

## Моделирование устойчивости сжатого и скрученного стержня

© В.М. Дубровин, Т.А. Бутина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Предложен приближенный метод расчета устойчивости стержня при одновременном воздействии осевой сжимающей силы и крутящего момента. При этом предполагается, что главные изгибы жесткости стержня различаются незначительно, а кручение стержня весьма мало. Рассмотрены стержни с заделанными концами, с шарнирными опорами, а также стержень в виде сжатой и скрученной консоли. Для всех случаев получены графики зависимости параметра устойчивости стержня при различных значениях соотношения его главных изгибных жесткостей*

**Ключевые слова:** стержень, сжатие, кручение, устойчивость, изгибная жесткость, критическая сила, крутящий момент.

**Введение.** Вопросам устойчивости сжатого и скрученного призматического стержня с произвольной формой сечения посвящены работы [1–4]. В настоящей статье рассмотрен случай, когда главные изгибные жесткости стержня различаются незначительно, а кручение стержня весьма мало.

**Оценка устойчивости сжатого и скрученного стержня при различных условиях его закрепления.** При решении задачи устойчивости такого стержня в общих уравнениях Киргофа — Клебша можно пренебречь величинами второго порядка малости и приращением кручения стержня при его искривлении. Тогда эти уравнения принимают в вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ_x}{ds} + Q_z \frac{d\beta}{ds} &= 0, \\
 \frac{dM_x}{ds} + M_z \frac{d\beta}{ds} - Q_y &= 0, \\
 \frac{dQ_y}{ds} - Q_z \frac{d\alpha}{ds} &= 0, \\
 \frac{dM_y}{ds} - M_z \frac{d\alpha}{ds} + Q_x &= 0, \\
 \frac{dQ_z}{ds} = 0, \quad \frac{dM_z}{ds} = 0, \quad M_x = A \frac{d\alpha}{ds}, \quad M_y = B \frac{d\beta}{ds}, \\
 M_z = c\tau, \quad \alpha = -\frac{d\vartheta}{ds}, \quad \beta = \frac{du}{ds}, \quad r = \tau.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $Q_x, Q_y$  — перерезывающие силы в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $Q_z$  — продольная сила;  $M_x, M_y$  — изгибающие моменты в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $\alpha, \beta$  — углы поворота подвижного триедра осей  $x, y, z$  вокруг осей  $x_0$  и  $y_0$ , направленных по главным осям инерции поперечного сечения стержня;  $u, \vartheta$  — прогибы стержня в направлении осей  $x_0, y_0$ ;  $A, B$  — главные изгибные жесткости стержня;  $c$  — жесткость стержня при кручении;  $\tau, r$  — деформация кручения стержня до и после его искривления;  $ds$  — элемент упругой линии стержня.

При  $B < A$  из уравнений  $\frac{dQ_z}{ds} = 0$  и  $\frac{dM_z}{ds} = 0$  и условий статики следует, что  $M_z = M = \text{const}$ , где  $Q$  и  $M$  — осевая сила и крутящий момент, приложенные к концу стержня. Интегрирование остальных уравнений позволяет получить выражения для величин  $u, \vartheta, \alpha, \beta, M_x, M_y$ , содержащие в совокупности восемь постоянных интегрирования. Для подтверждения правомерности предполагаемой постановки задачи следует сравнить ее решение в случае скрученной консоли (при  $Q = 0$ ) с известным решением, выполненным в общей постановке в работах [5–8]. Как показывает статический метод, скрученный консольный стержень при решении задачи в рассматриваемой постановке, как и при решении в точной постановке, не имеет искривленной формы равновесия.

При решении задачи методом малых колебаний к свободному концу вертикального стержня прикрепляют массу  $m$  и рассматривают ее колебания в горизонтальной плоскости около равновесного положения. Обозначив координаты массы  $m$ , отнесенные к неподвижным осям  $x_0$  и  $y_0$  через  $x(t)$  и  $y(t)$ , составим уравнения движения массы  $m$ , пренебрегая при этом массой стержня. При следящем моменте  $M$  в каждый момент времени  $t$  на концах стержня, если начало координат разместить на заделанном конце, должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u = 0, \vartheta = 0, \alpha = 0, \beta = 0 \text{ при } s = 0; \\ u = x(t), \vartheta = y(t), M_x = 0, M_y = 0 \text{ при } s = l, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $l$  — длина стержня.

