

Моделирование динамических процессов деформирования гибких тканевых композиционных материалов

© Ю.И. Димитриенко, И.Д. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложена математическая модель деформирования гибких композиционных материалов на основе арамидных тканей при ударно-волновых воздействиях. Модель учитывает особенности деформационных характеристик этого класса композитных материалов: способность деформироваться без разрушения при конечных значениях деформаций, существенное различие диаграмм деформирования при растяжении и сжатии, зависимость этих диаграмм от скорости нагружения, наличие псевдопластических свойств материалов, обусловленных вытягиванием нитей из ткани, и другие. Сформулирована постановка задачи динамического деформирования гибких броневых материалов, для ее решения в двумерной постановке применен метод ленточных адаптивных сеток. Приведен пример численного решения задачи о высокоскоростном воздействии ударника на гибкий броневой материал, проанализированы некоторые специфические эффекты деформирования материалов данного класса.

Ключевые слова: динамические процессы, гибкие тканевые композиты, численное моделирование, разрушение, броневые материалы.

Введение. Гибкие броневые композитные материалы (ГБКМ) на основе арамидных тканей при ударных воздействиях проявляют специфические физико-механические свойства в области деформирования и разрушения. Ниже перечислены основные особенности механических свойств ГБКМ.

Деформирование тканей в составе ГБКМ при растяжении по основе и утку обусловлено распрямлением волокон в тканях, в исходном состоянии находящихся в искривленном положении, является нелинейно-упругим (обратимым, без пластических деформаций). Деформирование тканей в составе ГБКМ при сжатии по основе и утку связано с потерей устойчивости волокон в тканях, вследствие чего волокна деформируются практически без сопротивления, однако из-за переплетения волокон в ткани и их взаимного сцепления небольшое упругое сопротивление сжатию ГБКМ все же оказывают. По достижении определенного значения деформации сжатия становятся необратимыми — после снятия нагрузки в материале остаются большие пластические деформации. Эффект появления остаточных де-

формаций продольного сжатия проявляется при ударном воздействии круглых ударников по мишени из ГБКМ, приводящем к раздвиганию нитей в ГБКМ.

В поперечном к укладке слоев ткани направлении наблюдается противоположная картина: при сжатии ГБКМ возрастают нелинейно-упругие свойства, а при растяжении — убывают. Нелинейно-упругий характер деформирования нитей в поперечном направлении при сжатии обусловлен смятием нитей в ткани. При достаточно высоком уровне сжимающих деформаций резко увеличивается жесткость ГБКМ за счет того, что поры и пустоты между волокнами в ткани схлопываются и материал, представляющий собой плотный «комоч» волокон, оказывает значительно большее сопротивление деформированию.

Деформирование ГБКМ при поперечном сжатии является нелинейно-упругим (обратимым) только до некоторого уровня напряжений сжатия. Когда происходит резкое увеличение сжатия за счет схлопывания пор, материал становится пластическим — после разгрузки в нем возникают остаточные деформации, материал сохраняется в уплотненном состоянии и после снятия нагрузки. Кроме того, после некоторого более высокого значения сжимающих напряжений волокна ткани начинают также пластически обжиматься, этот факт зафиксирован экспериментально [1].

При межслойном (межнитевом) сдвиге материалы ГБКМ проявляют упруговязкопластический характер деформирования, обусловленный вытягиванием одних волокон относительно других при достижении напряжения сдвига определенного значения и проскальзыванием отдельных не прошитых слоев ткани. С точки зрения континуальной механики процесс вытягивания волокон можно моделировать как пластическое деформирование, следствием которого является накопление остаточных деформаций. В терминах теории пластического течения предельное напряжение, при котором начинается процесс вытягивания, фактически представляет собой предел текучести, зависящий от скорости деформаций. Как правило, с повышением скорости деформации предел текучести возрастает. Это означает, что материал проявляет вязкопластические свойства.

Перечисленные факторы образуют в комплексе механизм поглощения ГБКМ энергии ударника.

Отметим, что нелинейно-упругое деформирование ГБКМ существенно отличается от деформирования нитей, образующих тканевую структуру ГБКМ. На диаграмме деформирования нитей начальный участок с низким модулем упругости крайне мал и им, как правило, пренебрегают. Это связано с тем, что в составе одиночных нитей, в отличие от тканей, волокна имеют практически прямолинейную

форму, и они не распрямляются. В тканях волокна изначально переплетены и при растяжении эффект упрочнения наступает при более высоких значениях деформации (2...3 % против 0,1 % в нитях).

В настоящее время для численного моделирования ударно-волновых процессов в ударниках и преградах применяют программные пакеты, относящиеся к коммерческим продуктам (NASTRAN, LS-DYNA, ANSYS и др.), а также авторские программные средства, не имеющие универсального характера, но реализующие специфические модели поведения динамического деформирования и разрушения ударников и мишеней [1–10]. Модели и программные средства для численного моделирования деформирования гибких композиционных материалов с учетом перечисленных выше эффектов находятся в стадии разработки.

Предложенная математическая модель механического поведения ГБКМ позволяет учитывать перечисленные выше эффекты в рамках нелинейной механики сплошных сред с конечными деформациями, основываясь на фундаментальных законах механики континуальных сред. Продемонстрированы возможности разработанной модели для численного решения задачи о прямом ударе ударника по композитной преграде.

Сведения из теории конечных деформаций. Модель основана на общих теоретических принципах построения моделей нелинейной механики сплошной среды при больших деформациях [11–13]. Рассматривая ГБКМ как сплошную среду, которая под действием удара преобразуется из отсчетной конфигурации K^0 в актуальную K , введем градиент деформаций \mathbf{F} , преобразующий элементарный радиус-вектор $d^0 \mathbf{x}$ локальной окрестности точки сплошной среды из отсчетной K^0 в актуальную K конфигурацию [11–13]: $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d^0 \mathbf{x}$. В локальном базисе \mathbf{r}^i отсчетной конфигурации градиент деформаций $\mathbf{F} = F_{ij} \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j$. Используя полярное разложение [11] для градиента деформации, введем энергетические тензоры деформаций

$$\mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{F}) = \frac{1}{n - III} \left((\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{\frac{n-III}{2}} - \mathbf{E} \right), \quad n = I, II, IV, V, \quad (1)$$

где индекс n обозначен римскими цифрами [11, 13]. Тензор $\mathbf{C}^{(V)}$ совпадает с правым тензором деформации Коши — Грина \mathbf{C} :

$$\mathbf{C}^{(V)} = \mathbf{C} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}) = \varepsilon_{ij} \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j,$$

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(F_{ik}F_{kj} - \overset{\circ}{g}_{ij}).$$

Здесь ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; $g_{ij} = \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_i$ и $\overset{\circ}{g}_{ij}$ — метрические матрицы, определенные в конфигурациях K и $\overset{\circ}{K}$.

