

## Моделирование упруго-диссипативных характеристик слоисто-волоконистых композитов

© Ю.И. Дмитриенко<sup>1</sup>, Е.А. Губарева<sup>1</sup>,  
Н.Н. Федонюк<sup>2</sup>, С.В. Сборщиков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

<sup>2</sup>ОАО «Крыловский государственный научный центр»,  
Санкт-Петербург, 196158, Россия

*Разработана методика расчета упруго-диссипативных характеристик полимерных композиционных материалов слоисто-волоконистой структуры при установившихся циклических колебаниях, основанная на применении теории асимптотического осреднения периодических структур. Предложен алгоритм сравнения различных структур слоисто-волоконистых композитов с точки зрения реализации наиболее высоких значений их упруго-диссипативных характеристик, основанный на построении диаграммы материалов в координатах «действительная часть комплексного модуля упругости в плоскости укладки волокон — тангенс угла потерь для того же модуля». Этот алгоритм может быть использован для поиска оптимальных структур армирования слоисто-волоконистых композитов. Приведены примеры численного моделирования упруго-диссипативных характеристик слоисто-волоконистых композитов с двумя, тремя и четырьмя системами нитей.*

**Ключевые слова:** вязкоупругие композиты, слоисто-волоконистые композиты, упруго-диссипативные свойства, установившиеся колебания, тангенс угла потерь, комплексные модули упругости, метод асимптотического осреднения.

**Введение.** Свойство диссипации (рассеивания) энергии является чрезвычайно важным для современных авиационных и судовых конструкций, длительно эксплуатируемых в условиях воздействия вибрационных нагрузок, как правило, вызванных работой двигательных систем. Для конструкций из металлических материалов применяют специальные системы демпфирования, обеспечивающие гашение вибраций, однако эти системы эффективны в достаточно узком диапазоне частот. В настоящее время весьма перспективным является использование в качестве силовых элементов авиационных и судовых конструкций полимерных композиционных материалов (ПКМ). Они обладают многими замечательными свойствами — низкой плотностью, высокой удельной жесткостью и прочностью, повышенной стойкостью в агрессивных средах, в частности в морской воде, и одновременно высокими диссипативными свойствами, что позволяет отказаться от создания специализированных систем демпфирования.

Исследованию диссипативных характеристик ПКМ, несмотря на длительную историю применения композитов в технике, посвящено относительно малое количество работ в литературе [1–7]. По-

видимому, это связано с тем, что в традиционной области применения композитов — ракетно-космической технике — свойство диссипации ПКМ практически не было востребовано. Лишь при внедрении композитов в гражданской технике, где требования по экологичности, безопасности, эргономичности, экономичности играют не менее важную роль, чем требования обеспечения целостности, надежности и долговечности, проблема разработки методов расчета диссипативных характеристик композитов стала достаточно острой.

Диссипация энергии в материалах при вибрационном нагружении обусловлена внутренним трением, и с точки зрения термомеханики деформируемых твердых сред это явление описывается моделями термовязкоупругих сред [2, 5, 8–10]. Разработке моделей вязкоупругого поведения композитов посвящены работы [11–17].

Для практических целей представляет интерес поиск оптимальных структур композитов, обеспечивающих наиболее высокие диссипативные характеристики при наименьшем снижении упруго жесткостных характеристик. Целью настоящей работы являются моделирование упруго-диссипативных характеристик ПКМ слоисто-волокнутой структуры, которые широко применяются при создании авиационных и судовых конструкций, и разработка методики для поиска оптимальных структур, исходя из анализа упруго-диссипативных свойств композитов.

**Задача линейной вязкоупругости при моногармонических колебаниях.** Рассмотрим задачу механики квазистатических моногармонических колебаний линейно-вязкоупругих сред [10] при относительно невысоких частотах, когда инерционными силами можно пренебречь:

$$\begin{cases} \nabla \boldsymbol{\sigma}^* = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}^* = {}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) \boldsymbol{\varepsilon}^*, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u}^* + \nabla \otimes \mathbf{u}^{*T}), \\ \boldsymbol{\sigma}^* |_{\Sigma_1} \mathbf{n} = \mathbf{S}^*, \quad \mathbf{u}^* |_{\Sigma_2} = \mathbf{u}^{e*}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\nabla$  — оператор «набла» [18];  $\boldsymbol{\sigma}^*$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ ,  $\mathbf{u}^*$  — комплексные амплитуды тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений;  $\mathbf{S}^*$ ,  $\mathbf{u}^{e*}$  — комплексные амплитуды колебаний внешних поверхностных нагрузок и заданных перемещений;  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали;  ${}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega})$  — тензор 4-го ранга — тензор комплексных модулей упругости:

$${}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) = {}^4\mathbf{C} - {}^4\mathbf{K}^*(\tilde{\omega}), \quad {}^4\mathbf{K}^*(\tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} {}^4\mathbf{K}(\tau) e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau. \quad (2)$$

Здесь  ${}^4\mathbf{C}$  — тензор модулей упругости;  ${}^4\mathbf{K}(\tau)$  — тензор ядер релаксации;  $\tilde{\omega} = \omega a_\theta(\theta)$  — приведенная частота колебаний ( $\omega$  — заданная частота колебаний,  $a_\theta(\theta) = \exp\left(-\frac{a_1\Delta\theta}{a_2 + \Delta\theta}\right)$  — функция температурного сдвига, где  $a_1, a_2$  — константы;  $\theta$  — температура;  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ ).

