УДК 539.3

Моделирование взаимодействия цилиндрических и сферических тел с покрытиями при износе и тепловыделении

© Е.А. Губарева, Т.Ю. Мозжорина, А.Н. Щетинин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена схема контакта цилиндрических и сферических тел с упругими мягкими покрытиями, позволяющая учитывать большое число явлений, протекающих в области контакта. С использованием ранее предложенной авторами формулы для определения нелинейной зависимости модуля силы трения от контактного давления и температуры получено выражение для максимальной температуры в области контакта, найдены значения критической скорости, при которой происходит подплавление одного из покрытий. Полученные результаты могут быть применены для решения многих инженерных задач, поскольку представлены в виде простых формул.

Ключевые слова: *покрытие, трение, тепловыделение, контактное давление, контактная температура, износ.*

Введение. Изучение контактных задач для тел с покрытиями представляет большой практический интерес, поскольку такие исследования могут быть применены для создания методик расчета при решении многих технических задач [1–11]. Задача моделирования тел с покрытиями при износе и тепловыделении рассмотрена в работе [1]. Кроме того, в [2] была предложена формула для определения зависимости коэффициента трения от контактного давления. Взаимодействие контактирующих цилиндрических поверхностей описано в работе [3]. В настоящей работе исследуются вопросы о контакте цилиндрических тел (случай трения оснований цилиндров) и о контакте сферических поверхностей. Такие ситуации часто встречаются в технике.

Постановка задачи о контактном взаимодействии двух тел с тонкими мягкими покрытиями. Рассмотрим процесс трения двух твердых изотропных тел. Пусть на поверхность одного тела нанесено покрытие *1* начальной толщиной h_{10}, а на поверхность другого — покрытие *2* начальной толщиной h_{20}, механические и теплофизические характеристики покрытий различны. Полагаем, что модули упругости тел значительно превосходят модули упругости покрытий, и тела по сравнению с их покрытиями можно считать абсолютно жесткими; кроме того, размеры тел намного превышают толщины покрытий h_{10} и h_{20}, что позволяет считать их относительно тонкими. Процесс движения тел предполагается квазистационарным. В близкой постановке эта задача приведена в работах [1–6].

Предположим, что в области контакта двух тел возникает сила трения, модуль $\tau(t)$ которой связан с контактным давлением $q(t)$ нелинейной зависимостью $\tau = k(q, T)$.

В качестве $k(q, T)$ примем следующую функцию [1–3]:

$$k(q, T) = \tau_* \left\{ \left[1 - \exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*} \right) \right] + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) T^* \left[1 - \exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*} \right) \right] \right\}. \quad (1)$$

Здесь τ_* — минимальное касательное напряжение текучести материалов покрытий; k_1, k_2 — коэффициенты трения материалов покрытий; T^* — контактная температура; β_1, β_2 — коэффициенты, $\beta_1 = (1+\nu_1)(1-\nu_1)^{-1}\alpha_1$, $\beta_2 = (1+\nu_2)(1-\nu_2)^{-1}\alpha_2$ (ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона материалов покрытий; α_1, α_2 — коэффициенты линейного расширения материалов покрытий).

В области контакта вследствие трения происходит износ поверхностей покрытий, что приводит к изменению их толщин за счет изнашивания и термоупругих деформаций.

Обозначим текущие значения толщин покрытий через $h_1(t)$ и $h_2(t)$. В области контакта при трении происходит также тепловыделение. Если пренебречь малой долей работы сил трения, затрачиваемой на износ покрытий и приращение их упругой энергии, количество тепла, выделяемого в единицу времени t на единицу площади контакта, будет определяться следующим соотношением:

$$Q = V\tau(t) = Vk(q, T), \quad (2)$$

где V — модуль вектора скорости $\mathbf{v}$ движения одного тела относительно другого. Износ, как правило, представляет собой медленно протекающий процесс, поэтому будем считать, что функции $q(t)$, $\tau(t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ являются медленно изменяющимися.