Тензоры деформации представим в виде суммы упругих $\overset{(n)}{\mathbf{C}}^e$ и вязкопластических $\overset{(n)}{\mathbf{C}}^p$ деформаций (аддитивная модель деформаций):

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \overset{(n)}{\mathbf{C}}^e + \overset{(n)}{\mathbf{C}}^p.$$

В отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$ напряженное состояние характеризуется первым тензором Пиола — Кирхгофа \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} / J = P^{mn} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_m \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_n, \quad P^{mn} = T^{mi} F_i^n / J, \quad J = \rho / \overset{\circ}{\rho}, \quad (2)$$

где \mathbf{T} — тензор истинных напряжений Коши, $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j$; T^{ij} — компоненты тензора в базисе \mathbf{r}_i актуальной конфигурации; $\overset{\circ}{\rho}$, ρ — плотность в отсчетной и актуальной конфигурациях соответственно.

Согласно классификации, введенной в [11–13], для тензора \mathbf{C} парным является энергетический тензор напряжений $\overset{\vee}{\mathbf{T}}$:

$$\overset{\vee}{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1\tau} = T^{ij} \overset{\circ}{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{r}}_j,$$

имеющий те же компоненты T^{ij} , что и тензор \mathbf{T} , но в базисе отсчетной конфигурации. Остальные энергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$, соответствующие энергетическим тензорам деформации $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, можно записать в единой форме [11–13]:

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = \overset{(n)}{\mathbf{E}}_A^{-1} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{E}}_A^{-1} \cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}} / J,$$

где $\overset{(n)}{\mathbf{E}}_A^{-1}$ — тензоры энергетической эквивалентности, зависящие только от \mathbf{F} [11].

Определяющие соотношения для ортотропных упругопластических сред с конечными деформациями. Будем считать ГБКМ ортотропной упругопластической средой. Удельная свободная энергия Гельмгольца — потенциал ψ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \dot{\rho}\psi &= \dot{\rho}\psi(I_\alpha^{(0)}(\mathbf{C}^e))^{(n)} \\ &= \dot{\rho} \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{1}{2} l_{\alpha\alpha} (I_\alpha^{(0)})^{2s_\alpha} + l_{3+\alpha} (I_{3+\alpha}^{(0)})^{s_{3+\alpha}} \right) + \dot{\rho} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 l_{\alpha\beta} I_\alpha^{(0)} I_\beta^{(0)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $I_\alpha^{(0)}(\mathbf{C}^e)$, $\alpha = 1, \dots, 6$, — инварианты тензора упругих деформаций относительно группы ортотропии [12, 13]:

$$I_\alpha^{(0)}(\mathbf{C}^e) = \mathbf{e}_\alpha^2 \cdot \mathbf{C}^e = \varepsilon_{\alpha\alpha}^e; \quad I_{3+\alpha}^{(0)}(\mathbf{C}^e) = \frac{1}{2} \mathbf{O}_\alpha \cdot \mathbf{C}^e 2 = (\varepsilon_{\beta\gamma}^e)^2;$$

$\mathbf{e}_\alpha^2 = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha$ — тензоры; \mathbf{e}_α — векторы декартова базиса; $\mathbf{O}_\alpha = \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma + \mathbf{e}_\gamma \otimes \mathbf{e}_\beta$; $\alpha \neq \beta \neq \gamma$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$; $l_{\alpha\alpha}, l_{\alpha\beta}$ — упругие константы; $s_\alpha, s_{3+\alpha}$ — параметры упругой нелинейности материала.

Энергетические тензоры напряжений \mathbf{T} связаны с тензорами упругих деформаций \mathbf{C}^e уравнением состояния: $T = \mathbf{T} = \rho \partial\psi / \partial \mathbf{C}^e$. Подставляя в это соотношение выражения (3) для потенциала ψ , находим

$$\mathbf{T} = J^4 \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}^e, \quad (4)$$

где ${}^4\mathbf{M}$ — тензор нелинейных модулей упругости;

$${}^4\mathbf{M} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \left(\hat{l}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha^2 \otimes \mathbf{e}_\beta^2 \right) + \sum_{\alpha=1}^3 \left(\hat{l}_{\alpha+3,\alpha+3} \mathbf{O}_\alpha \otimes \mathbf{O}_\alpha \right) \quad (5)$$

($\tilde{l}_{\alpha\beta}$, $\tilde{l}_{3+\alpha}$ — нелинейные модули упругости: $\hat{l}_{\alpha\alpha} = s_\alpha l_{\alpha\alpha} (I_\alpha^{(0)})^{2s_\alpha-2}$, $\hat{l}_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}$, $\hat{l}_{\alpha+3,\alpha+3} = s_{\alpha+3} l_{\alpha+3,\alpha+3} (I_{\alpha+3}^{(0)})^{s_{\alpha+3}-1}$).

Дифференцируя по времени соотношение (4), запишем определяющие соотношения в скоростях:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T} = J^4 \mathbf{M} \cdot \left({}^4\tilde{\mathbf{X}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{C}^p}{dt} \right), \quad (6)$$

где ${}^4\tilde{\mathbf{X}} = {}^4\mathbf{X} - \mathbf{C}^e \otimes \mathbf{F}^{-1T}$; тензоры ${}^4\mathbf{X}$ зависят только от градиента деформаций \mathbf{F} [11].

Соотношения пластического течения анизотропных ГБКМ при больших деформациях. Для моделирования пластических свойств ГБКМ применим теорию больших пластических деформаций [11–17], в том числе теорию конечных пластических деформаций для анизотропных сред, разработанную в работах [9, 11–14]. Используя постулаты этой теории, полагаем, что в пространстве скалярных инвариантов Y_1^P существует поверхность течения, состоящая из N отдельных частей: $f_\beta = 0$, $\beta = 1, \dots, N$ (f_β — функции совместных инвариантов тензора напряжений и тензора пластических деформаций);

$$f_\beta = f_\beta(Y_\alpha^P, \theta, w_\alpha^P), \quad \beta = 1, \dots, N, \quad (7)$$

где $Y_\alpha^P = I_\alpha^{(0)}(\mathbf{T}_\gamma)$; $\mathbf{T}_\gamma = \mathbf{T} - H_\gamma \mathbf{C}^P$; $\alpha = 1, \dots, 6$, — совместные инварианты; H_α — функции упрочнения; H_α^0 — модули упрочнения (константы); n_α — степени упрочнения. Для параметров упрочнения H_α , $\alpha = 1, 2, 4-6$, принимаем степенную модель, а для параметра упрочнения при сжатии в поперечном к слоям ткани направлении — модель, учитывающую стабилизацию пластичности при предельном сжатии:

$$H_\alpha = H_\alpha^0 \left(I_\alpha^{(0)}(\mathbf{C}^P) \right)^{n_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 6;$$

$$H_3 = H_3^0 \left(1 - I_3^{(0)}(\mathbf{C}^P) / \varepsilon_{33C}^P \right)^{1-n_3} \left(I_3^{(0)}(\mathbf{C}^P) \right)^{n_3},$$

где ε_{33C}^P — деформация предельного поперечного сжатия ГБКМ (константа).