Все векторы и тензоры в (1) являются комплексными и представляются в виде

$${}^4\mathbf{C}^* = \text{Re}({}^4\mathbf{C}^*) + i \text{Im}({}^4\mathbf{C}^*).$$

**Вязкоупругие характеристики изотропных компонентов композитов.** Для изотропных вязкоупругих материалов тензор модулей упругости  ${}^4\mathbf{C}$  имеет две независимые константы:  $K$  — модуль объемного сжатия и  $G$  — модуль сдвига, а тензор ядер релаксации  ${}^4\mathbf{K}(\tau)$  — две независимые функции  $K_K(t), K_G(t)$  — функции объемной и сдвиговой релаксации. Для большинства твердых сред объемной релаксацией можно пренебречь [5, 10], тогда тензоры  ${}^4\mathbf{C}$  и  ${}^4\mathbf{K}(t)$  можно представить в следующем виде [10]:

$${}^4\mathbf{C} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2G\Delta, \quad {}^4\mathbf{K}(t) = K_G(t)(\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2\Delta), \quad (3)$$

где  $\Delta$  — единичный тензор 4-го ранга;  $\mathbf{E}$  — метрический тензор. После подстановки выражения (3) в (2), получаем

$${}^4\mathbf{C}^*(\tilde{\omega}) = \left(K - \frac{2}{3}G^*(\tilde{\omega})\right)\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2G^*(\tilde{\omega})\Delta. \quad (4)$$

Здесь комплексный модуль сдвига

$$G^*(\tilde{\omega}) = G - K_G^*(\tilde{\omega}), \quad (5)$$

где  $K_G^*(\tilde{\omega}) = \int_0^{+\infty} K_G(\tau)e^{-i\tilde{\omega}\tau} d\tau$ .

Принимаем для функции сдвиговой релаксации  $K_G(\tau)$  модель экспоненциальных ядер, которая достаточно хорошо описывает кривые релаксации полимеров:

$$K_G(\tau) = \sum_{\gamma=1}^n A_\gamma e^{-\tau/\tau_\gamma}, \quad (6)$$

где  $A_\gamma, \tau_\gamma$  — вязкоупругие константы материала (спектры релаксации и времени релаксации). Тогда для комплексного модуля сдвига  $G^*$  имеем следующее аналитическое выражение от приведенной частоты колебаний:

$$G^* = G' + iG'', \quad G' = G + \sum_{\gamma=1}^n \frac{A_\gamma}{1 + (\tilde{\omega}\tau_\gamma)^2}, \quad G'' = \sum_{\gamma=1}^n \frac{A_\gamma \omega \tau_\gamma}{1 + (\omega\tau_\gamma)^2}. \quad (7)$$

В рамках рассмотренной модели вязкоупругие характеристики изотропных материалов характеризуются следующим набором констант:  $G, K, A_\gamma, \tau_\gamma, a_1, a_2$ . Комплексный модуль упругости матрицы  $E^*$  и комплексный коэффициент Пуассона  $\nu^*$  вычисляются по формулам, формально совпадающим с формулами для упругих констант:

$$E^* = \frac{9KG^*}{3K + G^*}, \quad \nu^* = \frac{3K - 2G^*}{6K + 2G^*}.$$

**Вязкоупругие характеристики однонаправленных волокнистых композитов.** Однонаправленные композиционные материалы (1D-композиты), состоящие из моноволокон, собранных в нити и связанных между собой полимерной матрицей, представляют собой *трансверсально-изотропные* материалы, даже если матрица и моноволокна являются изотропными.

Для вычисления компонент тензоров комплексных модулей упругости 1D-композита  $C_{ijkl}^*$  воспользуемся приближенной моделью смесового типа [19–26], в которой каждая нить рассматривается как система большого числа параллельно расположенных однонаправленных (1D) элементов цилиндрической формы. Моноволокна далее полагаются упругими, а матрица — вязкоупругой. Комплексные модули упругости нити можно вычислить по следующим формулам:

$$E_L^* = E_f \varphi_f + E_m^* (1 - \varphi_f), \quad E_T^* = \left( \frac{\varphi_f}{E_f} + \frac{1 - \varphi_f}{E_m^*} \right)^{-1},$$

$$\nu_L^* = \nu_f \varphi_f + \nu_m^* (1 - \varphi_f), \quad \nu_T^* = \nu_m^*, \quad (8)$$

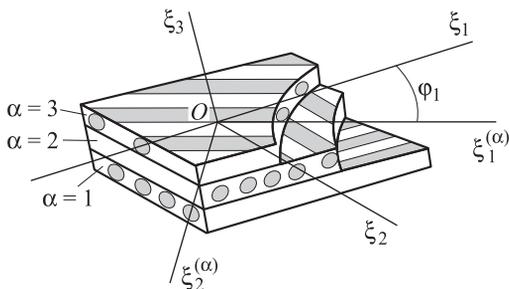
$$G_L^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_f (1 + \nu_f)}{E_f} + \frac{(1 - \varphi_f)(1 + \nu_m^*)}{E_m^*} \right)^{-1}, \quad G_T^* = \frac{E_T^*}{2(1 + \nu_T^*)},$$

где  $E_L^*$  — продольный комплексный модуль упругости 1D-композиата в направлении ориентации моноволокон;  $E_T^*$  — поперечный комплексный модуль упругости нити;  $\nu_L^*$  и  $\nu_T^*$  — продольный и поперечный комплексные коэффициенты Пуассона;  $G_L^*$  и  $G_T^*$  — продольный и поперечный комплексные модули сдвига;  $E_f$  — модуль упругости моноволокон;  $\nu_f$  — коэффициент Пуассона моноволокон;  $E_m^*$  и  $\nu_m^*$  — комплексные модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы;  $\phi_f$  — относительное объемное содержание моноволокон.

