

Моделирование процесса взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой

© В.М. Дубровин, Т.А. Бутина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен метод расчета давления на поверхности цилиндрической оболочки в период погружения и обтекания ее ударной волной. Для слабых ударных волн проведена сравнительная оценка точного решения с имеющимися приближенными решениями. Рассмотрены два типа волн на поверхности жесткой оболочки: падающая и отражающая. Получена картина распределения давления на поверхности оболочки от указанных типов волн.

Ключевые слова: падающая ударная волна, отраженная ударная волна, избыточное давление, цилиндрическая оболочка, интегральное преобразование, асимптотическое представление.

Введение. В процессе взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой на ее поверхности образуется давление различной интенсивности, которое следует определить для различных точек поверхности и оценить изменение давления с течением времени. При решении задачи предполагается, что все сечения оболочки находятся в одинаковых условиях и процесс взаимодействия для них протекает одинаково. Это позволяет свести задачу к плоской постановке, т. е. рассматривать задачу обтекания кольца. Кроме того, оболочка считается жесткой, т. е. можно не учитывать влияние деформации оболочки на распределение давления на поверхности оболочки.

Оценка давления на поверхности оболочки при действии падающей и отраженной волн. В общем случае при нормальном падении ударной волны на жесткую преграду давление на ее внешней поверхности за счет отражения повышается. Это давление $\Delta p_{\text{отр}}$ можно найти с помощью следующих формул [1–3]:

$$\Delta p_{\text{отр}} = K_{\text{отр}} \Delta p_{\text{ф}},$$

где

$$K_{\text{отр}} = 2 + \frac{6}{1 + 7,2/\Delta p_{\text{ф}}};$$

$\Delta p_{\text{ф}}$ — избыточное давление во фронте ударной волны.

Последнее соотношение показывает, что для слабых ударных волн типа акустических ($\Delta p_{\text{ф}} \approx 0$) коэффициент отражения $K_{\text{отр}} = 2$, для сильных ударных волн ($\Delta p_{\text{ф}} \rightarrow \infty$) $K_{\text{отр}} \rightarrow 8$. Зависимость коэффициента отражения от избыточного давления во фронте ударной волны представлена на рис. 1.

Процесс взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой условно можно подразделить на два характерных периода:

период погружения от момента встречи оболочки с ударной волной до момента полного погружения в ударную волну;

период обтекания от момента полного погружения оболочки в ударную волну до конца фазы движения.

Определение нагрузок на цилиндрическую оболочку при взаимодействии с ударной волной сводится к нахождению давления в каждой точке ее поверхности для различных моментов времени. Расчет нагрузок на цилиндрическую оболочку в период погружения — достаточно сложная задача. Ее решение в соответствии с имеющимися теоретическими исследованиями [4–7] можно провести следующим образом. Рассмотрим волну заданной формы импульса, падающую на оболочку перпендикулярно ее образующей. Схема взаимодействия волны с оболочкой в плоской постановке представлена на рис. 2. Результирующее давление p в каждой точке цилиндрической поверхности равно сумме давления p_1 в падающей волне и давления p_2 в отраженной волне. Для определения этих давлений используем соотношения

$$p_1 = -\frac{D_{\phi}\rho}{R} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_{r=1}, \quad p_2 = -\frac{D_{\phi}\rho}{R} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right|_{r=1}, \quad (1)$$

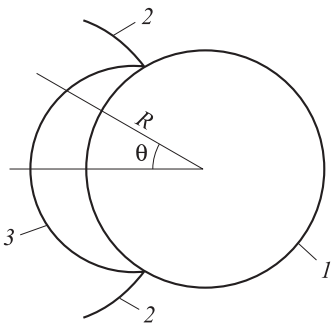


Рис. 2. Схема взаимодействия ударной волны с оболочкой:

1 — поперечное сечение оболочки; 2 — падающая волна;

3 — отраженная волна

где D_{ϕ} — скорость распространения фронта ударной волны (θ — угловая координата); $\varphi(r, \theta, \tau)$, $\psi(r, \theta, \tau)$ — потенциалы скоростей в падающей и отраженной волнах; $\rho(\tau)$ — плотность среды в ударной волне; R — радиус оболочки; \mathbf{r} — радиус-вектор в долях R ; $\tau = D_{\phi}t/R$ — безразмерный параметр времени.