Определение максимальной контактной температуры в случае трения оснований цилиндров. Пусть два соосных цилиндра одного радиуса R примыкают один к другому торцами. При этом цилиндр *1* неподвижен, а цилиндр *2* вращается относительно него с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1). На торцах цилиндров имеются покрытия толщинами $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Ось z направим вдоль оси цилиндров. Так называемый третий слой [1, 2, 7] с толщиной δ тоже имеет вид цилиндра.

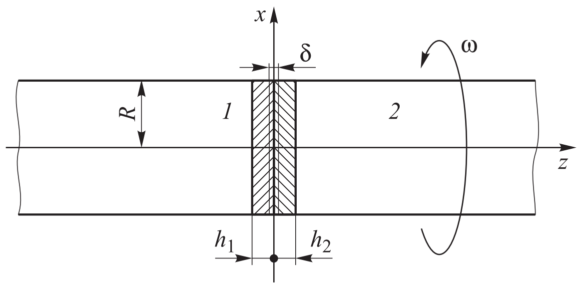

Рис. 1. Схема взаимодействия двух цилиндрических тел

Примем, что температура тел T_0 постоянна и равна температуре окружающей среды, поэтому ее можно принять за начало отсчета температур: $T_0 = 0$. Задача распределения тепла в покрытиях сводится к решению уравнения теплопроводности, которое в несжимаемой среде имеет вид

$$C\gamma\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot \operatorname{grad} T\right) = \operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) + f, \tag{3}$$

где T — температура; λ — коэффициент теплопроводности; f — объемная плотность распределенных в нем источников тепла; C — массовая теплоемкость, γ — плотность вещества. Поскольку процесс квазистационарный и векторы скорости $\mathbf{v}$ и градиента температур ортогональны, левая часть уравнения (3) равна нулю.

Переходя к цилиндрической системе координат, получаем [12]

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{e}_z;$$

$$\operatorname{div}\left(\lambda \operatorname{grad} T\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\lambda\rho\frac{\partial T}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Здесь ρ, φ — цилиндрические координаты (радиус и угол); $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ — векторы ортонормированного базиса цилиндрической системы координат. Второе слагаемое в правой части этих выражений равно нулю, так как температура не зависит от угла φ. Поскольку нам нужно найти максимальное значение температуры, которое достигается при радиусе ρ, близком к R, достаточно рассмотреть цилиндрическое кольцо: $a \le \rho \le b$, $-h_1 \le z \le h_2$, где размеры a, b близки радиусу R. В пределах этого тонкого кольца можно принять допущение, что температура не зависит от значения ρ. Тогда для третьего слоя запишем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-f. \tag{4}$$

Сформулируем граничные условия задачи теплопроводности между покрытиями *1* и *2* для неоднородного по теплофизическим свойствам третьего слоя толщиной δ с распределенным в нем источником тепла $\left(\delta << \inf\left(h_{10},\, h_{20}\right)\right)$.

Поставим на границах третьего тела следующие условия:

$$T=T_1,\quad \lambda\left(-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial T}{\partial z}=\lambda_1\frac{\partial T}{\partial z}\ \text{при}\ z=-\frac{\delta}{2}; \tag{5}$$

$$T=T_2,\quad \lambda\left(\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial T}{\partial z}=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial z}\ \text{при}\ z=\frac{\delta}{2}. \tag{6}$$

Здесь T_1 и T_2 — температуры в покрытиях *1* и *2*; λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности их материалов; $\lambda(z)$ — переменный коэффициент теплопроводности третьего слоя. Условия (5) и (6) представляют собой условия равенства температур и потоков тепла между разнородными контактирующими телами. Отметим, что вследствие малости толщины δ справедливо соотношение

$$\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} f\,dz=Q,$$

где величина Q определяется формулой (2).