По полученным значениям упругих констант (формулы (8)) составим компоненты тензора комплексных упругих податливостей  $\Pi_{ijkl}^{*0}$  1D-композиата:

$$(\Pi_{ijkl}^{*0}) = \begin{bmatrix} \Pi_{1111}^{*0} & \Pi_{1122}^{*0} & \Pi_{1133}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{1122}^{*0} & \Pi_{2222}^{*0} & \Pi_{2233}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{1133}^{*0} & \Pi_{2233}^{*0} & \Pi_{3333}^{*0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Pi_{1313}^{*0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Pi_{2323}^{*0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Pi_{1212}^{*0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L^*} & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & \frac{1}{E_T^*} & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_L^*}{E_L^*} & -\frac{\nu_T^*}{E_T^*} & \frac{1}{E_T^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_T^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_L^*} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Слоисто-волокнистые композиты (СВК) — это многослойные материалы, каждый слой  $\alpha$  которых представляет собой 1D-композит, повернутый на угол  $\varphi_\alpha$  вокруг оси  $O\xi_3$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Ячейка периодичности слоисто-волокнистого композита с числом слоев  $N = 3$

Тогда в повернутой (собственной) системе координат  $O\xi_i^{(\alpha)}$ , ось  $O\xi_1^{(\alpha)}$  которой совпадает с направлением ориентации моноволокон каждого слоя, компоненты тензоров комплексных модулей упругости определяются формулами

$$C_{ijkl}^{*0} = (\Pi_{ijkl}^{*0})^{-1},$$

а в единой для всех слоев системе координат СВК  $O\xi_i$  компоненты тензора модулей упругости слоя  $\alpha$  вычисляются по формулам преобразования компонент тензора 4-го ранга [18]:

$$C_{ijkl}^{*\alpha} = C_{mnpq}^{*0} Q_{im}^\alpha Q_{jn}^\alpha Q_{kp}^\alpha Q_{lq}^\alpha, \quad (10)$$

где  $Q_{im}^\alpha$  — элементы матрицы поворота слоя с номером  $\alpha$ . Эта матрица имеет вид

$$(Q_{im}^\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_\alpha & \sin \varphi_\alpha & 0 \\ -\sin \varphi_\alpha & \cos \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

В развернутом виде формулы поворота (11) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{3333}^{*\alpha} &= C_{3333}^{*0}, \\ C_{1133}^{*\alpha} &= \cos^2 \varphi_\alpha C_{1133}^{*0} + \sin^2 \varphi_\alpha C_{2233}^{*0}, \\ C_{2233}^{*\alpha} &= \sin^2 \varphi_\alpha C_{1133}^{*0} + \cos^2 \varphi_\alpha C_{2233}^{*0}, \\ C_{1122}^{*\alpha} &= \cos^2 \varphi_\alpha \sin^2 \varphi_\alpha (C_{2222}^{*0} + C_{1111}^{*0} - 4C_{1212}^{*0}) + \\ &\quad + (\cos^4 \varphi_\alpha + \sin^4 \varphi_\alpha) C_{1212}^{*0}, \\ C_{1313}^{*\alpha} &= \cos^2 \varphi_\alpha C_{1313}^{*0} + \sin^2 \varphi_\alpha C_{2323}^{*0}, \\ C_{2323}^{*\alpha} &= \sin^2 \varphi_\alpha C_{1313}^{*0} + \cos^2 \varphi_\alpha C_{2323}^{*0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{2323}^* &= \cos^2 \varphi_\alpha \sin^2 \varphi_\alpha (C_{2222}^{*0} + C_{3333}^{*0} - 2C_{2233}^{*0} - 2C_{2323}^{*0}) + \\
 &\quad + (\cos^4 \varphi_\alpha + \sin^4 \varphi_\alpha) C_{2323}^{*0}, \\
 C_{2223}^* &= \cos^3 \varphi_\alpha \sin \varphi_\alpha (C_{2222}^{*0} - C_{2233}^{*0} - 2C_{2323}^{*0}) - \\
 &\quad - \cos \varphi_\alpha \sin^3 \varphi_\alpha (C_{3333}^{*0} - C_{2233}^{*0} - 2C_{2323}^{*0}), \\
 C_{2333}^* &= \cos \varphi_\alpha \sin^3 \varphi_\alpha (C_{2222}^{*0} - C_{2233}^{*0} - 2C_{2323}^{*0}) - \\
 &\quad - \cos^3 \varphi_\alpha \sin \varphi_\alpha (C_{3333}^{*0} - C_{2233}^{*0} - 2C_{2323}^{*0}), \\
 C_{2311}^* &= \cos \varphi_\alpha \sin \varphi_\alpha (C_{1122}^{*0} - C_{1133}^{*0}), \\
 C_{1213}^* &= \cos \varphi_\alpha \sin \varphi_\alpha (C_{1212}^{*0} - C_{1313}^{*0}), \\
 \text{остальные } C_{ijkl} &= 0.
 \end{aligned}$$