Общее соотношение градиентальности для скоростей пластических деформаций имеет вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}^P = h \sum_{\alpha=1}^N \dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{T}}. \quad (8)$$

Здесь $\dot{\lambda}_\alpha = \dot{\lambda}_\alpha(\mathbf{T}, \mathbf{C}^P, \mathbf{C}^P)$ — параметры нагружения; h — функция Хевисайда, являющаяся индикатором активного или пассивного нагружения (разгрузка).

С учетом (11) соотношение (13) можно записать:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}^p = \sum_{\alpha=1}^N \Psi_{\alpha} Y_{\alpha T}^p, \text{ где } \Psi_{\alpha} = h \sum_{\beta=1}^N \dot{\lambda}_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial Y_{\alpha}^p}; \quad Y_{\alpha T}^p = \frac{\partial Y_{\alpha}^p}{\partial \mathbf{T}}.$$
 Согласно вы-

ражениям (9) для инвариантов, уравнения для скоростей пластических деформаций принимают следующую форму:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}^p = \sum_{\alpha=1}^3 \left[\Psi_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}^2 + \Psi_{3+\alpha} (\mathbf{O}_{\alpha} \otimes \mathbf{O}_{\alpha}) \cdot \left(\mathbf{T} - H_{\alpha} \mathbf{C}^p \right) \right]. \quad (9)$$

Введем обозначения $I_{\gamma \pm}^{(O)}(\mathbf{T}_{\gamma}) = (|I_{\gamma}^{(O)}(\mathbf{T}_{\gamma})| \pm I_{\gamma}^{(O)}(\mathbf{T}_{\gamma})) / 2$, $\gamma = 1, 2, 3$. Как отмечалось ранее, пластические свойства ГБКМ проявляются только при сжатии вдоль направлений $O\bar{\mathbf{e}}_1$ и $O\bar{\mathbf{e}}_2$ укладки волокон (по основе и утку), при сжатии в поперечном направлении $O\bar{\mathbf{e}}_3$, а также при межслойных сдвигах. Данные эффекты анизотропной пластичности будем моделировать с помощью трех функций, описывающих пластичность:

при продольных сжатиях по основе и утку ГБКМ

$$\begin{aligned} 2f_1 \left(I_1^{(O)}(\mathbf{T}_1), I_2^{(O)}(\mathbf{T}_2), w_1^p, w_2^p \right) = \\ = \left(\frac{I_{1-}^{(O)}(\mathbf{T}_1)}{\sigma_{1S}(w_1^p)} \right)^2 + \left(\frac{I_{2-}^{(O)}(\mathbf{T}_1)}{\sigma_{2S}(w_2^p)} \right)^2 - 1 = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

при поперечном сжатии ГБКМ

$$2f_2 \left(I_3^{(O)}(\mathbf{T}_3), w_3^p \right) = \left(\frac{I_{3-}^{(O)}(\mathbf{T}_3)}{\sigma_{3S}(w_3^p)} \right)^2 - 1 = 0; \quad (11)$$

при межслойных сдвигах ГБКМ

$$f_3 \left(I_4^{(O)}(\mathbf{T}_4), I_5^{(O)}(\mathbf{T}_5), w_4^p, w_5^p \right) = \frac{I_4^{(O)}(\mathbf{T}_4)}{\sigma_{4S}^2(w_4^p)} + \frac{I_5^{(O)}(\mathbf{T}_5)}{\sigma_{5S}^2(w_5^p)} - 1 = 0. \quad (12)$$

Здесь $\sigma_{\gamma S}(w_{\gamma}^p)$ — функции начальной текучести по различным направлениям, зависящие от параметров динамичности w_{γ}^p , которые описывают повышение пределов текучести при возрастании скорости нагружения:

$$\sigma_{\gamma S}(w_{\gamma}^p) = \sigma_{\gamma S}^0(1 + w_{\gamma}^p), \quad w_{\gamma}^p = b_{\gamma} \int_0^t (t - \tau)^{m_{\gamma}} I_{\gamma}^{(o)}(\mathbf{T}(\tau)) d\tau,^{(n)}$$

где $\sigma_{\gamma S}^0$, b_{γ} , m_{γ} — константы, которые определяются экспериментально, далее будем полагать, что $m_{\gamma} = m$ для всех γ .

С учетом формул (10)—(12) функции ψ_{α} принимают вид

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha} &= \frac{h \dot{\lambda}_{\alpha} I_{\alpha-}^{(O)}(\mathbf{T}_{\alpha})^{(n)}}{\sigma_{\alpha S}^2(w_{\alpha}^p)}, \quad \alpha = 1, 2; \quad \psi_3 = \frac{h \dot{\lambda}_2 I_{3-}^{(O)}(\mathbf{T}_3)^{(n)}}{\sigma_{3S}^2(w_3^p)}; \\ \psi_4 &= \frac{h \dot{\lambda}_3}{2\sigma_{4S}^2(w_4^p)}; \quad \psi_5 = h \dot{\lambda}_3 \frac{\partial f_3}{\partial J_5^{(S)p}} = \frac{h \dot{\lambda}_3}{2\sigma_{5S}^2(w_5^p)}; \quad \psi_6 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Математическая формулировка динамической задачи взаимодействия ударника и преграды. Сформулируем в отсчетной конфигурации K^0 общую систему законов сохранения в лагранжевом описании, которая состоит из уравнений неразрывности, движения, совместности деформаций, а также кинематических соотношений, связывающих векторы скорости и перемещений [11]. К этой же системе присоединим определяющие соотношения (6), (9) для упругих и пластических деформаций, в результате получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \mathbf{f}; \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \mathbf{v}; \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} &= \nabla \otimes \mathbf{v}^T; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{T}^{(n)} &= J^4 \mathbf{R}^0 \cdot \left({}^4 \tilde{\mathbf{X}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{d \mathbf{C}^p}{dt} \right); \\ \frac{d}{dt} \mathbf{C}^p &= \sum_{\alpha=1}^3 \left[\psi_{\alpha} \bar{\mathbf{e}}_{\alpha}^2 + \frac{\Psi_{3+\alpha}}{2} (\mathbf{O}_{\alpha} \otimes \mathbf{O}_{\alpha}) \cdot \left(\mathbf{T} - H_{\alpha} \mathbf{C}^p \right) \right], \end{aligned}$$

где ∇ — набла-оператор в отсчетной конфигурации [17, 18]. К этим уравнениям присоединим соотношения (2) для тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа, уравнение неразрывности $\rho = \rho^0 / \det \mathbf{F}$, соотно-

шения (1) для энергетических тензоров деформаций, соотношения (13) для функций ψ_γ , соотношения (10)—(12) для условий пластичности и параметров нагружения λ_γ . Остальные обозначения введены ранее. Система (14) рассмотрена относительно следующих неизвестных функций: \mathbf{v} , \mathbf{u} , \mathbf{F} , \mathbf{T} , \mathbf{C}^p .