Интегрируя выражение (4), с учетом граничных условий (5) и (6) получаем

$$\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial z}-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial z}=-Q.$$

Для покрытий вне третьего слоя граничные условия имеют следующий вид: $T_1=0$ при $z=-h_1$, $T_2=0$ при $z=h_2$ и $T_1=T_2=T^*$ при $z=0$. Тогда из уравнений теплопроводности для покрытий вне третьего слоя

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T_1}{\partial z}\right)=0;\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T_2}{\partial z}\right)=0$$

найдем выражения для температур в покрытиях:

$$T_2=T^*\left(1+\frac{z}{h_2}\right);\qquad T_1=T^*\left(1-\frac{z}{h_1}\right).$$

В результате для максимальной (локализованной вблизи внешней окружности оснований цилиндров) контактной температуры T^* с учетом формулы (1) получим выражение

$$T^* = \frac{h_1 h_2 \omega R \tau_* \left[1 - \exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right]}{\lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2 - \frac{1}{2} h_1 h_2 \omega R (\beta_1 + \beta_2) \tau_* \left[1 - \exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*}\right)\right]}, \qquad (7)$$

идентичное выражению для плоских поверхностей [2].

Определение максимальной контактной температуры в случае трения сферических поверхностей. Пусть в твердом теле имеется сферическая полость с нанесенным покрытием толщиной h_1, внутри которого находится подвижный шар с покрытием толщиной h_2. Радиус сферической поверхности контакта двух тел равен R. Шар закреплен на стержне, проходящем через его центр, и вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 2). Найдем максимальное значение контактной температуры. Очевидно, что оно достигается в точках с максимальной линейной скоростью движения, т. е. в экваториальной плоскости.

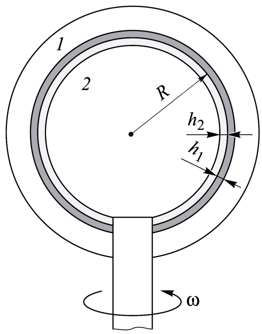

Рис. 2. Схема взаимодействия двух сферических тел

Перейдем в сферическую систему координат. Температура не зависит от угла φ, поэтому уравнение теплопроводности для третьего слоя имеет вид

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\lambda \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) = -f. \qquad (8)$$

Если рассматривать малый участок шарового слоя при $\frac{\pi}{2} - \varepsilon \le \theta \le \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, можно принять допущение, что температура не зависит от угла θ и уравнение (8) принимает вид

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\lambda \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho}\right) = -f. \qquad (9)$$

Граничные условия задачи теплопроводности между покрытиями *1* и *2* (см. рис. 2) для неоднородного по теплофизическим свойствам слоя толщины δ с распределенным в нем источником тепла запишем в виде

$$T = T_1, \quad \lambda(\rho)\frac{\partial T}{\partial \rho} = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \rho} \text{ при } \rho = R + \frac{\delta}{2}; \tag{10}$$

$$T = T_2, \quad \lambda(\rho)\frac{\partial T}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \rho} \text{ при } \rho = R - \frac{\delta}{2}, \tag{11}$$

где T_1 и T_2 — температуры в покрытиях *1* и *2*; λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности их материалов.

Условия (10) и (11) — условия равенства температур и потоков тепла между разнородными контактирующими телами. Вследствие малости толщины δ справедливо соотношение

$$\int_{R-\delta/2}^{R+\delta/2} \rho^2 f\, d\rho = R^2 Q,$$

где величина Q определяется по формуле (2).

