

## **Инженерная геометрия – новая учебная дисциплина по геометро-графической подготовке для высших технических учебных заведений**

© Л.С. Соколова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Разработана новая учебная дисциплина, альтернативная начертательной геометрии, отвечающая требованиям современной геометро-графической подготовки для первого уровня образования (бакалавры и специалисты), её теоретическая часть представлена наглядной многомерной геометрией. Показано, что многомерная геометрия в наглядном изложении позволяет изучать фактический материал, отказавшись от введения в рассмотрение математических выкладок и формул, но с наиболее полным использованием компьютерных возможностей визуализации 3D-моделей. Приведены примеры, показывающие возможности наглядной многомерной геометрии при использовании в учебных планах геометро-графической подготовки по программе бакалавриата. Представлен проект программы предлагаемой учебной дисциплины «Инженерная геометрия».*

**Ключевые слова:** учебная программа, геометро-графическая подготовка, инженерная геометрия, наглядная многомерная геометрия.

**Анализ состояния современной геометро-графической подготовки инженеров в техническом вузе.** Современное наукоемкое промышленное производство предъявляет повышенные требования к подготовке инженеров в технических вузах для проектно-конструкторской деятельности. Базой для этого является геометро-графическая подготовка. Её основы закладываются кафедрами инженерной графики с первых шагов обучения студентов и далее развиваются на специальных кафедрах на протяжении всего периода обучения в вузе. Геометро-графическая подготовка должна не только давать систематизированные знания, но и строить свои программы, нацеленные на будущее, и ни в какой мере не может опираться на способы, невостребованные в современной практической деятельности.

Так, стало очевидным, что сегодня составляющая геометро-графической подготовки, базирующаяся на начертательной геометрии, утратила практическую востребованность в связи с переходом от создания 2D-чертежа к созданию 3D-модели. Теперь объект для изучения помещается не в проективном пространстве, а в объемном пространстве компьютерной среды — модельном пространстве. С этих позиций представляется целесообразным изучать не проекционные свойства фигур при отображении на плоскость, а обратиться непосредственно к изучению объемных моделей геометрических фигур в пространстве.

В дискуссиях о судьбе начертательной геометрии существуют разные точки зрения: от крайних — отказаться от изучения методов начертательной геометрии в техническом вузе [1] или сохранить ее как теорию в геометро-графической подготовке студентов [2] — до компромиссных предложений о реорганизации курса начертательной геометрии посредством отражения в нем основ компьютерных 3D-методов геометрического моделирования [3, 4].

Очевидно, что сегодня, при отсутствии признанной альтернативы начертательной геометрии, существует реальная опасность потери для студентов технических вузов геометрии как *наглядного* раздела математики.

В математике, как и вообще в научных исследованиях, встречаются две тенденции: к абстракции и к наглядности. В геометрии тенденция к абстракции привела к грандиозным систематическим построениям в аналитических разделах математики. Тем не менее наглядное понимание «...играет первенствующую роль в геометрии, и притом не только как обладающее большой доказательной силой при исследовании, но и для понимания и оценки результата исследования» [5].

Наглядное изложение позволяет изучать фактический материал, отказавшись от введения в рассмотрение математических выкладок и формул. Наглядное объяснение постановок задач, методов их решения и полученных результатов используется и в компьютерной геометрии [6], позволяющей, в частности, визуализировать сложные математические объекты.

Доводом в пользу сохранения начертательной геометрии является утверждение о том, что начертательная геометрия развивает пространственное воображение. Этот ложный тезис, десятилетиями привлекаемый для оправдания трудностей освоения студентами методов проецирования на две (три) плоскости проекции, возник в противоречие физиологии зрительной системы, приспособленной для восприятия объемных предметов реального мира и *конструирующей* предметные образы восприятия из сенсорных образов зрения. Это конструирование [7] происходит не буквально по образу и подобию реальных предметов, а по правилам и алгоритмам зрительного языка, реализуемого нейронными механизмами перцепции в качестве носителя со своим «зрительным алфавитом, словами и правилами формирования предложений». По аналогии с тем, как в языке формируются предложения (сочетания) из слов, из отдельных предметных образов формируется трехмерная зрительная сцена. Формирование предметных образов составляет суть процессов зрительного восприятия.

Объективные трудности при изучении начертательной геометрии возникают именно на уровне зрительного восприятия, когда вместо трехмерного объекта предлагается двумерная модель, поскольку дву-

мерное евклидово пространство формирует ту семантическую характеристику, которая связана только с алфавитом. Преодоление трудности перехода от двумерного геометрического пространства речевых характеристик к объемному пространству зрительного языка возможно лишь монотонным обучением на всем его протяжении, зависящем от степени этого обучения.