### Тензор эффективных комплексных модулей упругости СВК.

Рассмотрим теперь СВК. Для расчета компонент  $\bar{C}_{ijkl}^*$  тензора эффективных комплексных модулей упругости СВК можно применить метод асимптотического осреднения [27], который по аналогии с упругими композитами для слоистых структур позволяет найти следующие точные аналитические выражения:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{IJKL}^* &= \left\langle C_{IJKL}^{*\alpha} \right\rangle + \left\langle C_{IJK3}^{*\alpha} (C_{k3i3}^{*\alpha})^{-1} \right\rangle \left\langle (C_{i3p3}^{*\alpha})^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle (C_{p3j3}^{*\alpha})^{-1} C_{j3KL}^{*\alpha} \right\rangle - \\
 &\quad - \left\langle C_{IJK3}^{*\alpha} (C_{k3i3}^{*\alpha})^{-1} C_{i3KL}^{*\alpha} \right\rangle;
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\bar{C}_{IJk3}^* = \left\langle C_{IJj3}^{*\alpha} (C_{j3i3}^{*\alpha})^{-1} \right\rangle \left\langle (C_{i3k3}^{*\alpha})^{-1} \right\rangle^{-1},$$

или в явном виде

$$\bar{C}_{3333}^* = \left\langle \frac{1}{C_{3333}^*} \right\rangle^{-1},$$

$$\bar{C}_{IJ33}^* = \left\langle \frac{C_{33IJ}^{*\alpha}}{C_{3333}^{*\alpha}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{C_{3333}^{*\alpha}} \right\rangle^{-1},$$

$$\bar{C}_{IJKL}^* = \left\langle C_{IJKL}^{*\alpha} \right\rangle - \left\langle \frac{C_{33IJ}^{*\alpha} C_{33KL}^{*\alpha}}{C_{3333}^{*\alpha}} \right\rangle + \left\langle \frac{C_{33IJ}^{*\alpha}}{C_{3333}^{*\alpha}} \right\rangle \left\langle \frac{C_{33KL}^{*\alpha}}{C_{3333}^{*\alpha}} \right\rangle \left\langle \frac{1}{C_{3333}^{*\alpha}} \right\rangle^{-1},$$

$$\bar{C}_{3I3J}^* = \left\langle \frac{C_{3I3J}^{*\alpha}}{C_{2323}^{*\alpha} C_{1313}^{*\alpha} - (C_{1323}^{*\alpha})^2} \right\rangle \left( \left\langle \frac{C_{2323}^{*\alpha}}{C_{2323}^{*\alpha} C_{1313}^{*\alpha} - (C_{1323}^{*\alpha})^2} \right\rangle \left\langle \frac{C_{1313}^{*\alpha}}{C_{2323}^{*\alpha} C_{1313}^{*\alpha} - (C_{1323}^{*\alpha})^2} \right\rangle - \right.$$

$$-\left\langle \frac{C_{1323}^{*\alpha}}{C_{2323}^{*\alpha} C_{1313}^{*\alpha} - (C_{1323}^{*\alpha})^2} \right\rangle^2 \Big)^{-1},$$

здесь  $I, J, K, L = 1, 2$ .

**Результаты численных расчетов упруго-диссипативных характеристик СВК.** При численных расчетах использовались следующие значения характеристик полимерной матрицы эпоксифенольного типа:

$$G_m = 0,345 \text{ ГПа}; \quad K_m = \frac{2G_m}{3} \frac{1+\nu_m}{1-\nu_m}, \quad \nu_m = 0,45,$$

$$n = 1, \quad A_1 = 1 \text{ ГПа}, \quad \tau_1 = 0,01 \text{ с}, \quad a_1 = 20 \text{ К}, \quad a_2 = 300 \text{ К},$$

а также характеристики стеклянных волокон, которые считались чисто упругими и изотропными:

$$E_f = 200 \text{ ГПа}; \quad \nu_f = 0,25, \quad A_f = 0.$$

Коэффициент армирования 1D-композита был принят равным 0,6.

Были рассмотрены три типа СВК, ячейка периодичности которых состоит из четырех слоев:

- 1) СВК с двумя системами нитей  $[+\varphi / +\varphi / -\varphi / -\varphi]$ ;
- 2) СВК с тремя системами нитей  $[0 / +\varphi / -\varphi / 0]$ ;
- 3) СВК с четырьмя системами нитей  $[0 / +\varphi / -\varphi / 90]$ ,

где  $\varphi$  — угол ориентации нитей относительно оси  $O\xi_1$ , доли всех четырех слоев были одинаковыми — по 25 % каждого слоя. Угол  $\varphi$  ориентации нитей варьировался в диапазоне  $0 \dots 90^\circ$ .

Рассчитывались действительные и мнимые части компонент тензора комплексных модулей упругости

$$\bar{C}_{ijkl}^*(\tilde{\omega}) = \text{Re}(\bar{C}_{ijkl}^*(\tilde{\omega})) + i \text{Im}(\bar{C}_{ijkl}^*(\tilde{\omega})),$$

а также вычислялся тангенс угла потерь для комплексных модулей упругости:

$$\text{tg}\delta(\bar{C}_{ijkl}^*(\omega)) = \frac{\text{Im}(\bar{C}_{ijkl}^*(\omega))}{\text{Re}(\bar{C}_{ijkl}^*(\omega))},$$

который характеризует диссипативные свойства композитов. Расчеты проводились в зависимости от частоты колебаний  $\omega$  в диапазоне  $1 \dots 70$  Гц при температуре  $\theta = 293 \text{ К}$ .