Интегрируя выражение (9), получаем

$$\left(R+\frac{\delta}{2}\right)^2 \lambda\left(R+\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial T}{\partial \rho}\left(R+\frac{\delta}{2}\right) - \left(R-\frac{\delta}{2}\right)^2 \lambda\left(R-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\partial T}{\partial \rho}\left(R-\frac{\delta}{2}\right) = -R^2 Q.$$

С учетом граничных условий (10) и (11) и малости толщины δ имеем

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \rho} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial \rho} = -Q.$$

Из уравнений теплопроводности для покрытий вне третьего слоя

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\lambda \rho^2 \frac{\partial T_1}{\partial \rho}\right) = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\lambda \rho^2 \frac{\partial T_2}{\partial \rho}\right) = 0$$

найдем выражения для температур в покрытиях

$$T_1 = \frac{T^* R(R+h_1)}{h_1}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R+h_1}\right); \qquad T_2 = \frac{T^* R(R-h_2)}{h_2}\left(\frac{1}{R-h_2} - \frac{1}{\rho}\right).$$

В результате для максимальной (в экваториальной плоскости сферических тел) контактной температуры T^* (с учетом $h_1 << R$, $h_2 << R$) снова получаем выражение (7).

Необходимо также потребовать, чтобы температура T^* при любых значениях t не достигала температур плавления T_1^m, T_2^m материалов соответствующих покрытий. Это накладывает ограничение на скорость ω, т. е. если выполняются равенства $T^* = \min\left\{T_i^m\right\}$, $i = 1, 2$, можно найти критическую скорость ω^*, превышение которой приведет в какой-то момент времени к подплавлению одного из покрытий.

Соответственно, в обоих рассмотренных случаях значение критической скорости определяется выражением [3]

$$\omega^* = \frac{T^*\left(\lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2\right)}{R h_1 h_2 \tau_* \left\{\frac{1}{2} T^*(\beta_1 + \beta_2)\left[1 - \exp\left(-\frac{k_2 q}{\tau_*}\right)\right] + \left[1 - \exp\left(-\frac{k_1 q}{\tau_*}\right)\right]\right\}}.$$

Заключение. В предложенной постановке задачи о взаимодействии цилиндрических и сферических тел с покрытиями при износе, тепловыделении с учетом зависимости коэффициента трения от температуры найдено аналитическое выражение для максимальной контактной температуры $T*$ в виде простой формулы, которая может быть использована при инженерных расчетах, а также получено выражение для критической скорости ω^*, превышение которой приведет к подплавлению одного из покрытий.

Отметим также, что при принятых допущениях максимальную контактную температуру и критическую скорость вращения для разных типов поверхностей можно определить по формуле, описывающей контактное трение двух плоскостей [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров В.М., Губарева Е.А. Задача о взаимодействии тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. *Экологический вестник научных центров ЧЭС*, 2006, № 2, с. 10–15.

[2] Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю., Щетинин А.Н. Моделирование взаимодействия тел с покрытиями при износе, тепловыделении и учете зависимости коэффициента трения от температуры. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 2. URL: http://engjournal.ru/articles/43/43.pdf

[3] Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю., Щетинин А.Н. Моделирование взаимодействия цилиндрических тел с покрытиями при износе и тепловыделении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/956.html

[4] Александров В.М. О термосиловом взаимодействии деформируемых покрытий тел с учетом износа. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 1995, № 5. с. 70–75.

[5] Александров В.М. Абразивный износ тонкого мягкого покрытия при нелинейном законе трения с учетом тепловыделения. *Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Технические науки*, 2001, спец. выпуск, с. 11–13.

[6] Александров В.М. Контактная задача для тел с покрытиями с учетом нелинейного трения, износа и тепловыделения от трения. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2003, № 4, с. 128–135.

[7] Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. Москва, Наука, 1974, 640 с.
[8] Хрущов М.М., Бабичев М.А. *Абразивное изнашивание*. Москва, Наука, 1970, 251 с.
[9] Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. *Основы расчетов на трение и износ*. Москва, Машиностроение, 1977, 528 с.
[10] Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя. *Инженерно-физический журнал*, 1963, т. 6, № 10, с. 129–136.
[11] Alexandrov V., Gavdzinski V. Contact interaction of deformed coverings of solids with regard for wear and friction heating. *Proc. of the Second Intern. Symp. on Thermal Stresses and Related Topics*, 1997, New York, Rochester, 1997, pp. 371–373.
[12] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. В 4 т. Т. 1: Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011, 463 с.