К системе (14) добавим граничные условия идеального контакта на части поверхности Σ_1^0 и условия на свободной поверхности Σ_2^0 :

$$\Sigma_1^0: \mathbf{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0, [\mathbf{v}] = 0, \quad \Sigma_2^0: \mathbf{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0. \quad (15)$$

Если происходит отскок ударника от преграды, на поверхности контакта Σ_1^0 соблюдается условие $\mathbf{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0$. Начальные условия к системе (14):

$$t = 0: \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{C}^p = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \lambda_\beta = 0. \quad (16)$$

Математическая формулировка задачи при прямом соударении. Рассмотрим случай прямого соударения, который значительно упрощает моделирование и сводится к рассмотрению осесимметричного варианта постановки задачи (14)—(16). Далее рассмотрим только случай моделей материала при $n = V$. Будем полагать также, что область $\overset{\circ}{V}$ в $\overset{0}{K}$ и тип анизотропии (группа симметрии G_s ударника и преграды) предполагают наличие оси симметрии OX^3 в лагранжевой системе координат X^i , в качестве которой выберем цилиндрическую систему координат: $X^1 = r$, $X^2 = \varphi$, $X^3 = z$. Тогда может быть сформулирована осесимметричная постановка указанной выше задачи (20)—(22). Запишем эту постановку в физических координатах, используя компонентную запись дифференциальных операторов и тензоров [19]:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial r v_r}{\partial t} &= \frac{\partial r P_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial r P_{rz}}{\partial z} - P_{\varphi\varphi}; \\ \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial r v_z}{\partial t} &= \frac{\partial r P_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial r P_{zz}}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} &= v_r; \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = v_z; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} T_{rr} \\ T_{\varphi\varphi} \\ T_{zz} \\ T_{rz} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} M_{1111} & M_{1122} & M_{1133} & 0 \\ M_{1122} & M_{1111} & M_{1133} & 0 \\ M_{1133} & M_{1133} & M_{3333} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2M_{1313} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{rr} \\ e_{\varphi\varphi} \\ e_{zz} \\ e_{rz} \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^p \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p \\ \varepsilon_{zz}^p \\ \varepsilon_{rz}^p \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{rr}}{\partial t} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; & \frac{\partial F_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= \frac{v_r}{r}; & \frac{\partial F_{zz}}{\partial t} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\ \frac{\partial F_{rz}}{\partial t} &= \frac{\partial v_r}{\partial z}; & \frac{\partial F_{zr}}{\partial t} &= \frac{\partial v_z}{\partial r}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{rr}^p}{\partial t} = \frac{h\lambda_1}{\sigma_{1S}^2(w_1^p)} (T_{rr} - H_1 \varepsilon_{rr}^p);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial t} = \frac{h\lambda_1}{\sigma_{2S}^2(w_1^p)} (T_{\varphi\varphi} - H_2 \varepsilon_{\varphi\varphi}^p).$$

Здесь $T_{11} = T_{rr}$, $T_{22} = T_{\varphi\varphi}$, $T_{33} = T_{zz}$ и T_{rz} — физические компоненты тензора \mathbf{T} в актуальной конфигурации; $e_{11} = e_{rr}$, $e_{22} = e_{\varphi\varphi}$, $e_{33} = e_{zz}$ и e_{rz} — физические компоненты тензора скоростей деформаций \mathbf{D} [11]; $P_{11} = P_{rr}$, $P_{22} = P_{\varphi\varphi}$, $P_{33} = P_{zz}$ и P_{rz} — физические компоненты тензора Пиолы — Кирхгофа \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \Delta(T_{rr}F_{rr} + T_{rz}F_{rz}); & P_{\varphi\varphi} &= \Delta(T_{\varphi\varphi}F_{\varphi\varphi}); \\ P_{zz} &= \Delta(T_{rz}F_{zr} + T_{zz}F_{zz}); & P_{rz} &= \Delta(T_{rr}F_{zr} + T_{rz}F_{zz}); \\ P_{zr} &= \Delta(T_{rz}F_{rr} + T_{zz}F_{rz}); \\ \Delta &= F_{\varphi\varphi}(F_{rr}F_{zz} - F_{rz}F_{zr}); & e_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}F_{rr} + \frac{\partial v_z}{\partial r}F_{zr}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r}F_{\varphi\varphi}; \quad e_{zz} = \frac{\partial v_r}{\partial z}F_{rz} + \frac{\partial v_z}{\partial z}F_{zz};$$

$$e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}F_{rz} + \frac{\partial v_z}{\partial z}F_{zr} + \frac{\partial v_z}{\partial r}F_{rr} + \frac{\partial v_r}{\partial z}F_{zz} \right).$$

Для параметра нагружения и пластических деформаций ε_{zz}^p в поперечном направлении и при межслойном сдвиге выполняются следующие соотношения, вытекающие из выражений (11) и (12):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz}^p &= \frac{B}{1 + B/\varepsilon_{33C}^p}; \quad B = h \left(\frac{T_{zz} - \sigma_{3S}(w_3^p)}{H_3^0} \right)^{\frac{1}{1-n_3}}; \\
 \varepsilon_{rz}^p &= h \left(\frac{T_{rz} - \sigma_{4S}(w_4^p)}{H_4^0} \right)^{\frac{1}{1-n_4}}; \quad \dot{\lambda}_1 = h\sigma_{1S}A_1 \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p); \\
 A_1 &= \left\{ \frac{T_{rr} - H_1\varepsilon_{rr}^p}{\sigma_{1S}} + \frac{1}{\sigma_{2S}} [\sigma_{1S}^2 - (T_{rr} - H_1\varepsilon_{rr}^p)^2]^{1/2} \right\}^{-1}; \\
 H_1 &= H_1^0 |\varepsilon_{rr}^p|^{-n_1}; \quad H_2 = H_2^0 |\varepsilon_{\varphi\varphi}^p|^{-n_2}; \\
 H_3 &= H_3^0 |\varepsilon_{zz}^p|^{-n_3}; \quad H_4 = H_4^0 |\varepsilon_{rz}^p|^{-n_4}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Будем далее полагать, что ударник является изотропным упругим телом, т. е. для него пластические деформации отсутствуют ($\varepsilon_{ij}^p = 0$).

Система уравнений (17)—(19) является замкнутой относительно 17 функций: $u_r, u_z, v_r, v_z, F_{rr}, F_{zz}, F_{rz}, F_{zr}, F_{\varphi\varphi}, T_{rr}, T_{zz}, T_{rz}, T_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{zz}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{rz}^p$, зависящих от r, z и t .

Граничные условия (16) на границе идеального контакта ударника и мишени и условия на свободной части поверхности имеют вид

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1: [P_{zz}] = 0, [P_{rz}] = 0, [v_r] = 0, [v_z] = 0; \\
 \Sigma_2: n_r P_{rz} + n_z P_{zz} = 0, \quad n_r P_{rr} + n_z P_{zr} = 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Начальные условия к системе (17):

$$\begin{aligned}
 t = 0: (u_r, u_z, v_r, v_z, F_{rz}, F_{zr}, T_{rr}, T_{zz}, T_{rz}, T_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p) = (0, \dots, 0), \\
 (F_{rr}, F_{zz}, F_{\varphi\varphi}) = (1, 1, 1),
 \end{aligned} \tag{21}$$

для ударника $t = 0$: $v_z = V_b$, где V_b — начальная скорость ударника в момент начала взаимодействия с преградой.