Переход к трехмерной компьютерной графике сразу же снял проблему зрительного восприятия и показал несостоятельность оправдания известных трудностей в освоении методов начертательной геометрии ссылками на «недостаточную подготовленность школьников», «нежелание углубляться в предмет» и пр.

Однако нельзя не обратить внимание на обратную сторону компьютеризации в обучении. Как отмечают преподаватели вузов, повсеместное внедрение и широкое использование компьютерной техники в повседневной жизни породило проблему нежелания учащихся познавать теоретические аспекты науки, некоторые теоретические разделы изучаемого материала и т.п. В связи с этим становится актуальным обращение к современным теориям, вызывающим интерес у молодого поколения, например к представлению о многомерности пространства. Современные взгляды на абстрактный многомерный мир базируются на обобщении законов трехмерного мира и доступны к восприятию наглядным способом изложения с проверкой основных постулатов через частные реализации на компьютерных моделях трехмерного пространства. При этом абстрактно логические построения геометрии расширяют область геометрических приложений, что нацелено на будущую деятельность молодых инженеров.

Наиболее высокой эффективностью для запоминания обладают не сами наглядные средства, а их сочетание с речью и практической деятельностью, что может быть реализовано через лекции с проработкой отдельных разделов посредством лабораторных работ на компьютере.

**Наглядная многомерная геометрия как теоретическая составляющая новой учебной дисциплины.** Наглядность и современная геометрическая теория стали составляющими предлагаемой новой учебной дисциплины для первого уровня подготовки кадров (бакалавры и специалисты) в высших технических учебных заведениях. Новая дисциплина, названная «Инженерная геометрия», позиционируется как альтернатива начертательной геометрии. В структуре программы сохранены традиционные разделы геометрии: теоретическая часть, плоские и пространственные кривые линии, поверхности, позиционные и метрические задачи. Иллюстрационный материал выполнен на основе 2D- и 3D-моделей. Для практических и контрольных мероприятий предусмотрены лабораторные работы на компьютере. При решении позиционных и метрических задач в модельном пространстве используются геометрические способы.

Особенностью предлагаемой дисциплины является ее теоретический раздел — наглядная многомерная геометрия [8]. Он разработан на основе изучения и анализа разрозненных опубликованных данных о многомерной геометрии [6, 9] с учетом целей и новизны подхода к учебному процессу в современном техническом вузе.

Многомерная геометрия построила общую теорию для 1-, 2-, 3-, ...  $n$ -мерного пространств, что позволяет использовать ее достижения, оставаясь на уровне *наглядного* восприятия с возможностью обобщения до уровня абстрактного понимания. Пространство, в котором введены декартовы координаты  $(x^1, \dots, x^n)$ , называется  $n$ -мерным декартовым пространством и обозначается  $R^n$ . Число  $n$  называется размерностью пространства или числом измерений.

В многомерном пространстве принято все подпространства называть плоскостями с указанием их размерности ( $p$ ), например:

*точка* — 0-плоскость с размерностью 0 ( $p = 0$ );

*прямая* — 1-плоскость с размерностью 1 ( $p = 1$ );

*обычная плоскость* — 2-плоскость с размерностью 2 ( $p = 2$ );

*трехмерное пространство* — 3-плоскость с размерностью 3 ( $p = 3$ );

*четырёхмерное пространство* — 4-плоскость с размерностью 4 ( $p = 4$ );

...

*$(n - 1)$ -мерное пространство* — гиперплоскость с размерностью  $n - 1$  ( $p = n - 1$ ).

Размерность является одной из основных характеристик пространства. На прямой (числовой оси) точка определяется заданием одной координаты, на плоскости — двух, в пространстве — трех, в четырехмерном пространстве — четырех координат и т. д. Поэтому, принимая точку за основной элемент множества (пространства), считают, что прямая имеет одно измерение, плоскость — два и т. д. При этом каждая  $p$ -плоскость, где  $p < n$ , определяется заданием  $(p + 1)$  точки и полностью принадлежит  $n$ -плоскости ( $n$ -мерному пространству). Эти  $p$ -плоскости называются линейными подпространствами многомерного ( $n$ -мерного) пространства. Если пространства, принадлежащие одному  $n$ -мерному пространству, имеют общую часть, то говорят о размерности пространства пересечения ( $r$ ).