Статья поступила в редакцию 10.10.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю., Щетинин А.Н. Моделирование взаимодействия цилиндрических и сферических тел с покрытиями при износе и тепловыделении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 03. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/solid/1232.html

Губарева Елена Александровна родилась в 1982 г., окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 18 научных работ в области механики контактных взаимодействий. e-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Мозжорина Татьяна Юрьевна родилась в 1959 г., окончила МАИ в 1982 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 18 научных работ в области моделирования характеристик газотурбинного двигателя, моделирования полета пассажирских самолетов, оптимизации системы управления в летательных аппаратах. e-mail: mozzhorina@mail.ru

Щетинин Александр Николаевич родился в 1950 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1972 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ по теории групп Ли и топологии однородных пространств. e-mail: alex1621@bk.ru

Simulating the interaction of cylindrical and spherical bodies with coatings when there is wear and heat release

© E.A. Gubareva, T.Yu. Mozzhorina, A.N. Shchetinin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The scheme of the contact between cylindrical and spherical solids and soft coatings has been considered. Using a nonlinear expression for the friction factor dependence on the contact pressure and temperature of coating the relation of maximum contact temperature and contact pressure has been obtained. The critical speed values at which submelting one of the coatings occurs have been found. The results can be used for solving many engineering problems because they are presented as simple formulae.

Key words: *coating, friction, heat release, contact pressure, contact temperature, wear.*

REFERENCES

[1] Alexandrov V.M., Gubareva E.A. Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov ChAES – Ecological Herald of ChNS, 2006, no. 2, pp. 10–15.
[2] Gubareva E.A., Mozzhorina T.Yu., Shchetinin A.N. Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations, 2012, iss. 2. Available at: http://engjournal.ru/articles/43/43.pdf
[3] Gubareva E.A., Mozzhorina T.Yu., Shchetinin A.N. Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovations, 2013, iss. 9. Available at: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/956.html
[4] Alexandrov V.M. Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Problems of Mechanical Engineering and Machine Reliability, 1995, no. 5, pp. 70–75.
[5] Alexandrov V.M., Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskie nauki – Proceedings of Universities. North Caucasus Region. Technical sciences, 2001, special issue, pp. 11–13.
[6] Alexandrov V.M., Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Proceedings of RAS. Mechanics of solids, 2003, no. 4, pp. 128–135.
[7] Cherepanov G.P. Mekhanika khrupkogo razrusheniya [Sharp-Crack Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 640 p.
[8] Khrushchev M.M., Babichev M.A. Abrazivnoe iznashivanie [Abrasive Wear]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 251 p.
[9] Kragelskiy I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S. Osnovy raschetov na trenie I iznos [Principles of friction and wear calculation]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 528 p.
[10] Podstrigach Ya.S. Inzhenerno-Fizicheskiy Zhurnal – Journal of Engineering Thermophysics, 1963, vol. 6, no. 10, pp. 129–136.
[11] Alexandrov V., Gavdzinski V. Contact interaction of deformed coverings of solids with regard for wear and friction heating. Proc. of the Second Int. Symp. on Thermal Stresses and Related Topics, 1997, New York, Rochester. 1997, pp. 371–373.
[12] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy. Vol. 1. Tenzornyi analiz [Continuum Mechanics. Vol. 1. Calculus of Tensors.]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 463 p.

Gubareva E.A. (b. 1982) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2004. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. The author of 18 publications in the field of contact mechanics. E-mail: gubareva_ea@pochta.ru

Mozzhorina T.Yu. (b. 1959) graduated from Moscow Aviation Institute in 1982, Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. The author of 18 publications in the field of mathematical simulation of gas-turbine engine, mathematical simulations of aircraft flight, optimization of aircraft control system. E-mail: mozzhorina@mail.ru.

Shchetinin A.N. (b.1950) graduated from Lomonosov Moscow State University in 1972. Ph.D., Assoc. Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. The author of more than 20 publications in the field of Lie groups theory and the topology of homogeneous spaces.