 \eta}{4} \left(1 + \frac{\xi^2}{2}\right).$$

Если в формуле (14) ограничиться рассмотрением только одного первого члена и положить  $\xi_0 = 0$ , получим параметр верхнего критического давления  $\bar{q}_b$ , соответствующего статической задаче для идеальной оболочки:

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\xi^2} \left[ \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2)\eta} + \frac{(1 + \xi^2)^2}{12(1 - \mu^2)} \eta \right].$$

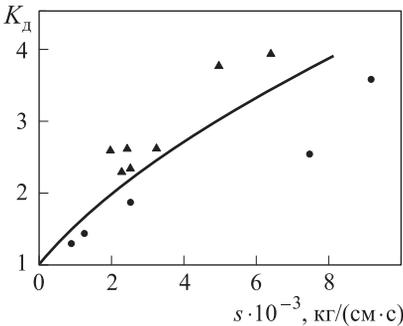
Если принять, что интенсивность давления возрастает в соответствии с законом  $q = st$ , и обозначить  $\bar{t} = \frac{stR^2}{E\delta^2\bar{q}_B}$ , уравнение (14) можно представить в виде

$$\frac{d^2\xi}{d\bar{t}^2} - s^* \left[ \left( \bar{t} - \frac{\xi - \xi_0}{\xi} \right) \xi - B_1 (\xi^2 - \xi_0^2) \xi - B_2 \frac{(\xi^2 - \xi_0^2) \xi^3}{(N_2 \xi^2 + N_1)^2} + B_3 \frac{(\xi - \xi_0) \xi^2}{N_2 \xi^2 + N_1} + B_4 \frac{(\xi - \xi_0) \xi \xi_0}{N_2 \xi^2 + N_1} \right] = 0, \quad (15)$$

где  $B_1 = c_1 \frac{\xi_0^2}{\pi^2} \frac{\eta}{\lambda \bar{q}_B}$ ;  $B_2 = c_2 \frac{\lambda N_3^2}{4 \bar{q}_B}$ ;  $B_3 = \frac{c_3 N_3}{2 \bar{q}_B}$ ;  $B_4 = \frac{c_2' c_3 \eta \left( 1 + \frac{1}{2} \xi^2 \right)}{8 \bar{q}_B}$ ;

$s^* = \left( 1 + \frac{\xi^2}{2} \right) \bar{q}_B^3 \left( \frac{CE}{sR} \right)^2 \left( \frac{\delta}{R} \right)^4 \eta$ ;  $c$  — скорость звука в материале оболочки.

Решение уравнения (15) позволит определить критическое динамическое внешнее давление, которое затем можно сравнить с критическим давлением при статическом приложении нагрузки. Чтобы выполнить сравнение, введем понятие коэффициента динамичности  $K_d$  критической нагрузки, равного отношению динамической критической нагрузки к верхнему статическому значению критической нагрузки. На рис. 3 представлен коэффициент  $K_d$  в зависимости от скорости нагружения, полученный расчетом критической нагрузки по формуле (15). Расчеты проводились для оболочки с параметрами:  $R/l = 0,45$ ;  $R/\delta = 11,2$ ;  $\xi_0 = 0,001$ ;  $E = 7,75 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>;  $c = 5 \cdot 10^5$  см/с. Также приведены экспериментальные значения  $K_d$  по данным [1] (см. рис. 3).



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента динамичности критической нагрузки цилиндрической оболочки от скорости нагружения под действием внешнего давления (▲ — экспериментальные данные для оболочки без начального погиба; ● — экспериментальные данные для оболочки с начальным погибом)

Как следует из рис. 3, скорость нагружения существенно влияет на критическое динамическое давление, увеличивая критическую нагрузку при кратковременном нагружении. Применяя полученные соотношения, можно оценить устойчивость оболочки на участке разгрузки (когда давление падает). Для этого достаточно воспользоваться критерием: оболочка теряет устойчивость в период разгрузки, если максимальная стрела прогиба превышает статическую стрелу прогиба, отвечающую наибольшему давлению.