Расчет размерности вмещающего (содержащего) пространства ( $n$ ) и пространства пересечения ( $r$ ) для  $i$  пространств выполняют по следующим формулам соответственно:

$$n = \sum_{i=1}^i p_i + i - 1; \quad (1)$$

$$r = \sum_{i=1}^i p_i - n(i - 1). \quad (2)$$

Покажем на примере одного из разделов наглядной многомерной геометрии, а именно «Задание линейных форм многомерной геомет-

рии», простоту и доступность понимания курса, рассчитанного на студентов первого уровня квалификации высших технических учебных заведений.

При анализе взаимного положения двух линейных подпространств рассмотрим некоторые случаи.

1. **Две прямые** (две 1-плоскости,  $p_1 = p_2 = 1$ ):

- *не имеющие общих точек* — принадлежат, согласно (1), вмещающему их пространству минимальной размерности  $n = 1 + 1 + 2 - 1 = 3$ ;
- *пересекающиеся в точке* (0-плоскость,  $r = 0$ ) — принадлежат, согласно (2), вмещающему их пространству минимальной размерности  $0 = 1 + 1 - n$ ;  $n = 2$ .

Вывод: любые две прямые принадлежат одному минимальному трехмерному пространству, если же прямые пересекаются или параллельны, то они принадлежат одному двумерному пространству (2-плоскость).

Для сравнения: три линейно независимые прямые ( $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ ) принадлежат вмещающему пространству минимальной размерности  $n = 1 + 1 + 1 + 3 - 1 = 5$ .

2. **Прямая и плоскость** (1-плоскость,  $p_1 = 1$  и 2-плоскость,  $p_2 = 2$ ):

- *не имеющие общих точек* — принадлежат вмещающему их пространству минимальной размерности  $n = 1 + 2 + 1 = 4$ ;
- *пересекающиеся в трехмерном пространстве* ( $n = 3$ ) — определяют пространство пересечения размерности  $r = 1 + 2 - 3 = 0$  (0-плоскость).

Вывод: если прямая и плоскость не имеют общих точек, то пространство наименьшей размерности, содержащее их, является четырехмерным. Если же они имеют только одну общую точку или параллельны, то они уже лежат в трехмерном пространстве.

3. **Две плоскости** (две 2-плоскости,  $p_1 = p_2 = 2$ ):

- *не имеющие общих точек* — принадлежат вмещающему их пространству минимальной размерности  $n = 2 + 2 + 1 = 5$ ;
- *пересекающиеся в трехмерном пространстве* ( $n = 3$ ) — определяют пространство пересечения размерности  $r = 2 + 2 - 3 = 1$  (1-плоскость);
- *пересекающиеся в четырехмерном пространстве* ( $n = 4$ ) — определяют пространство пересечения размерности  $r = 2 + 2 - 4 = 0$  (0-плоскость).

Для сравнения определим размерность пространства пересечения трех ( $i = 3$ ) плоскостей ( $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ ) в трехмерном пространстве ( $n = 3$ ):  $r = 2 + 2 + 2 - 3 (3 - 1) = 0$  (0-плоскость).

4. **Два трехмерных пространства** (две 3-плоскости,  $p_1 = p_2 = 3$ ) в четырехмерном пространстве  $R^4$  — пересекаются по плоскости или вполне параллельны, так как  $r = 3 + 3 - 4 = 2$  (2-плоскость).

**5. Общий случай взаимного расположения двух пространств ( $k$ -плоскость и  $l$ -плоскость):**

- не имеющие ни общей точки, ни общего направления параллельности – принадлежат содержащему их пространству  $R^n$  размерности  $n = k + l + 1$ ;

- $k$ -плоскость и  $l$ -плоскость имеют только один общий элемент — одну точку или одно направление параллельности — содержащее их пространство будет уже иметь размерность на единицу меньше, т. е.  $R^{k+l}$ ,

- рассматриваемые пространства имеют  $m$  общих независимых направлений ( $m$ -параллельны) — наличие каждого независимого направления снижает размерность содержащего пространства, т. е.  $n = k + l - m$ .

Вывод: размерность вмещающего пространства снижается на размерность пересечения.

В  $n$ -мерном пространстве можно сконструировать координатную систему. Как известно, в трехмерном евклидовом пространстве через произвольную точку всегда можно провести три взаимно перпендикулярные прямые. Через произвольную точку евклидова  $n$ -мерного пространства можно провести  $n$  взаимно перпендикулярных прямых и, приняв их за оси декартовой системы координат данного пространства, сконструировать в  $n$ -мерном пространстве координатную систему.