Матричное представление системы уравнений. Вводя координатные столбцы, элементами которых являются величины, стоящие под знаками производных в системе (17), получим:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= (u_r, u_z, r\rho v_r, r\rho v_z, F_{rr}, F_{zz}, F_{rz}, F_{zr}, F_{\varphi\varphi}, T_{rr}, T_{zz}, T_{rz}, T_{r\varphi}, \\
 &\quad \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{zz}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{rz}^p)^\top, \\
 \mathbf{F} &= (0, 0, rP_{rr}, rP_{zr}, v_r, 0, 0, v_z, 0, v_r, v_r, v_r, v_r, 0, 0, 0, 0)^\top, \\
 \mathbf{K} &= (0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -M_{1111}F_{rr}, -M_{1133}F_{rr}, -M_{1313}F_{rz}, \\
 &\quad -M_{1122}F_{rr}, 0, 0, 0, 0)^\top, \\
 \mathbf{G} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v_z, v_z, v_r, v_z, 0, 0, 0, 0)^\top, \\
 \mathbf{S} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -M_{1111}F_{zr}, -M_{1133}F_{zr}, -M_{1212}F_{rr}, \\
 &\quad -M_{1122}F_{zr}, 0, 0, 0, 0)^\top, \\
 \mathbf{W} &= (0, 0, rP_{rz}, rP_{zz}, 0, v_z, v_r, 0, 0, v_z, v_z, v_z, v_z, 0, 0, 0, 0)^\top, \\
 \mathbf{L} &= (0, 0, -1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, -M_{1133}F_{zz}, -M_{3333}F_{zz}, -M_{1313}F_{zr}, \\
 &\quad -M_{2233}F_{zz}, 0, 0)^\top, \\
 \mathbf{V} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v_r, v_r, v_r, v_r, 0, 0, 0, 0)^\top, \\
 \mathbf{N} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -M_{1133}F_{rz}, -M_{3333}F_{rz}, -M_{1313}F_{zz}, \\
 &\quad -M_{2233}F_{rz}, 0, 0, 0, 0)^\top, \\
 \mathbf{P} &= (v_r, v_z, -P_{\varphi\varphi}, -P_{zr}, 0, 0, 0, 0, v_r/r, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17})^\top;
 \end{aligned} \tag{22}$$

представим систему уравнений (17) в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \bar{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial r} + \bar{\mathbf{S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial r} + \bar{\mathbf{L}} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{U})}{\partial z} + \bar{\mathbf{N}} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{P}(\mathbf{U}), \tag{23}$$

где \mathbf{U} — столбец неизвестных; $\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{S}}$ — диагональные матрицы, ненулевыми элементами которых являются столбцы $\mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{L}, \mathbf{N}$; $\mathbf{P}(\mathbf{U})$ — вектор правой части, его элементы P_{14}, \dots, P_{17} определяются правой частью уравнений (17), а P_{10}, \dots, P_{13} имеют вид

$$P_{10} = M_{1122}F_{\varphi\varphi}v_r/r - M_{1111}P_{14} - M_{1122}P_{16} - M_{1133}P_{15};$$

$$P_{11} = M_{2233}F_{\varphi\varphi}v_r/r - M_{3311}P_{14} - M_{3333}P_{16} - M_{2233}P_{15};$$

$$P_{12} = M_{2222}F_{\varphi\varphi}v_r/r - M_{1122}P_{14} - M_{2233}P_{16} - M_{2222}P_{15};$$

$$P_{13} = -2M_{1313}P_{17}.$$

Для численного решения системы (23) с граничными (20) и начальными (21) условиями применялся метод ленточных адаптивных сеток, предложенный в работах [19–21].

Разностная схема метода предиктор-корректор. На основе описанной ранее методики построим разностную схему для решения поставленной задачи. Будем использовать схему, основанную на двухшаговой схеме решения недивергентных систем и использовании ленточно-адаптивной конечно-разностной сетки. Схема состоит из шагов предиктора, корректора и шага сглаживания, который нужен для устранения нефизических осцилляций, возникающих как побочный эффект двухшагового метода.

Шаг 1. Предиктор:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_j^{n+1/2} = & \mathbf{U}_j^n - \Delta t \mathbf{K}_j^n \left(\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{U}_{R_j}^n) - \mathbf{Y}(\mathbf{U}_j^n)}{S_{R_j} - S_j} Q_{21j} + \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{U}_{U_j}^n) - \mathbf{Y}(\mathbf{U}_j^n)}{T_{U_j} - T_j} Q_{22j} \right) - \\
 & - \Delta t \mathbf{S}_j^n \left(\frac{\mathbf{G}(\mathbf{U}_{R_j}^n) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_j^n)}{S_{R_j} - S_j} Q_{21j} + \frac{\mathbf{G}(\mathbf{U}_{U_j}^n) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_j^n)}{T_{U_j} - T_j} Q_{22j} \right) - \\
 & - \Delta t \mathbf{L}_j^n \left(\frac{\mathbf{W}(\mathbf{U}_{R_j}^n) - \mathbf{W}(\mathbf{U}_j^n)}{S_{R_j} - S_j} Q_{11j} + \frac{\mathbf{W}(\mathbf{U}_{U_j}^n) - \mathbf{W}(\mathbf{U}_j^n)}{T_{U_j} - T_j} Q_{12j} \right) - \\
 & - \Delta t \mathbf{N}_j^n \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{U}_{R_j}^n) - \mathbf{V}(\mathbf{U}_j^n)}{S_{R_j} - S_j} Q_{11j} + \frac{\mathbf{V}(\mathbf{U}_{U_j}^n) - \mathbf{V}(\mathbf{U}_j^n)}{T_{U_j} - T_j} Q_{12j} \right). \quad (24)
 \end{aligned}$$