При  $P = 0$  из уравнений (1) и граничных условиях (2) следуют уравнения движения массы  $m$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \frac{M}{D}(dx - by) = 0, \\ m\ddot{y} - \frac{M}{D}(ex - ay) = 0, \end{aligned}$$

где

$$a = A\sqrt{AB}(\sin 2nl - 2nl \cos 2nl);$$

$$b = AB(1 - \cos 2nl - 2nl \sin 2nl + 2n^2l^2);$$

$$d = a\frac{B}{A}; \quad e = -b; \quad D = ad - be; \quad n = \frac{M}{2\sqrt{AB}}.$$

Условия устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня имеют вид

$$a + d > 0, \quad ad - be > 0, \quad (a - d)^2 + 4be > 0.$$

При  $A \neq B$  первые два условия выполняются, а из третьего условия следует характеристическое уравнение

$$(A - B)(\sin 2nl - 2nl \cos 2nl) - 2\sqrt{AB}(1 - \cos 2nl - 2nl \sin 2nl + 2m^2l^2) = 0. \quad (3)$$

Наименьший положительный корень этого уравнения  $(nl)_{кр}$  соответствует критическому углу скручивания стержня, т. е.

$$\theta_{кр} = 2(nl)_{кр} \frac{\sqrt{AB}}{C}.$$

Так, при малых значениях  $(nl)_{кр}$  для стержня эллиптического сечения

$$\theta_{кр} = \frac{4}{3}(1 + \mu) \left[ \frac{A - B}{A} + \frac{(A - B)^2}{2AB} \right], \quad (4)$$

где  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

При небольшом различии величин  $A$  и  $B$  в формуле (4) можно пренебречь слагаемым  $\frac{(A - B)^2}{2AB}$  по сравнению с  $\frac{A - B}{A}$  и тогда

$$\theta_{кр} = \frac{4}{3}(1 + \mu) \frac{A - B}{B}, \quad \text{т. е. получаем известное решение [9, 10].}$$

Ниже приведены значения критического угла скручивания стержня эллиптического сечения при приближенном и точном решениях для различных значений отношения изгибных жесткостей:

$k = B/A$ .....	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0
$\theta_{кр}$ (точное решение).....	0	0,394	0,972	1,862	2,757	3,274
$\theta_{кр}$ (приближенное решение).....	0	0,356	0,712	1,066	1,424	1,778

Следовательно, при решении задачи устойчивости равновесия стержня, подвергающегося кручению, в случае, когда их главные изгибные жесткости  $A$  и  $B$  мало отличаются друг от друга и отношение  $B/A$  лежит в пределах  $0,65 \leq B/A \leq 1,0$ , можно использовать приближенную систему уравнений (1).

При совместном действии величин  $P$  и  $M$  из уравнений (1) получаем

$$P = 4c\sqrt{AB} \frac{\varphi^2}{l^2}, \quad M = 2(1-c)\sqrt{AB} \frac{\varphi}{l} \sqrt{\frac{1-c(1-\sqrt{B/A})^2}{(1-c)^2 \sqrt{B/A}}}, \quad (5)$$

где  $c = -n_2/n_1$ ;  $\varphi = n_1 l$ ;

$$2n_{1,2} = \sqrt{\frac{M^2 + p(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2}{4AB}} \pm \sqrt{\frac{M^2 - p(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2}{4AB}},$$

Формулы (5) можно объединить в одну общую формулу вида

$$\frac{M^2}{4AB\gamma} + \frac{P}{B} = \left(\frac{\pi}{vl}\right)^2. \quad (6)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{(1-c\sqrt{B/A})(\sqrt{B/A}-c)\varphi_{кр}^2}{(\pi/v)^2 \sqrt{B/A} - 4c\varphi_{кр}^2}, \quad (7)$$

( $\varphi_{кр}^2$  — наименьший отличный от нуля корень характеристического уравнения).