Рассмотренные случаи показывают, что многомерное пространство является прямым обобщением евклидова трехмерного пространства, а значит, идеи многомерного пространства могут быть проверены и апробированы на примере трехмерного пространства путем 3D-моделирования в модельном пространстве современного компьютера.

Наглядное изложение современной теории многомерной геометрии демонстрирует доступность понимания её идей. Это позволяет использовать наглядную многомерную геометрию в качестве теоретической базы новой учебной дисциплины по геометро-графической подготовке студентов первого уровня обучения в высших технических учебных заведениях вместо утратившей практическую востребованность теории проецирования на две (три) плоскости.

Предлагаемая программа призвана стать связующим звеном, обеспечивающим непрерывность обучения геометрии от школьной стереометрии — через построение сохраняющих высокую наглядность электронных моделей геометрических объектов — к конструированию изделий в 3D-пространстве.

Обновление программ геометро-графической подготовки на начальном уровне обучения позволит кафедрам графики активно включиться в общий процесс инженерной подготовки в условиях ужесточения требований к квалификации молодых инженеров в части проектно-конструкторской деятельности.

Приведем проект учебной программы для предлагаемой новой дисциплины по геометрической подготовке в высших технических учебных заведениях.

## Инженерная геометрия

(Проект учебной программы)

1. Инженерная геометрия. Предмет, назначение. Электронная модель изделия. Модельное пространство. Отображения, преобразования и обратимость изображений как геометрические характеристики модельного пространства. Преобразование координатной системы и преобразование геометрической модели.

2. Введение в *наглядную* многомерную геометрию.

3. Задание линейных форм многомерной геометрии.

3.1. Основные понятия многомерной геометрии: многомерное множество,  $p$ -плоскость ( $p$ -мерное пространство), вмещающее (содержащее) пространство, размерность пространства пересечения.

3.2. Задание прямых и плоскостей, их взаимное положение: отсутствие общих точек, пересечение, параллельность, перпендикулярность.

3.3. Многогранники в  $n$ -мерной геометрии. Наглядно-геометрический подход. Состав и представление геометрического образа в  $n$ -мерном пространстве. Правильные многогранники в многомерном пространстве. Типы представления формы изделия в модельном пространстве: каркасное, поверхностное, твердотельное.

3.4. Понятие о развертке и модели границ  $n$ -мерного многогранника. Развертывающиеся и неразвертывающиеся поверхности. Пример построения разверток 3- и 4-мерных геометрических образов.

4. Кривые линии и обводы. Плоские и пространственные кривые. Касательные и нормали к кривым. Цилиндрическая винтовая линия. Построение обводов. Построение и редактирование приближенных плоских кривых (аппроксимация и интерполяция).

5. Поверхности. Обзор некоторых видов поверхностей: нелинейчатые, линейчатые, поверхности параллельного переноса, поверхности вращения, винтовые поверхности. Задание и построение в модельном пространстве. Сечение многогранника, цилиндра, сферы, тора плоскостью. Конические сечения.

6. Позиционные задачи. Геометрические способы решения в модельном пространстве.

6.1. Принадлежность элементов пространства  $n$  измерений подпространствам разных размерностей и пространству пересечения.

6.2. Взаимное положение двух фигур: пересечение прямой с плоскостью, двух плоскостей, прямой с поверхностью, двух поверхностей (частные случаи).

6.3. Касание — частный случай пересечения. Плоскость, касательная к поверхности, и нормаль к ней.

7. Метрические задачи. Геометрические способы решения в модельном пространстве. Определение расстояний между точками, прямыми и поверхностями (плоскостями) и углов, составленных прямыми, плоскостями и поверхностями.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рукавишников В.А., Антонов В.В. Начертательная геометрия: от расцвета до заката. *Сб. материалов Поволжской науч.-метод. конф. «Проблемы геометрического компьютерного моделирования в подготовке конструкторов для инновационного производства»*. Саратов, 2010, с. 137–144.
- [2] Вышнепольский В.И., Сальков Н.А. Цели и методы обучения графическим дисциплинам. *Геометрия и графика*. 2013, т. 1, вып. 2, с. 8–9. doi: 10.12737/777
- [3] Хейфец А.Л. Реорганизация курса начертательной геометрии как актуальная задача развития кафедр графики. *Геометрия и графика*, 2013, т. 1, вып. 2, с. 21–23. doi: 10.12737/781
- [4] Горнов А.О. К проблеме совершенствования содержания дисциплины «Инженерная графика». *Тр. Междунар. и науч.-техн. конф. «Информационные средства и технологии»*. Москва, Изд-во МЭИ, 2007, т. 1, с. 190–193.
- [5] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия*. Москва, Наука, 1981, 344 с.
- [6] Фоменко А.Т. *Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире*. Москва, МГУ, 1998.
- [7] Измайлов И.А., Черноризов А.М. Язык восприятия и мозг. *Психология*, 2005, № 4, с. 22–52.
- [8] Соколова Л.С. Наглядная многомерная геометрия как теоретическая составляющая в программе геометро-графической подготовки в высших технических учебных заведениях. *Объединенный научный журнал*, 2014, №1–3, с. 39–40.
- [9] Гордеевский Д.З., Лейбим А.С. *Популярное введение в многомерную геометрию*. Харьков, 1964, 192 с.