Шаг 2. Корректор:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} = & \frac{1}{2} (\mathbf{U}_j^{n+1/2} + \mathbf{U}_j^n) - \\
 & - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_j^{n+1/2} \left(\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{U}_j^{n+1/2}) - \mathbf{Y}(\mathbf{U}_{L_j}^{n+1/2})}{S_j - S_{L_j}} Q_{21j} + \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{U}_j^{n+1/2}) - \mathbf{Y}(\mathbf{U}_{B_j}^{n+1/2})}{T_j - T_{B_j}} Q_{22j} \right) - \\
 & - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{S}_j^{n+1/2} \left(\frac{\mathbf{G}(\mathbf{U}_j^{n+1/2}) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_{L_j}^{n+1/2})}{S_j - S_{L_j}} Q_{21j} + \frac{\mathbf{G}(\mathbf{U}_j^{n+1/2}) - \mathbf{G}(\mathbf{U}_{B_j}^{n+1/2})}{T_j - T_{B_j}} Q_{22j} \right) - \\
 & - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_j^{n+1/2} \left(\frac{\mathbf{W}(\mathbf{U}_j^{n+1/2}) - \mathbf{W}(\mathbf{U}_{L_j}^{n+1/2})}{S_j - S_{L_j}} Q_{11j} + \frac{\mathbf{W}(\mathbf{U}_j^{n+1/2}) - \mathbf{W}(\mathbf{U}_{B_j}^{n+1/2})}{T_j - T_{B_j}} Q_{12j} \right) -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\Delta t}{2} \mathbf{N}_j^{n+1/2} \left(\frac{\mathbf{V}(\mathbf{U}_j^{n+1/2}) - \mathbf{V}(\mathbf{U}_{L_j}^{n+1/2})}{S_j - S_{L_j}} Q_{11j} + \frac{\mathbf{V}(\mathbf{U}_j^{n+1/2}) - \mathbf{V}(\mathbf{U}_{B_j}^{n+1/2})}{T_j - T_{B_j}} Q_{12j} \right) + \Delta t \mathbf{P}(\mathbf{U}_j^n). \quad (25)$$

Шаг 3. Искусственная вязкость.

Для устранения эффекта нефизической осцилляции, возникающего вследствие разности значений в четных и нечетных ячейках сетки, введем в задачу искусственную вязкость:

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_j^{n+1} + \alpha \mathbf{L}(\mathbf{U}_j^n), \quad (26)$$

где

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}_j^n) = \mathbf{U}_{R_j}^n + \mathbf{U}_{L_j}^n - 4\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_{U_j}^n + \mathbf{U}_{B_j}^n;$$

α — коэффициент искусственной вязкости, который выбирался переменным в зависимости от направления фронта ударной волны.

Моделирование процесса динамического разрушения преграды из ГБКМ. Представленные выше уравнения (17)—(21) позволяют рассчитывать все характеристики ударника и мишени при непрерывных процессах деформирования, т. е. при отсутствии разрушения. Однако сам процесс проникания ударников в преграду как раз и состоит из стадий зарождения трещин, их распространения и образования отверстия в преграде. Вопросам численного моделирования распространения трещин в композитах посвящены работы [22, 23]. При численных расчетах динамический процесс распространения трещин моделируется в два этапа.

1. Этап зарождения трещин. В процессе непрерывного деформирования в каждой расчетной точке ударника и мишени проверяют условие отсутствия разрушения: $\pi < 1$, где π — параметр повреждаемости материала, представляющий собой функции от инвариантов тензора истинных напряжений Коши (силовой критерий):

$$\pi = \pi(I_\gamma^{(O)}(\mathbf{T})).$$

Инварианты выбирают в соответствии с группой симметрии рассматриваемого материала (изотропные или ортотропные). В этом случае критерий прочности преграды и критерий пластичности подобны, в них пределы текучести заменяют на соответствующие пределы прочности.

Для ортотропных ГБКМ, на основе тканевых структур будем считать, что разрушение происходит только в случае, если осуществ-

ляется разрыв нитей по основе или утку тканей, тогда по аналогии с выражением (10) введем параметр повреждаемости

$$\pi = \left(\frac{I_{1+}^{(O)}(\mathbf{T})}{\sigma_{1T}} \right)^2 + \left(\frac{I_{2+}^{(O)}(\mathbf{T})}{\sigma_{2T}} \right)^2,$$

где σ_{1T} , σ_{2T} — пределы прочности на растяжение по основе и утку.

2. *Этап распространения трещин.* Если в какой-либо расчетной точке выполняется условие $\pi \geq 1$, это означает, что в локальной окрестности этой точки происходит зарождение макротрещины, которая затем начинает расти. При численном счете зарождение макротрещины моделируется обнулением компонент тензора напряжений Коши в данной расчетной точке: вместо определяющих соотношений упругопластичности в ней задают следующие условия: $T_{ij} = 0$.

Распространение трещины в преграде (или ударнике) происходит, если после выполнения предельного условия $\pi(x_*^i, t_*) \geq 1$ в точке x_*^i в момент времени t_* в какой-либо из ее соседних точек y_*^i в момент времени $t_* + \Delta t$ реализуется то же самое условие: $\pi(y_*^i, t_* + \Delta t) \geq 1$. В этом случае происходит прирост трещины на величину $\Delta x_*^i = y_*^i - x_*^i$.

Этап разлета осколков и проникания ударника в образовавшееся отверстие в данной работе не рассматривается.

Исходные данные для численного моделирования. В качестве численного примера применения разработанной модели и численного алгоритма рассмотрим задачу о прямом ударе ударника по преграде из ортотропного ГБКМ. Ударник считаем изотропной упругой средой.

При расчетах выберем следующие значения констант, характеризующих геометрические размеры преграды и ударника:

расчетный радиус преграды $r_N = 2 \cdot 10^{-2}$ м, максимальный радиус ударника $r_b = 4 \cdot 10^{-3}$ м; минимальный радиус ударника $r_a = 4 \cdot 10^{-3}$ м (цилиндрический ударник) и $r_a = 2 \cdot 10^{-3}$ м (с оживальной формой закругления передней части), длина ударника $z_b = 10^{-2}$ м, толщина преграды z_t изменялась в диапазоне $2,5 \cdot 10^{-3} \dots 8 \cdot 10^{-3}$ м.

Примем следующие значения констант:

для ударника (сталь)

$$M_{1111} = 200 \text{ ГПа}, M_{2222} = 60 \text{ ГПа}, M_{3333} = 77 \text{ ГПа}, \rho = 7800 \text{ кг/м}^3,$$

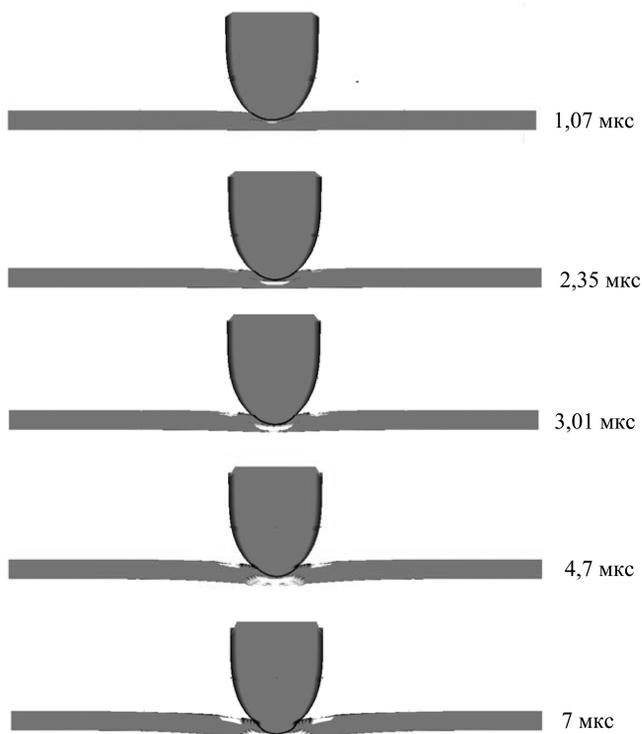
для ГБКМ

$$M_{1111} = M_{2222} = 50 \text{ ГПа}, M_{3333} = 0,5 \text{ ГПа}, M_{1122} = 1,5 \text{ ГПа},$$