### Выводы.

1. На основании общей теории пологих оболочек предложен метод расчета критического динамического внешнего избыточного давления для изотропной и ортотропной цилиндрической оболочек;

2. Скорость нагружения оболочки существенно влияет на критическое динамическое давление, увеличивая значение критической нагрузки при кратковременном нагружении.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967, 984 с.
- [2] Белоносов С.М. *Математическое моделирование равновесных состояний упругих тонких оболочек*. Москва, Наука, 1993, 158 с.
- [3] Агамиров В.Л. *Динамические задачи нелинейной теории оболочек*. Москва, Наука, 1990, 269 с.
- [4] Работнов Ю.Н. *Проблемы механики деформируемого твердого тела. Избранные труды*. Москва, Наука, 1991, 194 с.
- [5] Жилин П.А. *Актуальные проблемы механики*. Санкт-Петербург, Изд-во политехн. ун-та, 2006, 306 с.
- [6] Власов В.З. *Избранные труды. Общая теория оболочек*. Москва, Изд-во АН СССР, 1962, т. 1, 528 с.
- [7] Жилин П.А. *Основы теории оболочек*. Санкт-Петербург, Изд-во политехн. ун-та, 2006, 166 с.
- [8] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, т. 2, 560 с.
- [9] Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек*. Москва, Наука, 1989, 373 с.
- [10] Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П. *Нелинейные колебания цилиндрических оболочек*. Киев, Выща школа, 1989, 207 с.
- [11] Narasimhan K.Y., Hoff N.J. Snapping of Imperfect Thin-Walled Circular Cylindrical Shells of Finite Length Trans. *ASME*, ser E, 1971, vol. 38, no. 1, pp. 160–172.

Статья поступила в редакцию 10.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии внешнего избыточного давления. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 6. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1237.html>

**Дубровин Виктор Митрофанович** родился в 1934 г., окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета в 1958 г. Канд. тех. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» и кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор пяти изобретений. Область научных интересов: динамика, прочность и устойчивость деформируемых систем, ползучесть конструкционных материалов.  
e-mail: vmdubrovinm1934@mail.ru

**Бутина Татьяна Александровна** родилась в 1950 г., окончила факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Награждена медалями им. М.В. Келдыша и им. Ю.А. Гагарина. Область научных интересов: прочность и устойчивость деформируемых систем. e-mail: butinata@mail.ru

## Simulation of the dynamic stability of cylindrical shell under the action of external overpressure

© V.M. Dubrovin, T.A. Butina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The suggested method is to calculate dynamic stability of cylindrical shells under loading of external excessive pressure, distributed over shell surface. As an example, we consider the case where the pressure varies in accordance with the linear law*

**Keywords:** cylindrical shell, *нпозуб*, the equilibrium position, chart, the dynamic factor.

### REFERENCES

- [1] Volmir A.S. *Ustoichivost' deformiruemyykh system* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 987 p.
- [2] Belonosov S.M. *Matematicheskoe modelirovanie ravnovesnykh sostoyaniy uprugikh tonkikh obolochek* [Mathematical modeling of the equilibrium states of thin elastic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1993, 158 p.
- [3] Agamirov V.L. *Dinamicheskie zadachi nelineinoy teorii obolochek* [Dynamic problems of nonlinear shell theory]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 269 p.
- [4] Rabotnov Yu.N. *Problemy mekhaniki deformiruemogo tela* [Problems of solid mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 194 p.
- [5] Zhilin P.A. *Aktualnye problemy mekhaniki. Sbornik statey* [Actual Problems in Mechanics. Coll. papers]. St.-Petersburg, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, 2006, 306 p.
- [6] Vlasov V.Z. *Izbrannye Trudy. Obschaya teoriya obolochek* [Selected works. General theory of shells]. Moscow, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1962, vol. 1, 528 p.
- [7] Zhilin P.A. *Osnovy teorii obolochek* [Fundamentals of the theory of shells]. St.-Petersburg, Publishing house of the State Politechnical University, 2006, 166 p.
- [8] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [9] Vorovich I.I. *Matematicheskie problemy nelineinoy teorii pologikh obolochek* [Mathematical problems of the nonlinear theory of of gently sloping shells]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 373 p.
- [10] Kubenko V.D., Kovalchuk P.S., Podchasov N.P. *Nelineinnye kolebaniya tsilindricheskikh obolochek* [Nonlinear vibrations of cylindrical shells]. Kiev, Vyscha shkola, 1989, 207 p.
- [11] Narasimhan K.Y., Hoff N.J. Snapping of Imperfect Thin-Walled Circular Cylindrical Shells of Finite Length Trans. *ASME, ser E*, 1971, vol. 38, no. 1, pp. 160–172.

**Dubrovin V.M.** (b. 1934) graduated from the Faculty of Mathematics and Mechanics of the Saratov State University in 1958. Ph.D., Assoc. Pro-fessor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics and of the Higher Mathematics Departments of Bauman Moscow State Tech-nical University. Research interests: dynamics, strength and stability of deformable systems; creep of structural materials. He is the author of five inventions. e-mail: dubrovinvm1934@mail.ru

**Butina T.A.** (b. 1950) graduated from the Faculty of Management and Applied Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology in 1974. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. She specializes in the field of strength and stability of deformable systems. e-mail: [butinata@mail.ru](mailto:butinata@mail.ru)