Параметр  $c$  изменяется в пределах  $-1,0 \leq c \leq \sqrt{B/A}$ ,  $c > 0$ ,  $P > 0$  при сжатии,  $c < 0$ ,  $P < 0$  — при растяжении стержня.

Если стержень с заданными концами, удобно поместить начало координат в середине его длины. При этом граничные условия и характеристические уравнения принимают вид

$$u = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0 \quad \text{при } s = \pm \frac{l}{2},$$

$$\omega \sin \varphi \left( \frac{\sin c \varphi}{c \varphi} - \cos c \varphi \right) + \sin c \varphi \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} - \cos \varphi \right) = 0, \quad (8)$$

$$\sin \varphi \left( \frac{\sin c \varphi}{c \varphi} - \cos c \varphi \right) + \omega \sin c \varphi \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} - \cos \varphi \right) = 0,$$

где

$$\omega = \frac{\sqrt{B/A} - c}{1 - c\sqrt{B/A}}. \quad (9)$$

При изменении отношения  $B/A$  в пределах  $0 \leq B/A \leq 1,0$  параметр  $\omega$  также находится в пределах  $0 \leq \omega \leq 1,0$ .

В общем случае, когда  $A \neq B$ ,  $P \neq 0$ ,  $M \neq 0$ , уравнения (6) можно решить следующим образом. Задавая различные значения  $B/A$  в интервале от 0 до 1,0 и изменяя при каждом из них параметр  $c$  от  $-1,0$  до  $\sqrt{B/A}$  по формуле (9), определяем соответствующее значение  $\omega$ . Затем,

решая уравнение (8) при каждом значении  $\omega \sin \varphi \left( \frac{\sin C\varphi}{C\varphi} - \cos C\varphi \right) +$

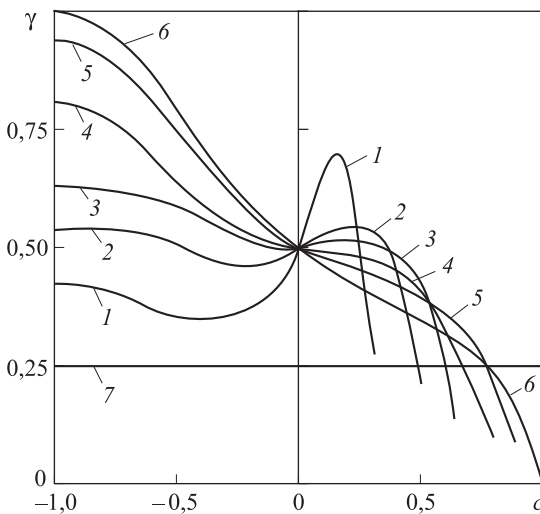
$+\sin C\varphi \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} - \cos \varphi \right) = 0$ , находим наименьший, не равный нулю, корень каждого из них. Из каждой пары полученных корней выбираем

меньший, который и является критическим значением  $\varphi_{кр}$ . Подстановка найденного значения  $\varphi_{кр}$  в формулу (7) при  $\nu = 0,5$  позволяет

получить соответствующее значение параметра  $\gamma$ . Изменение параметра  $\gamma$  при различных значениях  $k = B/A$  приведено на рис. 1. В

