УДК 531.66

Плоская задача об упругом ударе тела о препятствие

© В.В. Лапшин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена плоская задача упругого удара тела о шероховатую поверхность в рамках модели удара Ньютона (стереомеханической модели удара). Определена зависимость характера движения тела после удара от положения точки контакта относительно центра масс тела, момента инерции тела, коэффициента восстановления, коэффициента трения и скорости точки контакта тела с поверхностью (либо скорости центра масс тела и его угловой скорости) до удара. Дана соответствующая графическая интерпретация.

Ключевые слова: *удар, сухое трение, стереомеханическая модель.*

Введение. Явление удара часто встречается при движении механических систем, в том числе при работе различных машин и механизмов. Многие прикладные задачи могут быть исследованы в соответствии с теорией удара Ньютона [1–7]. Аналитическое решение плоской задачи об ударе тела о шероховатую поверхность при точечном контакте тела с поверхностью получено в [1, 2]. В этом случае однозначно определяются импульс ударной силы реакции и характер движения (скорости) тела после удара. В данной работе показано, что тип удара или характер движения точки соприкосновения в процессе удара определяется с помощью графической картины на плоскости параметров «угол трения φ и угол падения β» (направление скорости точки соприкосновения тела с поверхностью до удара). В качестве границ, разделяющих области, соответствующие различным типам удара, выступают кривые, поведение которых зависит от положения точки соударения относительно центра масс тела, радиуса инерции тела, угла трения и коэффициента восстановления при ударе.

Исследование процесса удара. Рассмотрим плоский упругий удар тела массой m о неподвижную шероховатую поверхность (рис. 1). Пусть C — центр масс тела, S — точка контакта тела с поверхностью при ударе. Радиус инерции тела относительно центра масс обозначим ρ. Единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ определяют касательное и нормальное направления к поверхности в точке контакта S. Обозначим через $\mathbf{R} = (R_\tau, R_n)$ касательный и нормальный импульсы ударной силы реакции в точке S. Положение центра масс C относительно точки S определяется параметрами $h \geq 0$ и b. Не нарушая общности, можно считать, что центр масс C лежит слева от точки контакта S, при этом

$$b \geq 0. \tag{1}$$

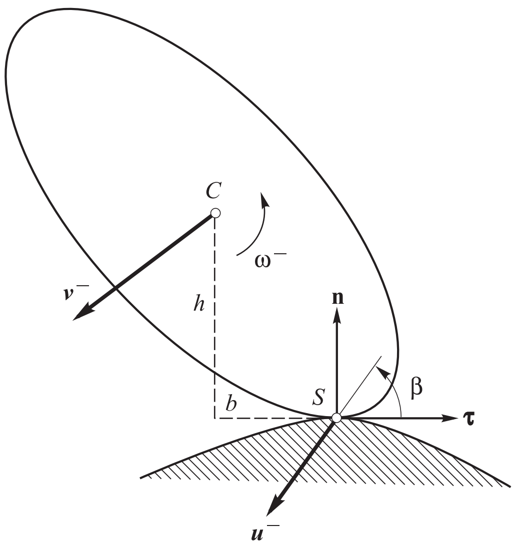

Рис. 1. Схема взаимодействия тела с препятствием

Для случая $b<0$ (центр масс C лежит справа от точки контакта S) все результаты могут быть получены из соображений симметрии.

Обозначим через $\mathbf{v}=(v_\tau, v_n)$ касательную и нормальную скорости центра масс C, $\mathbf{u}=(u_\tau, u_n)$ — касательную и нормальную скорости точки контакта S, ω — угловую скорость тела. За положительное примем направление угловой скорости против хода часовой стрелки. Скорости точек C и S связаны кинематическими соотношениями

$$u_\tau = v_\tau + \omega h, u_n = v_n + \omega b. \tag{2}$$

Процесс удара разделим на две фазы: в фазе деформации нормальная составляющая скорости точки контакта уменьшается до нуля, оставаясь отрицательной, а в фазе восстановления — увеличивается от нуля до некоторого положительного значения.

Нормальная скорость точки S до удара отрицательна, в конце фазы деформации равна нулю, после удара положительна, а нормальная составляющая импульса ударной силы реакции должна быть неотрицательной:

$$u_n^- < 0,\ u_n' = 0,\ u_n^+ > 0,\ R_n \geq 0\,. \tag{3}$$

Значения всех скоростей до удара будем обозначать верхним индексом «–» , значения скоростей после удара — «+», а значения скоростей в конце фазы деформации (или начале фазы восстановления) — «'».