В общем случае потенциал $\varphi(r, \theta, \tau)$ есть функция, определяемая видом падающей волны и контуром обтекаемого тела, т. е. она известна. Потенциал $\psi(r, \theta, \tau)$ удовлетворяет волновому уравнению

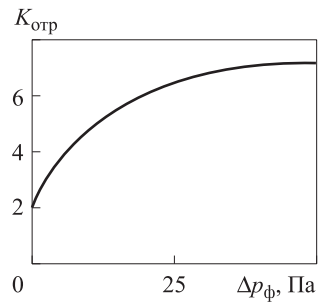


Рис. 1. Зависимость коэффициента отражения ударной волны от избыточного давления во фронте волны

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2}, \quad (2)$$

граничным условиям

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad (3)$$

условиям излучения на бесконечности и нулевыми начальными условиями

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0 \Big|_{\tau=0}.$$

Для нахождения потенциала $\Psi(r, \theta, \tau)$ отраженной волны воспользуемся его представлением на многомерной римановой поверхности с углом θ , непрерывно изменяющемся в пределах $-\infty < \theta < \infty$. Выполнив преобразования Фурье по углу θ

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \exp(-2\pi i v \theta) d\theta,$$

преобразования Лапласа по параметру τ

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau,$$

уравнения (2) и граничные условия (3) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} - \left(s + \frac{v}{r^2} \right) \Psi^* = 0; \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad (5)$$

где v — вещественный параметр; $s = \sigma + i\omega$ — комплексная переменная; $\Phi^*(r, \theta, s)$, $\Psi^*(r, \theta, s)$ — изображение по Лапласу потенциалов $\varphi(r, \theta, \tau)$, $\psi(r, \theta, \tau)$ соответственно. Индекс «*» означает, что для этих функций выполнено преобразование Фурье.

Решение уравнения (4) с граничными условиями (5) и условиями излучения на бесконечности представим в виде

$$\Psi^* = -\frac{1}{s} \frac{K_\nu}{K'_\nu} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \Big|_{r=1}.$$

Здесь $K_\nu(s)$ — функция Макдональда,

$$K_\nu(s) = \frac{\pi}{2} \frac{J_{-\nu}(s) - J_\nu(s)}{\sin \nu \pi};$$

J_ν — функция Бесселя мнимого аргумента; $J_{-\nu}$ — функция Бесселя, полученная из функции J_ν заменой ν на $-\nu$.

При этом изображение для давления отражения на цилиндрической поверхности имеет вид

$$P_2^* = \frac{\rho D_\Phi}{R} \frac{K_\nu(s)}{K'_\nu(s)} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \Big|_{r=1}.$$

В силу крайней сложности обращения последнего выражения, позволяющего в пределах линейной теории получить точное распределение давления на жесткой цилиндрической оболочке, можно воспользоваться асимптотическим представлением функции Макдональда при $s \rightarrow \infty$, т. е. рассматривать начальный период взаимодействия. Тогда можно записать

$$\frac{K_\nu(s)}{K'_\nu(s)} = -1 + \frac{1}{2} s^{-1} + \left(\frac{\nu^2}{2} - \frac{3}{8} \right) s^{-2} - \left(\nu^2 - \frac{3}{8} \right) s^{-3} + 0(s^{-4}), \quad (6)$$

$0(s^{-4})$ — остаточный член разложения.

В данном случае изображение для давления отражения принимает вид

$$P_2^* = \frac{\rho D_\Phi}{R} \left[-\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} + \frac{1}{2s} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} - \frac{3}{8s^2} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} + \frac{3}{8s^3} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} + \frac{\nu^2}{2s^2} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} - \frac{\nu}{s^3} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right]_{r=1}.$$

Выполним обратное преобразование Фурье от первых четырех слагаемых в последнем выражении, а для обращения последних двух членов воспользуемся выражением для падающей волны. Если давление в ударной волне изменяется в соответствии с законом

$$\Delta p(t) = \Delta P_\Phi \left(1 - \frac{t}{\tau_+} \right)^n,$$

где τ_+ — период фазы сжатия в ударной волне; $n = 1,9\sqrt{\Delta p_\Phi}$ — показатель степени бинома, зависящий от избыточного давления, то приближенно для малых τ потенциал скоростей можно записать в виде

$$\varphi = \frac{\Delta p_\Phi R}{\rho D_\Phi \alpha} \exp[-a(r \cos \theta - 1 + \tau)] H(r \cos \theta - 1 + \tau),$$

где $\alpha = t/\tau_{\text{эф}}$ — постоянная, определяющая скорость падения давления за фронтом ударной волны; $\tau_{\text{эф}} = \frac{2}{n+1}\tau_+$ — эффективное время, определяемое из условия равенства импульсов, действительной и приведенной эпюр давления; H — функция Хевисайда.