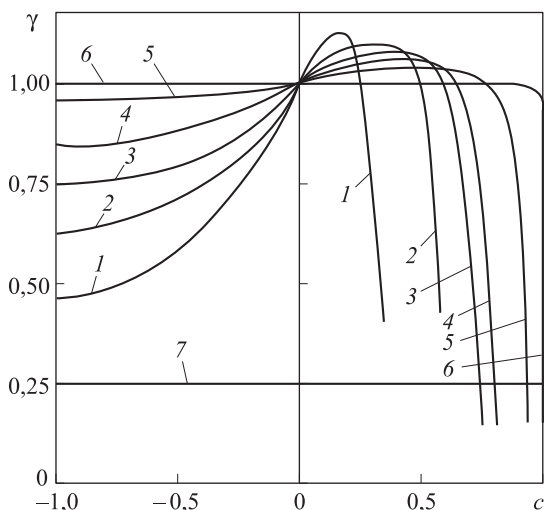
случае стержня с шарнирными опорами как при осевом, так и при следящем крутящих моментах задача сводится к решению двух независимых уравнений:

$$\omega \sin \varphi \cos c\varphi + \cos \varphi \sin c\varphi = 0; \quad \omega \cos \varphi \sin c\varphi + \sin \varphi \cos c\varphi = 0.$$



**Рис. 1.** Изменение параметра устойчивости стержня с шарнирными опорами при  $k = 0,1$  (1);  $0,3$  (2);  $0,5$  (3);  $0,7$  (4);  $0,9$  (5);  $1,0$  (6);  $0$  (7)

Изменения параметра  $\gamma$  при  $\nu = 1$  представлено на рис. 2.



**Рис. 2.** Изменение параметра устойчивости стержня с шарнирными опорами при  $k = 0,1$  (1);  $0,3$  (2);  $0,5$  (3);  $0,7$  (4);  $0,9$  (5);  $1,0$  (6);  $0$  (7)

При  $A = B$  угол  $\varphi_{кр} = \frac{\pi}{1+c}$ ,  $\gamma = 1$  и из выражения (6) следует известная формула Гринхилла [1, 2]:

$$\frac{M^2}{4B^2} + \frac{P}{B} = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

В случае сжатой и скрученной консоли как при осевом, так и следящем моментах задача сводится к решению характеристического уравнения

$$\chi_1^2 \varphi^2 \left[ \omega(1+c^2) - 2c\omega \sin 2\varphi \sin c\varphi + c(1+\omega^2) \cos 2\varphi \cos 2c\varphi \right] = 0, \quad (10)$$

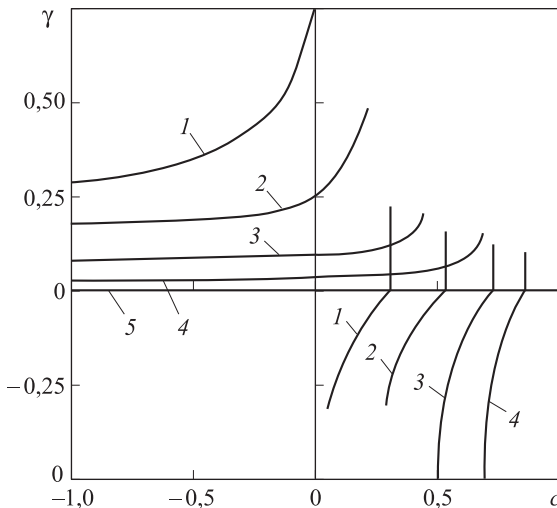
где

$$\chi_1 = \frac{2(n_1 A + n_2 \sqrt{AB})}{M}.$$

Можно показать, что при  $\omega \neq 0$  уравнение (10) имеет единственный корень  $\varphi = 0$ . Следовательно, прямолинейная форма равновесия стержня является единственной. Решение задачи методом малых колебаний в той же постановке, что и при чистом кручении стержня, приводит к двум характеристическим уравнениям. Одно из них совпадает с уравнением (10), другое имеет вид [11]:

$$\begin{aligned}
 & c^3(1-\omega^2)^2(c\sin 2\varphi\cos 2c\varphi - \cos 2\varphi\sin 2c\varphi) - \\
 & -4\omega\left[c(\omega-c)\sin 2\varphi\sin 2c\varphi + c^2(c-\omega\cos 2c\varphi)(1-\cos 2\varphi) - \right. \\
 & \quad \left. -(\omega-c\cos 2\varphi)(1-\cos 2c\varphi)\right] \times \\
 & \times \left[ c(1-c\omega)\sin 2\varphi\sin 2c\varphi + c^2(c\omega - \cos 2c\varphi)(1-\cos 2\varphi) - \right. \\
 & \quad \left. -(1-c\omega\cos 2\varphi)(1-\cos 2c\varphi)\right] = 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Из уравнения (10) находим угол  $\varphi_{\text{кр}}$  при чистом осевом сжатии стержня, когда  $M = 0$ ,  $\omega = 0$ ,  $c = \sqrt{B/A}$ . Решая уравнение (11), определяем угол  $\varphi_{\text{кр}}$  при  $P \neq 0$ ,  $M \neq 0$  или  $P = 0$ ,  $M \neq 0$ . Нетрудно показать, что при чистом кручении ( $c = 0$ ,  $\omega = \sqrt{B/A}$ ) уравнение (11) совпадает с уравнением (3). Изменение угла  $\gamma$  в этом случае приведено на рис. 3: кривые претерпевают разрыв непрерывности, обусловленный тем, что с увеличением крутящего момента от нуля до некоторого значения критическая сила  $P_{\text{кр}}$  возрастает, затем начинает убывать и переходит через эйлеровское значение, которому соответствует разрыв непрерывности. С приближением отношения  $B/A$  к единице кривые изменения приближаются к оси абсцисс, т. е. усиливается влияние кручения на устойчивость стержня.



**Рис. 3.** Изменение параметра устойчивости стержня в виде консоли при  $k = 0,1$  (1);  $0,3$  (2);  $0,5$  (3);  $0,7$  (4);  $1,0$  (5)

При  $A = B$  характеристическое уравнение имеет единственный корень, равный нулю, и, согласно (10), параметр  $\gamma = 0$ . Таким обра-

зом, при любом малом значении крутящего момента нарушается зависимость (6).

Уравнения (1) можно привести совместным решением к системе следующих двух уравнений [12]:

$$B \frac{d^2 u}{ds^2} + M \frac{d \vartheta}{ds} + Pu + s \delta P_1 = \varepsilon_1;$$

$$A \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + M \frac{du}{ds} + P \vartheta + s \delta P_2 = \varepsilon_2,$$

где  $\delta P_1$ ,  $\delta P_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  — постоянные интегрирования, причем  $\delta P_1$  и  $\delta P_2$  являются реакциями опор.

Следует иметь в виду, что пренебрежение постоянными интегрирования может приводить к ошибочным результатам, так как при этом не все граничные условия удовлетворяются.

### Выводы.

1. Предложенная методика оценки устойчивости сжатого и скрученного стержня позволяет получить оценку его устойчивости при различных способах закрепления стержня: с заделанными концами, с шарнирными опорами, консоли;

2. Полученные результаты справедливы, если соотношение главных изгибных жесткостей находится в пределах  $0,65 \leq B/A \leq 1,0$ .

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. Москва, Наука, 1973, 400 с.
- [2] *Расчеты на прочность в машиностроении*. Понамарева С.Д., ред. Москва, Машгиз, 1959, т. 3. 861 с.
- [3] Шашков И.Е. К вопросу об устойчивости сжатого и скрученного стержня с неравными изгибными жесткостями. *Прикладная механика*, 1976, т. 12, № 1, с. 71–76.
- [4] Шашков И.Е. Об устойчивости сжатого и скрученного стержня. *Прикладная механика*, 1978, т. XIV, № 2, с. 87–94.
- [5] Жилин П.А. *Актуальные проблемы механики*. Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН, 2006, 306 с.
- [6] Работнов Ю.Н. *Проблемы механики деформируемого твердого тела*. Москва, Наука, 1991, 194 с.
- [7] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Основы механики твердых сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Баумана, 2011, т. 4, 560 с.
- [8] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Баумана, 2011, т. 2, 560 с.
- [9] Фролов К. В. *Избранные труды*. Москва, Наука, 2007, 526 с.
- [10] Пиковский, Розенблюм Н.Г., Куртс Ю. *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*. Москва, Техносфера, 2003, 493 с.