В табл. 1–3 представлены результаты расчетов действительной части модуля упругости  $\bar{C}_{1111}^*(\omega_{\max})$  и максимального значения тангенса угла потерь  $\operatorname{tg}\delta(\bar{C}_{1111}^*(\omega_{\max}))$  для этих трех типов СВК, где  $\omega_{\max}$  — частота, при которой функция  $\operatorname{tg}\delta(\bar{C}_{1111}^*(\omega))$  имеет максимальное значение.

Максимальные значения тангенса угла потерь  $\operatorname{tg}\delta(\bar{C}_{1111}^*)$  реализуются при угле ориентации армирования  $\varphi = 90^\circ$ . Этот факт объясняется тем, что 1D-композит в поперечном направлении имеет характеристики, близкие к характеристикам неармированной эпоксифенольной матрицы, которая обладает высокими значениями тангенса угла потерь:  $\operatorname{tg}\delta(G(\omega)) = 0,75$ , что на два порядка превышает тангенс угла потерь 1D-композита в направлении армирования  $\operatorname{tg}\delta(C_{1111}^{*0}(\omega)) = 0,004$ . Однако увеличение значений диссипативных характеристик сопровождается снижением значений упругих характеристик  $\operatorname{Re}(\bar{C}_{1111}^*(\omega_{\max}))$  композита. Точки  $(\operatorname{Re}\bar{C}_{1111}^*, \operatorname{tg}\delta(\bar{C}_{1111}^*(\omega_{\max})))$  для различных типов СВК и различных углов армирования, полученные расчетным путем, нанесены на координатную плоскость  $(\operatorname{Re}\bar{C}_{1111}^*, \operatorname{tg}\delta(\bar{C}_{1111}^*(\omega_{\max})))$  (рис. 2–4). Диаграммы упруго-диссипативных характеристик могут быть использованы для нахождения оптимальных структур армирования СВК.

Увеличение угла армирования  $\varphi$  для всех трех типов композитов приводит к резкому снижению значений упругих характеристик СВК (в направлении  $O\xi_1$ ) и повышению значений диссипативных характеристик. Диаграммы упруго-диссипативных характеристик всех трех типов СВК при одних и тех же значениях  $\operatorname{tg}\delta(\bar{C}_{1111}^*(\omega_{\max}))$  практически совпадают (рис. 5), однако реализуемая область значений  $(\operatorname{Re}\bar{C}_{1111}^*, \operatorname{tg}\delta(\bar{C}_{1111}^*(\omega_{\max})))$  различна: для СВК с двумя системами нитей реализуется максимальный диапазон значений от (122,6; 0,004) до (4,8; 0,54).

Таким образом, СВК с двумя системами нитей представляется наиболее перспективным с точки зрения реализации возможных значений упруго-диссипативных характеристик в направлении армирования. Однако, как правило, это не единственное требование, которое предъявляют к СВК при проектировании. Часто для практических задач важно иметь квазитрансверсально-изотропный материал [18], у которого

свойства одинаковы в направлениях  $O_{\xi_1}$  и  $O_{\xi_2}$ . Слоисто-волоконистый композит с двумя системами нитей удовлетворяет этому условию только при  $\varphi = 45^\circ$ . Значения  $\left( \operatorname{Re} \bar{C}_{1111}^*, \operatorname{tg} \delta(\bar{C}_{1111}^*(\omega_{\max})) \right)$  при этом равны (35,7; 0,06). Для СВК с тремя и четырьмя системами нитей соответствующие значения составляют (79; 0,017) и (50; 0,04). Выбор между этими вариантами зависит от задания целевой функции — какой из параметров предпочтителен и в каком диапазоне желательно иметь его значение. Материал СВК с четырьмя системами нитей является универсальным с точки зрения достижения «наилучших диссипативных свойств при наилучших упругих свойствах».

Предложенная методика моделирования упруго-диссипативных характеристик композитов может быть эффективно применена для проектирования многослойных конструкций из СВК [28–31] с заданными упруго-диссипативными характеристиками

Таблица 1

**Упруго-диссипативные характеристики СВК  
с четырьмя системами нитей**

$\varphi$ , град	$\operatorname{Re} \bar{C}_{1111}^*$ , ГПа	$\max \operatorname{tg} \delta(\bar{C}_{1111}^*)$	$\omega_{\max}$ , Гц
0	93,6	0,0126	5,16
15	86,1	0,0149	5,16
30	68,2	0,023	5,16
45	50,1	0,039	5,16
60	39,1	0,057	5,48
75	35,7	0,067	5,48
90	35,4	0,069	5,48