В рассматриваемом случае после преобразований Лапласа и Фурье имеем

$$\Phi^* = \frac{\Delta p_\Phi}{\rho D_\Phi} \frac{e^{-s}}{s + \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sr \cos \theta - iv\theta) d\theta = \frac{2\pi \Delta p_\Phi R}{\rho D_\Phi \alpha} \frac{\exp(-s)}{s + \alpha} J_\nu(s, r).$$

Обратное преобразование Фурье с учетом последнего выражения позволяет получить следующую формулу для давления отражения на цилиндрической поверхности:

$$p_2 = \frac{\rho D_\Phi}{R} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{2s} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{3}{8s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{3}{8s^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_{r=1} + \\ + \frac{\Delta p_\Phi}{2\alpha} \frac{\exp(-s)}{s + \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 J'_\nu(s) \exp(iv\theta) dv + \\ + \frac{\Delta P_\Phi}{\alpha} \frac{\exp(-s)}{s^2(s + \alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 J'_\nu(s) \exp(iv\theta) dv.$$

Интегралы в последнем выражении можно вычислить методом перевала с использованием асимптотического разложения функций Бесселя при $s \rightarrow \infty$ [8, 9]:

$$J'_\nu(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt[4]{v^2 + s^2}}{s} \exp\left(\sqrt{v^2 + s^2} - v \operatorname{arcsch} \frac{v}{s}\right).$$

В данном случае седловая точка $v_0 = is \sin \theta$. В связи с тем, что функция, стоящая под знаком интеграла, имеет точки ветвления $v = \pm is$, результат, получаемый методом перевала, применим для уг-

лов $\theta < \pi/2$. После вычислений выражение для давления отражения на поверхности оболочки принимает вид

$$p_2 = \frac{\rho D_\Phi}{R} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{2s} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{3}{8s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{3}{8s^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{3}{2s^2} \Phi \sin^2 \theta \cos \theta - \frac{1}{s^3} \Phi \sin^2 \theta \cos \theta \right]_{r=1}.$$

Согласно теореме о свертке, оригинал этого выражения имеет вид

$$p_2 = -\frac{\rho D_\Phi}{R} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\tau_1 + \frac{3}{2} \int_0^\tau \frac{\partial \varphi}{\partial r} (\tau - \tau_1) d\tau_1 - \frac{3}{16} \int_0^\tau \frac{\partial \varphi}{\partial r} (\tau - \tau_1)^2 d\tau_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin^2 \theta \cos \theta - \varphi \sin^2 \theta \cos \theta \right]_{r=1}. \quad (7)$$

Применение асимптотической формы для больших интервалов времени, соизмеримых с периодом обтекания ударной волной оболочки, не представляется возможным, поскольку в случае задания отношения функций Макдональда в виде (6) не дает возможности найти предельный переход при $s \rightarrow 0$. Формула (7) позволяет получить точную картину распределения давления на жестком цилиндре при $\tau \rightarrow 0$ и, кроме того, оценить точность приближенных решений для давления при $\tau \rightarrow 0$. В качестве такого приближенного решения можно рассматривать уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - g_n \frac{\Psi}{r}, \quad (8)$$

где g_n — параметр, учитывающий влияние течения за фронтом ударной волны.

В этом случае изображение для потенциала Ψ с учетом граничных и начальных условий имеет вид

$$\Psi = \frac{1}{s + g_n} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=1}.$$

На основании исходного уравнения (8) и теоремы о свертке функций можно записать

$$p_2 = -\frac{\rho D_\Phi}{R} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} - g_n \int_0^\tau \frac{\partial \varphi}{\partial r} \exp[-g_n(\tau - \tau_1)] d\tau_1 \right]_{r=1}. \quad (9)$$

В этом случае, если $g_n = 1/2$, решение при $\tau \rightarrow 0$ совпадает с асимптотическим и дает качественно верное решение при $\tau \rightarrow \infty$, так как Ψ удовлетворяет соответствующему предельному переходу при $s \rightarrow 0$ в поле изображений.

На рис. 3 приведены зависимости давления во фронтальной точке ($\theta = 0$) оболочке от параметра τ , полученные с помощью асимптотической (7) и приближенной (9) формул. Для сравнения также приведена кривая, соответствующая известному решению Блейха [10]. Как следует из рисунка, при $\tau < 2,0$ оба решения практически совпадают, после чего начинается их расхождение. При $\tau > 2,0$ можно использовать только формулу (7).