$$\begin{aligned}
 M_{1133} = M_{2233} &= 0,015 \text{ ГПа}, \quad M_{1313} = 2,5 \text{ ГПа}, \quad \rho^{\circ} = 1500 \text{ кг/м}^3, \\
 \sigma_{1S} &= 10 \text{ МПа}, \quad H_1^0 = 0,2 \text{ ГПа}, \quad n_1 = 0,9, \\
 \sigma_{2S} &= 10 \text{ МПа}, \quad H_2^0 = 0,2 \text{ ГПа}, \quad n_2 = 0,9, \\
 \sigma_{3S} &= 0,1 \text{ МПа}, \quad H_3^0 = 2 \text{ ГПа}, \quad n_3 = 0,9, \\
 \sigma_{4S} &= 100 \text{ МПа}, \quad H_4^0 = 0,2 \text{ ГПа}, \quad n_4 = 0,9, \\
 \sigma_{1T} &= 0,5 \text{ ГПа}, \quad \sigma_{2T} = 0,5 \text{ ГПа}.
 \end{aligned}$$

Начальную скорость ударника V_b по оси OZ в момент встречи с преградой при нормальном ударе варьировали в диапазоне 300... 700 м/с.

Результаты численного моделирования. На рисунке представлены некоторые из полученных результатов расчетов для ударника с заостренной (оживальной) формой передней части при скорости удара $V_b = 300$ м/с. Толщина преграды 2,5 мм. Кроме того, показана общая картина взаимодействия ударника и преграды из ГБКМ в различные моменты времени проникания: от начального момента взаимодействия до разрушения преграды с образованием отверстия.



Картина разрушения преграды из ГБКМ толщиной 2,5 мм при воздействии ударника со скоростью 300 м/с

В инженерной практике создания защитных преград применяется параметр их баллистической эффективности [1]:

$$\beta_E = \frac{\Delta E_k}{S_M \rho h^0},$$

где S_M — площадь мишени ударника; ρ — начальная плотность материала преграды (ГБКМ); h^0 — начальная толщина преграды; ΔE_k — поглощенная кинетическая энергия ударника,

$$\Delta E_k = \frac{m_1}{2}(V_0^2 - V_k^2)$$

(m_1 — масса ударника; V_0 — начальная скорость ударника; V_k — конечная скорость ударника после пробивания преграды).

Было проведено вариантное численное моделирование пробивания преград из ГБКМ ударником массой $m_1 = 4$ г. Варьировались толщина h^0 преграды и скорость V_0 . Характеристики материала ГБКМ представлены ранее. Было использовано значение $S_M = 50 \text{ мм}^2$. В таблице приведены результаты численного моделирования, в том числе значения ΔE_k и β_E . Результаты расчетов для скоростей 500 и 700 м/с достаточно хорошо попадают в область разброса экспериментальных значений.

Параметры баллистической эффективности преграды из ГБКМ, рассчитанные с помощью разработанной модели

Толщина h^0 , мм	V_0 , м/с	V_k , м/с	ΔE_k , Дж	β_E , кДж/кг
2,5	300	138	140	745
2,5	500	340	268	1425
2,5	700	570	330	1755
5	300	40	176	468
5	500	260	364	968
5	700	380	691	1838
8	500	60	492	820
8	700	220	883	1471

Закключение. Разработана математическая модель динамического поведения ГБКМ на основе арамидных тканей. Модель позволяет учитывать основные эффекты поглощения энергии удара гибкими

текстильными композитными материалами: эффекты пластического сжатия ткани в поперечном направлении, эффект вытягивания нитей при поперечном ударе и эффект раздвигания нитей при образовании в ГБКМ отверстия. Модель основана на фундаментальных соотношениях теории конечных деформаций. Приведенный пример численной реализации данной модели для задачи о прямом ударе стального ударника по преграде из ГБКМ показал, что созданная модель и ее компьютерная реализация позволяют получить достаточно адекватную картину взаимодействия ударника с ГБКМ, в целом соответствующую экспериментально наблюдаемой картине деформирования и разрушения ГБКМ на арамидной основе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Харченко Е.Ф., Ермоленко А.Ф. *Композитные, текстильные и комбинированные бронематериалы*. Москва, ОАО ЦНИИСМ, 2013, 294 с.
- [2] *Материалы и защитные структуры для локального и индивидуального бронирования* / В.А. Григорян, И.Ф. Кобылкин, В.М. Миринин, Е.Н. Чистяков. Григорян В.А. ред. Москва, Изд-во РадиоСофт, 2008, 406 с.
- [3] Zhu D., Mobaster B., Rajan S.D. Dynamic testing of Kevlar-49 fabric. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 2011, vol. 23, pp. 230–239.
- [4] Tan V.B., Zeng X.S., Shim V.P.W. Characterization and constitutive modeling of aramid fibers at high strain rates. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, vol. 35, № 1, pp. 1303–1313.
- [5] Koh C.P., Shim V.P.W., Tan V.B.C., Tan B.L. Response of a high-strength flexible laminate to dynamic tension. *International Journal of Impact Engineering*, 2008, vol. 35, pp. 559–568.
- [6] Shim V.P.W., Lim C.T., Foo K.J. Dynamic mechanical properties of fabric armor // *International Journal of Impact Engineering*, 2001, vol. 25, pp. 1–15.
- [7] Lee Y.S., Wetzel E.D., Erges R.G., Wagner N.J. The ballistic impact characteristics of Kevlar woven fabrics impregnated with a colloidal shear thickening fluid. *Journal of Materials Science*, 2003, vol. 3, pp. 2825–2833.
- [8] Mossakovsky P.A., Bragov A.M., Kolotnikov M.E., Antonov F.K. Investigation of shear thickening fluid dynamic properties and its influence on the impact resistance of multilayered fabric composite barrier. *11-th LS-DYNA users Conference-2010*.
- [9] Димитриенко Ю.И. Анизотропная теория конечных упругопластических деформаций. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2003, № 2, с. 47–61.
- [10] Димитриенко Ю.И., Дзаганя А.Ю., Беленовская Ю.В., Воронцова М.А. Численное моделирование проникания ударников в анизотропные упругопластические преграды. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 4, с. 100–117.
- [11] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, Физматлит, 2009, 610 с.
- [12] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
- [13] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.
- [14] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 624 с.