Статья поступила в редакцию 09 июня 2014 г.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Соколова Л.С. Инженерная геометрия — новая учебная дисциплина по геометро-графической подготовке для высших технических учебных заведений. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 3.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/1212.html>

**Соколова Людмила Сергеевна** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Инженерная графика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных публикаций в области информационных технологий в преподавании начертательной геометрии, инженерной графики и компьютерной графики. e-mail: sls@bmstu.ru



## Engineering Geometry as a new subject of geometrical graphics training for higher technical educational institutions

© L.S. Sokolova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article presents a new academic discipline, alternative to descriptive geometry, which meets the requirements of modern geometrical graphic training for the first level of education (bachelors and specialists). Its theoretical part is represented by a visual multidimensional geometry. It is shown that multidimensional geometry in a visual presentation allows us to study the actual material, refusing to consider mathematical calculations and formulas, but we can use computer visualization capabilities of 3D-models with the most comprehension. The given examples demonstrate possibilities of visual multidimensional geometry when used in the course of geometrical graphic education following syllabus for bachelor training. A draft of the suggested program of the discipline "Engineering Geometry" is presented.*

**Keywords:** syllabus, geometrical graphic training, Engineering Geometry, visual multidimensional geometry.

### REFERENCES

- [1] Rukavishnikov V.A., Antonov V.V. Nachertatelnaya geometriya: ot rastsвета do zakata [Descriptive geometry: from flowering until decline]. *Sbornik materialov Povolzhskoy nauchno-metodicheskoy konf. "Problemy geometricheskogo kompyuternogo modelirovaniya v podgotovke konstruktorov dlya innovatsionnogo proizvodstva* [Collected materials of Povolzhskaya scientific-method. conf. "Problems of geometric computer modeling in teaching designers for innovative production"]. Saratov, 2010, pp. 137–144.
- [2] Vyshnepolsky V.I., Salkov N.A. *Geometriya i Grafika — Geometry and Graphics*, 2013, vol. 1, iss. 2, pp. 8–9. doi: 10.12737/777
- [3] Kheyfets A.L. *Geometriya i Grafika — Geometry and Graphics*, 2013, vol. 1, iss. 2, pp. 21–23. doi: 10.12737/781
- [4] Gornov A.O. K probleme sovershenstvovaniya soderzhaniya distsipliny "Inzhenernaya graphica" [On the problem of improving the content of the course "Engineering Graphics"]. *Trudy Mezhdunarodnoy i nauchno-tekhnicheskoy konf. "Informatsionnye sredstva I tekhnologii"* [Proc. Int. and scientific-technical conf. "Information tools and technologies."]. Moscow, MEI Publ., 2007, vol. 1, pp. 190–193.
- [5] Hilbert D. und Cohn-Vossen S. *Anschauliche Geometrie*. Berlin, Verlag von J. Springer, 1932. [in Russia].
- [6] Fomenko A.T. *Naglyadnaya geometriya i topologiya. Matematicheskiye obrazy v realnom mire* [Visual geometry and topology. Mathematical images in the real world]. Moscow, Lomonosov MSU, 1998.
- [7] Izmailov I.A., Chernorizov A.M. *Psikhologiya — Psychology*, 2005, no. 4, pp. 22–52.
- [8] Sokolova L.S. *Ob"edinennyyi nauchnyi zhurnal — Joint scientific journal*, 2014, no. 1–3, pp. 39–40.

- [9] Gordeyevsky D.Z., Leibim A.S. *Populyarnoe vvedenie v mnogomernuyu geometriyu* [Popular introduction to multidimensional geometry]. Kharkov, 1964, 192 p.

**Sokolova L.S.**, PH.D., Assoc. Professor of the Engineering Graphics Department at Bauman Moscow State Technical University. She is the author of more than 60 scientific publications in the field of informational technologies for teaching descriptive geometry, engineering graphics and computer graphics. e-mail: sls@bmstu.ru