Аналогично можно найти давление в любой точке цилиндрической поверхности. На рис. 4 приведены значения давления для различных участков цилиндрической оболочки.

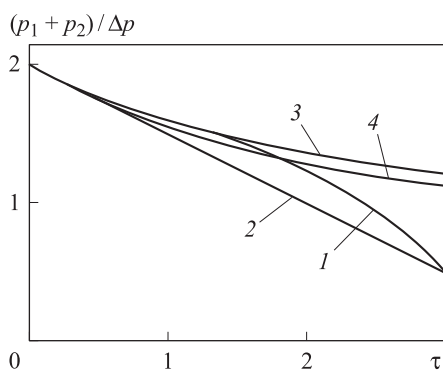


Рис 3. Зависимость давления во фронтальной точке оболочки от безразмерного момента времени:

1 — точное решение; 2 — решение при сохранении двух членов разложения; 3 — приближенное решение; 4 — приближенное решение Блейха

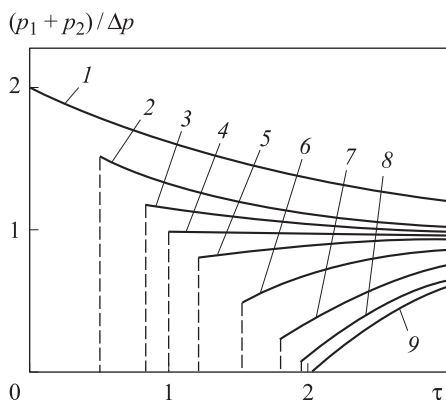


Рис 4. Зависимость давления в различных точках оболочки от безразмерного параметра времени:

$\theta = 0$ (1); 60° (2); 80° (3); 90° (4); 100° (5); 120° (6); 140° (7); 160° (8); 180° (9)

Полученные результаты справедливы для слабых ударных волн, когда $\Delta p_\Phi / p_0 \leq 0,3$, где p_0 — давление в невозмущенной среде перед фронтом ударной волны. При $\Delta p_\Phi / p_0 > 0,3$ полученное давление следует умножить на коэффициент $K_{отр}$. На основании этих результатов можно представить следующую картину изменения давления на поверхности оболочки. При достижении фронтом ударной волны любой точки передней поверхности оболочки ($\theta \leq \pi/2$) давление в ней мгновенно возрастает до максимального значения $p = p_1 + p_2$, а затем падает

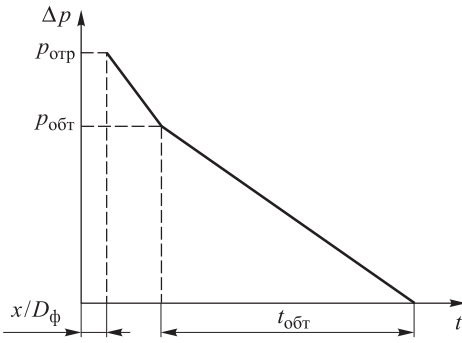


Рис. 5. Характер изменения давления в точках передней поверхности оболочки при взаимодействии с ударной волной

до давления обтекания по мере продвижения фронта ударной волны до полного погружения оболочки в ударную волну. Для точек тыльной поверхности характерно наличие времени нарастания давления до максимального значения, вполне определенного для каждой точки этой поверхности оболочки. Время нарастания давления до максимума может быть определено по формуле $t = (2R/D_\phi) \cos \theta$. На рис. 5, 6 приведены характерные зависимости изменения давления в произвольной точке передней и тыльной поверхностей оболочки в течение времени $t_{обт}$ обтекания оболочки ударной волной. На рис. 7 изображены характерные зависимости изменения максимального избыточного давления от периметра оболочки

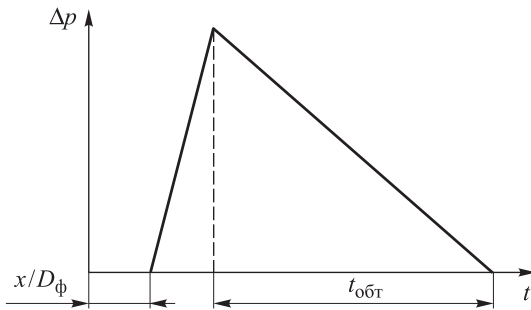


Рис. 6. Характер изменения давления в точках передней поверхности оболочки при взаимодействии с ударной волной

В период обтекания определение нагрузок на оболочку может быть получено на основании обычной формулы аэродинамики:

$$p = p_\infty + \Delta p(t) + p_\theta \frac{\rho U^2(t)}{2},$$

где P_∞ — давление в невозмущенной среде; $\Delta p(t)$ — местное давление в ударной волне; $U(t)$ — скорость воздуха в ударной волне; p_θ — коэффициент давления.