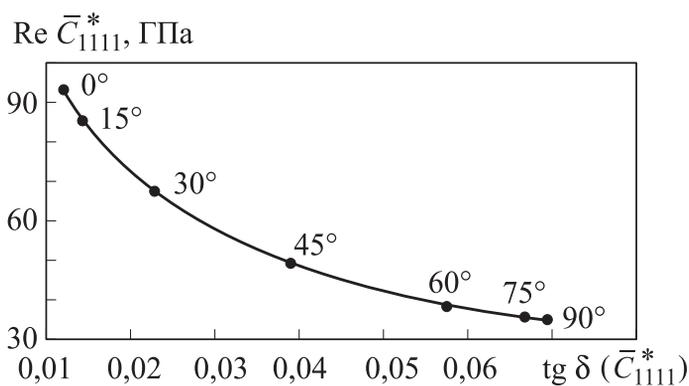
Таблица 2

**Упруго-диссипативные характеристики СВК  
с тремя системами нитей**

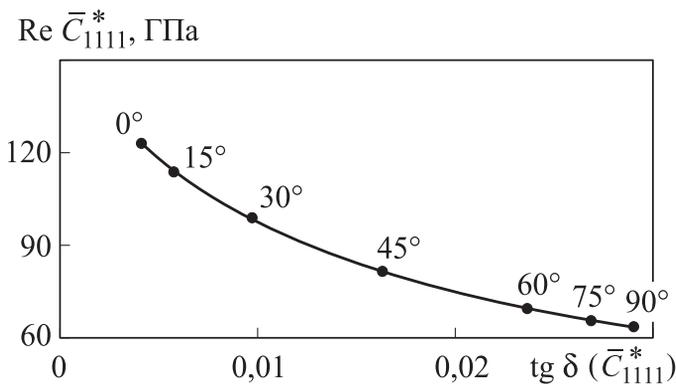
$\varphi$ , град	$\operatorname{Re} \bar{C}_{1111}^*$ , ГПа	$\max \operatorname{tg} \delta(\bar{C}_{1111}^*)$	$\omega_{\max}$ , Гц
0	122,6	0,0042	5,1
15	115,2	0,0055	4,8
30	97,3	0,0097	4,8
45	79,2	0,0165	4,8
60	68,2	0,0233	5,1
75	64,8	0,0270	5,1
90	64,4	0,0278	5,1

**Упруго-диссипативные характеристики СВК  
с двумя системами нитей**

φ, град	Re $\bar{C}_{1111}^*$ , ГПа	max tgδ( $\bar{C}_{1111}^*$ )	ω <sub>max</sub> , Гц
0	122,6	0,0042	5,1
15	107,6	0,0071	5,1
30	71,8	0,0192	5,1
45	35,7	0,0589	5,1
60	13,3	0,196	6,48
75	5,5	0,4724	8,6
90	4,8	0,543	9,0



**Рис. 2.** Диаграмма упруго-диссипативных характеристик СВК с четырьмя системами нитей



**Рис. 3.** Диаграмма упруго-диссипативных характеристик СВК с тремя системами нитей

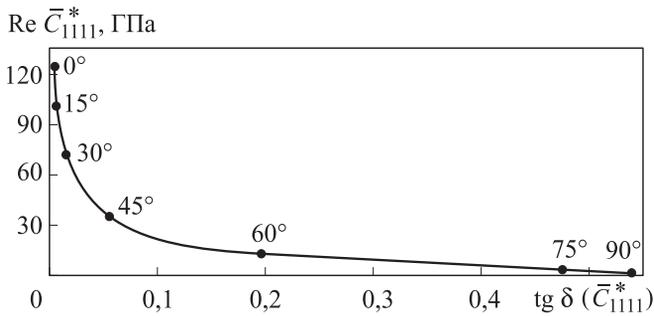


Рис. 4. Диаграмма упруго-диссипативных характеристик СВК с двумя системами нитей

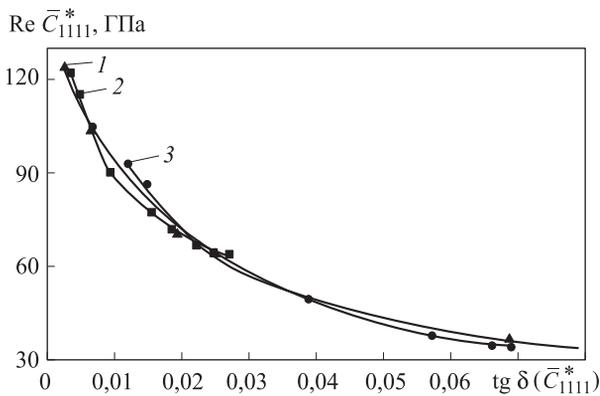


Рис. 5. Сравнительные диаграммы упруго-диссипативных характеристик СВК с двумя (1), тремя (2) и четырьмя (3) системами нитей

**Выводы.** Разработана методика расчета упруго-диссипативных характеристик ПКМ слоисто-волокнистой структуры при установившихся циклических колебаниях, основанная на применении теории асимптотического осреднения периодических структур. Предложен алгоритм сравнения различных структур СВК с точки зрения реализации наиболее высоких значений их упруго-диссипативных характеристик. Этот алгоритм может быть использован для поиска оптимальных структур армирования СВК. Приведены примеры численного моделирования упруго-диссипативных характеристик СВК, которые показали, что одни и те же значения упруго-диссипативных характеристик СВК могут быть получены для различных типов структуры армирования: с двумя, тремя и четырьмя системами нитей. Выбор между различными вариантами зависит от того, какие свойства наиболее предпочтительны для проектируемого материала — упругие или диссипативные.