- [11] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967, 987 с.
- [12] Бутина Т.А., Дубровин В.М. Устойчивость цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Спец. вып. № 3 Математическое моделирование*, 2012, с. 127–133.

Статья поступила в редакцию 10.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование устойчивости сжатого и скрученного стресса. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 5.  
URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1235.html>

**Дубровин Виктор Митрофанович** родился в 1934 г., окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета в 1958 г. Канд. тех. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» и кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области прочности и устойчивости деформируемых систем. Автор пяти изобретений по закрытой тематике. Награжден медалями «За доблестных труд», «Ветеран труда», а также двумя знаками заместителя министра обороны «Победитель социалистического соревнования». Принимал участие в испытаниях ядерного оружия на Семипалатинском полигоне, ветеран подразделения особого риска РФ. Область научных интересов: динамика, прочность и устойчивость деформируемых систем; ползучесть конструкционных материалов. e-mail: [vmDubrovinvm1934@mail.ru](mailto:vmDubrovinvm1934@mail.ru)

**Бутина Татьяна Александровна** родилась в 1950 г., окончила факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Награждена медалями им. М.В. Келдыша и им. Ю.А. Гагарина. Область научных интересов: прочность и устойчивость деформируемых систем. e-mail: [butinata@mail.ru](mailto:butinata@mail.ru)

## Modelling the stability of compressed and twisted rod

© V.M. Dubrovin, T.A. Butina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*To calculate the stability of a rod under simultaneous effect of axial compressive force and torque we offer an approximate method. It is assumed that the main rod bending rigidity differs slightly, and the rod torsion is very small. We considered rods with clamped ends, with pivot bearings, and rod in the form of a compressed and twisted console. For all cases we received diagrams of dependence of the rod stability parameter for different values of the ratio of its principal bending rigidities.*

**Keywords:** rod, compression, torsion, stability, flexural rigidity, crippling load, torque.

### REFERENCES

- [1] Feodosyev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Selected problems and questions on resistance of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 400 p.
- [2] Ponamarev S.D., ed. *Raschety na prochnost' v mashinostroenii* [Strength analysis in engineering]. Moscow, Mashgiz Publ., 1959, vol. 3, 861 p.
- [3] Shashkov I.E. *Prikladnaya mekhanika — Applied Mechanics*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 71–76.
- [4] Shashkov I.E. *Prikladnaya mekhanika — Applied Mechanics*, 1978, vol. XIV, no. 2, pp. 87–94.
- [5] Zhilin P.A. *Aktualnye problemy mekhaniki. Sbornik statey* [Actual Problems in Mechanics. Coll. papers]. St.-Petersburg, Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, 2006, 306 p.
- [6] Rabotnov Yu.N. *Problemy mekhaniki deformiruemogo tela* [Problems of solid mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 194 p.
- [7] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
- [8] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [9] Frolov K.V. *Izbrannye Trudy* [Selected Works]. Moscow, Nauka Publ., 2007, 526 p.
- [10] Pikovskiy A., Rozenblyum M., Kurts Yu. *Sinkhronizatsiya: Fundamentalnoe nelineynoe yavlenie* [Synchronization: The fundamental non-linear phenomenon]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2003, 496 p.
- [11] Volmir A.S. *Ustoichivost' deformiruemyykh system* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 987 p.
- [12] Butina T.A., Dubrovin V.M. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations*, 2012, iss. 2(2). Available at: <http://engjournal.ru/articles/44/44.pdf>

**Dubrovin V.M.** (b. 1934) graduated from the Faculty of Mathematics and Mechanics of the Saratov State University in 1958. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics and of the Higher Mathematics Departments of Bauman Moscow State Technical University. Research interests: dynamics, strength and stability of deformable systems; creep of structural materials. He is the author of five inventions. e-mail: dubrovinvm1934@mail.ru

**Butina T.A.** (b. 1950) graduated from the Faculty of Management and Applied Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology in 1974. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. She specializes in the field of strength and stability of deformable systems. e-mail: butinata@mail.ru