Уравнения удара (движения центра масс и изменения кинетического момента тела относительно центра масс) в фазе деформации имеют вид

$$m(v_\tau' - v_\tau^-) = R_\tau',\ m(v_n' - v_n^-) = R_n',\ m\rho^2(\omega' - \omega^-) = R_n' b + R_\tau' h, \tag{4}$$

а в фазе восстановления —

$$m(v_\tau^+ - v_\tau') = R_\tau'',\ m(v_n^+ - v_n') = R_n'',\ m\rho^2(\omega^+ - \omega') = R_n'' b + R_\tau'' h. \tag{5}$$

Здесь R'_n, R'_τ, R''_n, R''_τ — нормальные и касательные составляющие импульса ударной силы реакции соответственно в фазах деформации и восстановления. При этом для нормальных составляющих [1–7] $R''_n = kR'_n$, где $0 \le k \le 1$ — коэффициент восстановления при ударе. При абсолютно неупругом ударе $k = 0$, а при абсолютно упругом — $k = 1$.

Учитывая соотношения (2)–(3), из выражений (4)–(5) получаем формулы для изменения скорости точки контакта S в фазе деформации

$$m\rho^2(u'_\tau - u^-_\tau) = R'_\tau(\rho^2 + h^2) + R'_n bh, \; -m\rho^2 u^-_n = R'_n(\rho^2 + b^2) + R'_\tau bh \quad (6)$$

и фазе восстановления

$$m\rho^2(u^+_\tau - u'_\tau) = R''_\tau(\rho^2 + h^2) + kR'_n bh, \; m\rho^2 u^+_n = kR'_n(\rho^2 + b^2) + R''_\tau bh. \quad (7)$$

Отсюда получаем

$$m\rho^2(u^+_\tau - u^-_\tau) = R_\tau(\rho^2 + h^2) + R_n bh, \; m\rho^2(u^+_n - u^-_n) = R_n(\rho^2 + b^2) + R_\tau bh,$$

где $R_n = (1+k)R'_n$, $R_\tau = R'_\tau + R''_\tau$.

Примем гипотезу о том, что при ударе трение сводится к сухому трению [1–3, 5] с коэффициентом f, т. е. $|R_\tau| \le fR_n$. Если точка контакта в процессе удара в течение некоторого (бесконечно малого) интервала времени имеет постоянное направление касательной скорости, в этой фазе удара $R_\tau = -fR_n \operatorname{sign} u_\tau$.

В результате удара точка контакта S может в касательном к поверхности направлении остановиться или скользить в течение всего удара. При этом если в процессе удара под действием трения касательная скорость u_τ становится равной нулю в некоторый момент времени $t^* \in [t^-, t^+]$, то это не означает, что в дальнейшем в процессе удара она останется равной нулю. Действительно, чтобы $u_\tau \equiv 0$ при $t \in [t^*, t^+]$, должны выполняться соотношения $m\rho^2(u^+_\tau - u^*_\tau) = 0 = R^{**}_\tau(\rho^2 + h^2) + R^{**}_n bh$, $|R^{**}_\tau| \le f R^{**}_n$, где $u^*_\tau = 0$ — касательная скорость точки контакта в момент t^*, а R^{**}_τ, R^{**}_n — импульсы ударной силы реакции за время $[t^*, t^+]$. Отсюда

$$f \geq \frac{bh}{\rho^2 + h^2}. \tag{8}$$

Если условие (8) нарушено, то в силу геометрического положения тела точка контакта при $t \in [t^*, t^+]$ скользит направо (см. рис. 1), т. е. $u_\tau > 0$, так как $R_\tau^{**} = -fR_n^{**}$ и $m\rho^2(u_\tau^+ - u_\tau^*) = m\rho^2 u_\tau^+ = = R_\tau^{**}(\rho^2 + h^2) + R_n^{**}bh > 0$. В этом случае может произойти изменение направления скольжения точки контакта. При $t^*[t^-, t^+]$ точка контакта скользит налево, т. е. $u_\tau < 0$, или с отрицательной скоростью, которая под действием силы трения уменьшается до нуля, а затем начинает скользить направо с увеличивающейся положительной скоростью.

Перейдем к рассмотрению различных типов удара в зависимости от того, как осуществляется скольжение в процессе удара.