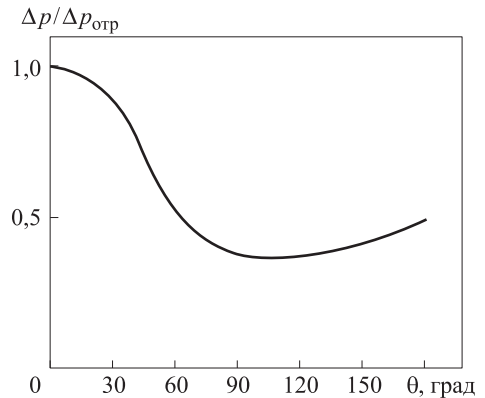


Рис. 7. Изменение максимального давления по периметру оболочки

При стационарном обтекании оболочки несжимаемым воздушным потоком изменение коэффициента p_θ можно представить в виде

$$p_\theta = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (10)$$

Как показано в работе [11], коэффициенты давления, вычисляемые по формуле (10) и полученные экспериментальным путем при продувках в аэродинамических трубах для передней поверхности оболочки достаточно хорошо согласуются. Для тыльной части поверхности наблюдается некоторое расхождение результатов, объясняемое отрывом струи воздушного потока от поверхности оболочки вблизи миделевого сечения и образованием вихрей. Тем не менее это расхождение, согласно работе [12], не ведет к существенным погрешностям в определении коэффициента давления. Кроме того, для значения $\Delta p_\theta \leq 0,8$ кг/см² сжимаемость воздуха можно не учитывать при определении нагрузок на оболочку. При больших значениях давления сжимаемость воздуха можно учитывать с помощью поправочного коэффициента ε . Тогда скоростной напор с учетом сжимаемости воздуха

$$q_1 = q(1 + \varepsilon).$$

Зависимость скоростного напора ε от числа Маха M приведена на рис. 8.

Выводы. Нагрузка на цилиндрическую оболочку при ее взаимодействии с ударной волной может быть представлена как всестороннее сжимающее давление, которое имеет следующие особенности:

неравномерно распределено по контуру поперечного сечения оболочки;

мгновенно нарастает при соприкосновении с ударной волной для всех точек передней поверхности оболочки;

имеет конечную скорость нарастания при погружении оболочки в ударную волну для всех точек тыльной поверхности оболочки.

Для процесса взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой характерны два периода:

период погружения — от момента встречи оболочки с ударной волной до момента полного погружения в ударную волну;

период обтекания — от момента полного погружения оболочки в ударную волну до конца фазы движения.

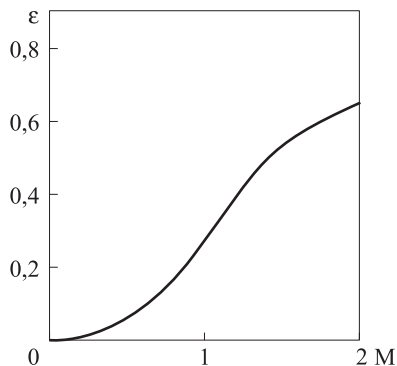


Рис. 8. Зависимость поправочного коэффициента от числа Маха M

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Карлов Н.В., Кириченко Н.А. *Колебания, волны, структуры*. Москва, Физматлит, 2011, 497 с.
- [2] Регирер Л.С. *Ударные волны*. Москва, Наука, 1979, 542 с.
- [3] Алешков Ю.З. *Теория взаимодействия волн с преградами*. Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1990, 371 с.
- [4] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. *Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление*. Москва, Техносфера, 2003. 496 с.
- [5] Кубенко В.Д. *Проникновение упругих оболочек в сжимаемую жидкость*. Киев, Наукова думка, 1984, 158 с.
- [6] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, т. 2, 2011, 559 с.
- [7] Вольмир А. С. *Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости*. Москва, Наука, 1976, 416 с.
- [8] Моисеев Н.Н. *Асимптотические методы нелинейной механики*. Москва, Наука, 1969, 379 с.
- [9] Асимптотические методы в механике. *Сб. ст.* Новосибирск, Изд-во Сибирского отд. АН СССР, 1987, 380 с.
- [10] R.P. Mendlin, H.H. Bleich. Response of an elastic cylindrical shell to a transverse step wave. *J. Appl. Mech*, 1953, vol. 20, no. 2.
- [11] Глинский М.М., Лебедев М.Г., Якубов И.Р. *Моделирование течений газа с ударными волнами*. Москва, Машиностроение, 1984, 191 с.
- [12] Ланда П.С. *Нелинейные колебания и волны*. Москва, Наука, 1997, 495 с.