Исследование выполнено за счет средств государственного задания Минобрнауки РФ (задание № 1.455.2014/К).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hashin Z. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 1965, no. 32E, pp. 630–636.
- [2] Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity*. 2nd ed. New York, Academic Press, 1982.
- [3] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley & Sons, 1979.
- [4] Ferry J.D. *Viscoelastic properties of Polymers*. 2nd ed. New York, John Wiley, 1979.
- [5] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. Москва, Наука, 1970, 356 с.
- [6] Победря Б.Е., Димитриенко Ю.И. Связанные задачи линейной термомеханики деформируемых твердых тел. *Успехи механики*, 1987, вып. 10, № 2, с. 97–137.
- [7] Димитриенко Ю.И., Лимонов В.А. Влияние ориентации волокон на диссипативный разогрев и деформативность вязкоупругих композитов при циклическом нагружении. *Механика композитных материалов*, 1988, № 5, с. 797–805.
- [8] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
- [9] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 560 с.
- [10] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 4: Основы механики твердого тела*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 624 с.
- [11] Imaoka Sh. Analyzing Viscoelastic materials. *Ansys Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46–47.
- [12] Matzenmiller S.G. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber-matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, no. 3, pp. 283–300.
- [13] Žmindák M., Riecky D., Dudinský M. Finite Element Analysis of Viscoelastic Composite Solids. *Modelling of Mechanical and Mechatronic systems 2011*, Herľany, Slovak Republic, September 20–22, 2011, pp. 576–584.
- [14] Michel J.C., Moulinec H., Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1999, 172, pp. 109–143.
- [15] Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory. *JSME Int. J.*, 1997, Ser. A, no. 40, pp. 313–319.
- [16] Haasemann G., Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1–3, pp. 122–135.
- [17] Masoumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates – A Multi Scale Approach. *International Journal of Recent advances in Mechanical Engineering (IJMECH)*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11–18.
- [18] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т. 1: Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.

- [19] Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва, Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1984, 324 с.
- [20] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов. *Математическое моделирование*, 2012, т. 24, № 5, с. 3–20.
- [21] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Численное моделирование композиционных материалов с многоуровневой структурой. *Известия Российской академии наук. Серия физическая*, 2011, т. 75, № 11, с. 1549–1554.
- [22] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 2, с. 57–67.
- [23] Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов. *Информационные технологии*, 2008, № 8, с. 31–38.
- [24] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П., Садовничий Д.Н., Гафаров Б.Р. Численное и экспериментальное моделирование прочностных характеристик сферопластиков. *Композиты и наноструктуры*, 2013, № 3, с. 35–51.
- [25] Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Соколов А.П. Численное моделирование микроразрушения и прочностных характеристик пространственно-армированных композитов. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2013, т. 19, № 3, с. 365–383.
- [26] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. Москва, Наука, 1984, 356 с.
- [27] Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой. *Математическое моделирование и численные методы*, 2014, № 1, с. 36–57.
- [28] Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2014, т. 20, № 2, с. 260–282.
- [29] Димитриенко Ю.И., Яковлев Н.О., Ерасов В.С., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В., Губарева Е.А., Крылов В.Д., Григорьев М.М., Прозоровский А.А. Разработка многослойного полимерного композиционного материала с дискретным конструктивно-ортотропным наполнителем. *Композиты и наноструктуры*, 2014, т. 6, № 1, с. 32–48.
- [30] Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А. Многомасштабное конечно-элементное моделирование трехслойных сотовых композитных конструкций. *Наука и образование. Электронный научно-технический журнал*, 2014, № 7. Doi: 10.7463/0714.0717805.
- [31] Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 3, с. 86–100.

Статья поступила в редакцию 03.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Федонюк Н.Н., Сборщиков С.В. Моделирование упруго-диссипативных характеристик слоисто-волоконистых композитов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 4.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html>

**Димитриенко Юрий Иванович** родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана (НОЦ «СИМПЛЕКС»), действительный член Академии инженерных наук. Автор более 300 научных работ в области вычислительной механики, газодинамики, термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах.  
e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com.

**Губарева Елена Александровна** родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 научных работ в области механики контактных взаимодействий. e-mail: gubareva\_ea@pochta.ru

**Федонюк Николай Николаевич** родился в 1946 г., окончил Ленинградский кораблестроительный институт в 1969 г. Канд. техн. наук, начальник лаборатории ОАО «Крыловский государственный научный центр». Автор более 40 научных публикаций в области полимерных композиционных материалов и разработки судовых конструкций из композитов.

**Сборщиков Сергей Васильевич** родился в 1989 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 научных работ в области численного моделирования в механике композитов.

## Modeling of elastic-dissipative properties of laminated fibrous composites

© Yu. I. Dimitrienko<sup>1</sup>, E.A. Gubareva<sup>1</sup>,  
N.N. Fedonyuk<sup>2</sup>, S.V. Sborschikov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

<sup>2</sup>Krylov State Research Centre, ST.-Petersburg, 196158, Russia

*The developed method of calculating the elastic-dissipative characteristics of polymeric composite materials of layered fibrous structure under steady cyclical is based on application of the theory of asymptotic averaging of periodic structures. We offer an algorithm for comparing different structures of layered fiber composites in terms of the realization of the highest values of their elastic-dissipative characteristics. It is based on the diagram construction of materials in the coordinates "the real part of the complex modulus of elasticity in the plane of laying of the fibers — tangent of loss angle for the same module." The algorithm may be used to search for optimum reinforcement structure of layered fiber composites. Examples of numerical modeling of elastic-dissipative characteristics of layered fibrous composites with two, three and four strands systems are given.*

**Keywords:** viscoelastic composites laminated fibrous composites, elastic-dissipative properties, steady vibrations, tangent of loss angle, complex elastic modules, method of asymptotic averaging.