- [15] Кондауров В.И., Кукуджанов В.Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упругопластической среды с конечными деформациями. В кн.: *Численные методы в механике твердого деформируемого тела*. Москва, ВЦ АН СССР, 1978, с. 84–121.
- [16] Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. Москва, Наука, 1986, 232 с.
- [17] Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. Москва, Высшая школа, 2001, 576 с.
- [18] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
- [19] Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. *Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике*. Москва, Физматлит, 2011, 280 с.
- [20] Димитриенко Ю.И., Захаров А.А. Автоматизированная система для моделирования газовых потоков методом ленточных адаптивных сеток. *Информационные технологии*, 2009, № 6, с. 12–16.
- [21] Димитриенко Ю.И., Коряков М.Н., Захаров А.А., Сыздыков Е.К. Развитие метода ленточно-адаптивных сеток на основе схем TVD для решения задач газовой динамики. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, № 2, с. 87–97.
- [22] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Шпакова Ю.В. Численное моделирование процессов разрушения тканевых композитов. *Вычислительная механика сплошной среды*, 2013, № 4, с. 389–401.
- [23] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Садовничий Д.Н., Гафаров Б.Р. Численное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков. *Композиты и наноструктуры*, 2013, № 3. С. 35–51.

Статья поступила в редакцию 10.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д. Моделирование динамических процессов деформирования гибких тканевых композиционных материалов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 05.
URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1236.html>

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 250 научных работ в области вычислительной механики, газодинамики, термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Димитриенко Ирина Донатовна родилась в 1962 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 40 научных работ по газодинамике горения твердых топлив, вычислительной механике. e-mail: irina.dimit@gmail.com

Simulation of dynamic deformation processes in flexible textile composites

© Yu.I. Dimitrienko I.D. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

A mathematical model of deforming flexible composites based on aramid fabrics under shock-wave influences is proposed. The model takes into account the deformation characteristic distinctions of this class of composite materials: the ability to deform without destruction at finite deformations, a significant dissimilarity of deformation patterns under tension and compression, the dependence of these patterns on the loading rate, the presence of pseudoplastic material properties caused by pulling the filaments from the fabric and others. Statement of the problem of flexible armor material dynamic deformation has been defined. The adaptive banded grid method has been applied for its decision in a two-dimensional formulation. An example of the numerical solution of the problem of high-speed impact of the hammer on the flexible armor material is given. Some specific effects of this class material deformation are analyzed.

Key words: *dynamic processes, flexible textile composites, numerical simulation, destruction, armor materials.*

REFERENCES

- [1] Kharchenko E.F., Ermolenko A.F. Kompositnyye, textilnyye i kombinirovannyye bronematerialy [Composite, Textile and Combined Armor Materials]. Moscow, TsNIISM Publ., 2013, 294 p.
- [2] Grigoryan V.A., Kobylkin I.F., Mirinin V.M., Chistyakov E.N. Materialy i zashchitnyye struktury dlya lokalnogo i individualnogo bronirovaniya [Materials and Protective Structures for Local and Individual Armoring]. Moscow, RadioSoft Publ., 2008, 406 p.
- [3] Zhu D., Mobaster B., Rajan S.D. Dynamic testing of Kevlar-49 fabric. Journal of Materials in Civil Engineering, 2011, vol. 23, pp. 230–239.
- [4] Tan V.B., Zeng X.S., Shim V.P.W. Characterization and constitutive modeling of aramid fibers at high strain rates. International Journal of Impact Engineering, 2008, vol. 35, no. 1, pp. 1303–1313.
- [5] Koh C.P., Shim V.P.W., Tan V.B.C., Tan B.L. Response of a high-strength flexible laminate to dynamic tension. International Journal of Impact Engineering, 2008, vol. 35, pp. 559–568.
- [6] Shim V.P.W., Lim C.T., Foo K.J. Dynamic mechanical properties of fabric armor. International Journal of Impact Engineering, 2001, vol. 25, pp. 1–15.
- [7] Lee Y.S., Wetzel E.D., Erges R.G., Wagner N.J. The ballistic impact characteristics of Kevlar woven fabrics impregnated with a colloidal shear thickening fluid. Journal of Materials Science, 2003, vol. 3, pp. 2825–2833.
- [8] Mossakovsky P.A., Bragov A.M., Kolotnikov M.E., Antonov F.K. Investigation of shear thickening fluid dynamic properties and its influence on the impact resistance of multilayered fabric composite barrier. 11th LS-DYNA users Conference-2010.
- [9] Dimitrienko Yu.I. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences, 2003, no. 2, pp. 47–61.

- [10] Dimitrienko Yu.I., Dzaganiya A.Yu., Belenovskaya Yu.V., Vorontsova M.A. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences, 2008, no. 4, pp. 100–117.
- [11] Dimitrienko Yu.I. Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy [Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Physmathlit Publ., 2009, 610 p.
- [12] Dimitrienko Yu.I. Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations. Springer, 2010, 722 p.
- [13] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [14] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
- [15] Kondaurov V.I., Kukudzhyanov V.N. Ob opredelyaushchikh uravneniyakh i chislennom reshenii nekotorykh zadach dinamiki uprugoplastichnoy sredy s konechnymi deformatsiyami. [Numerical Solutions of Some Problems of the Dynamics of Elastoplastic Medium with Finite Deformations]. In: Chislennye metody v mekhanike tverdogo deformatsionnogo tela. [On the Defining Equations and Numerical Techniques in Deformable Solids Mechanics]. Moscow, CC AS USSR, 1978, pp. 84–121.
- [16] Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu. I. Bolshie uprugoplastichnye deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya. [Large Elastoplastic Deformations: Theory, Algorithms, Applications]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 232 p.
- [17] Dimitrienko Yu.I. Tenzornoe ischislenie [Calculus of tensors]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001, 576 p.
- [18] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy. T.I. Tenzornoe ischislenie. [Continuum Mechanics. Vol. 1. Calculus of Tensors.]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.
- [19] Dimitrienko Yu.I., Kotenev V.P., Zakharov A.A. Metod lentochnykh adaptivnykh setok dlya chislennoy modelirovaniya v gazovoy dinamike [The Adaptive Banded Grid Method for Numerical Simulation in Gas Dynamics]. Moscow, Fismatlit Publ., 2011, 280 p.
- [20] Dimitrienko Yu.I., Zakharov A.A. Informatsionnye Tekhnologii – Information Technologies, 2009, no. 6, pp. 12–16.
- [21] Dimitrienko Yu.I., Koryakov M.N., Syzdykov E.K. Vestnic MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences, 2011, no. 2, pp. 87–97.
- [22] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P., Shpakova Yu.V. Vychislitelnaya mekhanika sploshnoy sredy — Computational Continuum Mechanics, 2013, no. 4, pp. 389–401.
- [23] Dimitrienko Yu.I., Sborshchikov S.V., Sokolov A.P., Sadovnichiy D.N., Gafarov B.R. Kompozity i nanostruktury — Composites and Nanostructures, 2013, no. 3, pp. 35–51.

Dimitrienko Yu. I. (b.1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci.(Phys.&Math.), Professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. The author of over 300 publications in the field of computational mechanics,

gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Dimitrienko I.D. (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Ph. D., Leading Scientist of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development at Bauman Moscow State Technical University. The author of over 40 publications in the field of gasdynamics of solid propellant combustion, computational mechanics. e-mail: irina.dimit@gmail.com