Статья поступила в редакцию 10.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование процесса взаимодействия ударной волны с цилиндрической оболочкой. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1233.html>

Дубровин Виктор Митрофанович родился в 1934 г., окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета в 1958 г. Канд. тех. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» и кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: динамика, прочность и устойчивость деформируемых систем, ползучесть конструкционных материалов. Автор пяти изобретений. e-mail: vmdubrovinm1934@mail.ru

Бутина Татьяна Александровна родилась в 1950 г., окончила факультет управления и прикладной математики Московского физико-технического института в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Награждена медалями им. М.В. Келдыша и им. Ю.А. Гагарина. Область научных интересов: прочность и устойчивость деформируемых систем. e-mail: butinata@mail.ru

Modeling of the interaction of a shock wave and a cylindrical shell

© V.M. Dubrovin, T.A. Butina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

In the work we offer a method of calculating the pressure on the surface of the cylindrical shell in the period of immersion and flow of it by a shock wave. A comparative assessment of the exact solution and the existing approximate solutions is carried out for weak shock waves. We consider two types of waves on the surface of the rigid shell, incident and reflected. As a result we obtained a pattern of presser distribution on the shell surface dependent on the said types of waves.

Keywords: incident shock wave, reflected shock wave, overpressure, cylindrical shell, integral transformation, the asymptotic representation.

REFERENCES

- [1] Karlov N.V., Kirichenko N.A. *Kolebaniya, volny, struktury* [Vibrations, waves, structures]. Moscow, Fizmatlit, 2011, 497 p.
- [2] Regirer L.S. *Shock waves*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 542 p.
- [3] Aleshkov Yu.Z. *Teoriya vzaimodeystviya voln s pregradami* [The theory of the interaction of waves and obstacles]. Leningrad, LST Publ., 1990, 371 p.
- [4] Pikovsky A., Rozenblyum M., Kurts Yu. *Sinkhronizatsiya: Fundamentalnoe nelineynoe yavlenie* [Synchronization: The fundamental nonlinear phenomenon]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2003, 496 p.
- [5] Kubenko V.D. *Proniknovenie uprugikh obolochek v szhimaemuyu zhidkost* [Penetration of elastic shells in compressible fluid]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1984, 158 p.
- [6] Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 2. Universalnye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics. Vol. 2. Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 560 p.
- [7] Volmir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadacha aerouprugosti* [Shells in the flow of liquid and gas. Aeroelasticity problem]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 416 p.
- [8] Moiseev N.N. *Asimptoticheskie metody nelineinoy mekhaniki* [Asymptotic methods of nonlinear mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 379 p.
- [9] *Asimptoticheskie metody v mekhanike. Sbornik statey* [Asymptotic methods in mechanics. Collection of papers]. Novosibirsk, Publishing House of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1987, 380 p.
- [10] Mendlin R.P., Bleich H.H. Response of an elastic cylindrical shell to a transverse step wave. *J. Appl. Mech.*, 1953, vol. 20, no. 2.
- [11] Glinsky M.M., Lebedev M.G., Yakubov I.R. *Modelirovanie techeniy gaza s udarnymi volnami* [Modeling of gas flows with shock waves]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 191 p.
- [12] Landa P.S. *Nelineinye kolebaniya i volny* [Nonlinear vibrations and waves]. Moscow, Nauka Publ., 1997, 495 p.

Dubrovin V.M. (b. 1934) graduated from the Faculty of Mathematics and Mechanics of the Saratov State University in 1958. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics and of the Higher Mathematics Departments of Bauman Moscow State Technical University. Research interests: dynamics, strength and stability of deformable systems; creep of structural materials. He is the author of five inventions. e-mail: dubrovinvm1934@mail.ru

Butina T.A. (b. 1950) graduated from the Faculty of Management and Applied Mathematics of the Moscow Institute of Physics and Technology in 1974. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department of Bauman Moscow State Technical University. She specializes in the field of strength and stability of deformable systems. e-mail: butinata@mail.ru