### REFERENCES

- [1] Hashin Z. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 1965, no. 32E, pp. 630–636.
- [2] Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity*. 2nd ed. New York, Academic Press, 1982.
- [3] Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley & Sons, 1979.
- [4] Ferry J.D. *Viscoelastic properties of Polymers*. 2nd ed. New York, John Wiley, 1979.
- [5] Ilyushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkoupругosti* [Fundamentals of Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 356 p.
- [6] Pobedrya B.E., Dimitrienko Yu.I. *Uspekhi mekhaniki — Advances in Mechanics*, 1987, iss. 10, no. 2, pp. 97–137.
- [7] Dimitrienko Yu.I., Limonov V.A. *Mekhanika kompozitnykh materialov — Mechanics of Composite Materials*, 1988, no. 5, pp. 797–805.
- [8] Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
- [9] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [10] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela* [Continuum Mechanics. Vol. 4. Fundamentals of solid mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 624 p.
- [11] Imaoka Sh. Analyzing Viscoelastic materials. *Ansys Advantage*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 46–47.

- [12] Matzenmiller S.G. Micromechanical modeling of viscoelastic composites with compliant fiber-matrix bonding. *Computational Materials Science*, 2004, vol. 29, no. 3, pp. 283–300.
- [13] Žmindák M., Riecky D., Dudinský M. Finite Element Analysis of Viscoelastic Composite Solids. *Modelling of Mechanical and Mechatronic systems 2011*, Herľany, Slovak Republic, September 20–22, 2011, pp. 576–584.
- [14] Michel J.C., Moulinec H., Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1999, 172, pp. 109–143.
- [15] Shibuya Y. Evaluation of creep compliance of carbon-fiber-reinforced composites by homogenization theory. *JSME Int. J.*, 1997, Ser. A, no. 40, pp. 313–319.
- [16] Haasemann G., Ulbricht V. Numerical evaluation of the viscoelastic and viscoplastic behavior of composites. *Technische Mechanik*, 2010, vol. 30, no. 1–3, pp. 122–135.
- [17] Masumi S., Salehi M., Akhlaghi M. Nonlinear Viscoelastic Analysis of Laminated Composite Plates – A Multi Scale Approach. *International Journal of Recent advances in Mechanical Engineering (IJMECH)*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 11–18.
- [18] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 1. Tenzorniy analiz* [Continuum Mechanics. Vol. 1. Tensor Analysis]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 c.
- [19] Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow, Lomonosov MST Publ., 1984, 324 p.
- [20] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Matematicheskoe Modelirovanie — Mathematical Models and Computer Simulations*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20.
- [21] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya fizicheskaya — Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, 2011, vol. 75, no. 11, pp. 1549–1554.
- [22] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural sciences*, 2008, no. 2, pp. 57–67.
- [23] Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Informatsionnye tekhnologii — Information technologies*, 2008, no. 8, pp. 31–38.
- [24] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Sokolov A.P., Sadovnichiy D.N., Gafarov B.R. *Kompozity i nanostrukтуры — Composites and Nanostructures*, 2013, no. 3, pp. 35–51.
- [25] Dimitrienko Yu.I., Sborschikov S.V., Sokolov A.P. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy — Composite Mechanics and Design*, 2013, vol. 19, no. 3, pp. 365–383.
- [26] Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging of processes in periodic media]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 356 p.
- [27] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborschikov S.V. *Matematicheskoe modelirovanie I chislennye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 1, pp. 36–57.
- [28] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy — Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 260–282.
- [29] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev N.O., Erasov V.S., Fedonyuk N.N., Sborschikov S.V., Gubareva E.A., Krylov V.D., Grigoryev M.M., Prozorovsky A.A. *Kompozity i nanostrukтуры — Composites and Nanostructures*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 32–48.
- [30] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sborschikov S.V., Prozorovsky A.A. *Nauka I Obrazovanie. Eleektronnyi nauchnyi I tekhnicheskyy zhurnal*

*nal — Science and Education. Electronic Scientific and Technical Journal*, 2014, no. 7. Doi: 10.7463/0714.0717805.

- [31] Dimitrienko Yu.I. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural sciences*, 2012, no. 3, pp. 86–100.

**Dimitrienko Yu. I.** (b. 1962) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1984. Dr. Sci.(Phys. & Math.), Professor, Head of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Director of Scientific-educational Center of Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development of Bauman Moscow State Technical University. Member of the Russian Academy of Engineering Science. Author of over 300 publications in the field of computational mechanics, gasdynamics, thermomechanics of composite materials, mathematical simulations in material science. e-mail: dimit.bmtstu@gmail.com.

**Gubareva E.A.** (b. 1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. Author 15 scientific publications in the field of contact mechanics. e-mail: gubareva\_ea@pochta.ru

**Fedonyuk N.N.** (b. 1946) graduated from Leningrad Shipbuilding Institute in 1969. Ph.D., head of laboratory at the Krylov State Research Centre. Author of more than 40 scientific publications in the field of polymer composites and designing of ship constructions from composites.

**Sborschikov S.V.** (b. 1989) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2012. A postgraduate at the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of BMSTU. Author of 15 scientific publications in the field of computational mechanics of composites. e-mail: servasbor@gmail.com