Скольжение прекращается в фазе деформации $u'_\tau = u_\tau^+ = 0.$ Из уравнений удара (6)–(7) получаем

$$R'_n = m\frac{-u_n^-(\rho^2 + h^2) + u_\tau^- bh}{\rho^2 + b^2 + h^2}, \quad R'_\tau = m\frac{u_n^- bh - u_\tau^-(\rho^2 + b^2)}{\rho^2 + b^2 + h^2},$$

$$R''_\tau = -\frac{bh}{\rho^2 + h^2}kR'_n, \quad u_n^+ = \frac{k}{m}(\rho^2 + b^2 + h^2)R'_n.$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\begin{gathered} u_n^- \leq 0, \; f \geq \frac{bh}{\rho^2 + h^2}, \; u_n^-(\rho^2 + h^2) - u_\tau^- bh \leq 0, \\ u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] \leq 0, \\ u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] \geq 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Скольжение прекращается в фазе восстановления $\operatorname{sign} u_\tau^- = \operatorname{sign} u'_\tau$, $u_\tau^+ = 0$, $R'_\tau = -f R'_n \operatorname{sign} u_\tau$. Из уравнений удара (6)–(7) имеем

$$R'_n = \frac{-m\rho^2 u_n^-}{\rho^2 + b^2 - fbh \operatorname{sign} u_\tau}, \quad u'_\tau = u_\tau^- - u_n^- \frac{bh - f(\rho^2 + h^2)\operatorname{sign} u_\tau}{\rho^2 + b^2 - fbh \operatorname{sign} u_\tau},$$

$$R''_\tau = -\frac{kR'_n bh + m\rho^2 u'_\tau}{\rho^2 + h^2}, \quad u_n^+ = \frac{kR'_n(\rho^2 + b^2) + R''_\tau bh}{m\rho^2}.$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия:

а) при скольжении направо

$$
\begin{aligned}
& u_n^- \le 0,\ u_\tau^- > 0,\ \frac{bh}{\rho^2+h^2} \le f \le \frac{\rho^2+b^2}{bh}, \\
& u_n^-[bh - f(\rho^2+h^2)] - u_\tau^-[\rho^2+b^2 - fbh] < 0, \\
& (1+k)u_n^-[bh - f(\rho^2+h^2)] - u_\tau^-[\rho^2+b^2 - fbh] \ge 0;
\end{aligned}
\tag{10}
$$

б) при скольжении налево

$$
\begin{aligned}
& u_n^- \le 0,\ u_\tau^- < 0,\ f \ge \frac{bh}{\rho^2+h^2}, \\
& u_n^-[bh + f(\rho^2+h^2)] - u_\tau^-[\rho^2+b^2 + fbh] > 0, \\
& (1+k)u_n^-[bh + f(\rho^2+h^2)] - u_\tau^-[\rho^2+b^2 + fbh] \le 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Полное скольжение (без изменения направления) $\operatorname{sign} u_\tau^- = \operatorname{sign} u_\tau^+$, $R_\tau' = -f R_n' \operatorname{sign} u_\tau$, $R_\tau'' = -f R_n'' \operatorname{sign} u_\tau = -f k R_n' \operatorname{sign} u_\tau$. Из уравнений удара (6)–(7) получаем

$$
R_n' = \frac{-m\rho^2 u_n^-}{\rho^2+b^2 - fbh \operatorname{sign} u_\tau},\ u_n^+ = -k u_n^-,
$$

$$
u_\tau^+ = u_\tau^- - (1+k)u_n^- \frac{bh - f(\rho^2+h^2)\operatorname{sign} u_\tau}{\rho^2+b^2 - fbh \operatorname{sign} u_\tau}.
$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия:

а) при скольжении направо

$$
\begin{aligned}
& u_n^- \le 0,\ u_\tau^- > 0,\ f \le \frac{\rho^2+b^2}{bh}, \\
& u_n^-[bh - f(\rho^2+h^2)] - u_\tau^-[\rho^2+b^2 - fbh] < 0, \\
& (1+k)u_n^-[bh - f(\rho^2+h^2)] - u_\tau^-[\rho^2+b^2 - fbh] < 0;
\end{aligned}
\tag{12}
$$

б) при скольжении налево

$$
u_n^- \le 0,\ u_\tau^- < 0,\ (1+k)u_n^-[bh + f(\rho^2+h^2)] - u_\tau^-[\rho^2+b^2 + fbh] > 0. \tag{13}
$$

Изменение направления скольжения. В процессе удара точка контакта S сначала скользит налево, а затем направо. Этот случай имеет место, когда не выполнено условие (8) или

$$f < \frac{bh}{\rho^2 + h^2} < \frac{\rho^2 + b^2}{bh}.$$

Здесь кроме (8) использовано неравенство

$$\frac{bh}{\rho^2 + h^2} < \frac{\rho^2 + b^2}{bh}, \tag{14}$$

которое всегда справедливо. Действительно, в силу (1) $b \geq 0$ и неотрицательности h оно эквивалентно неравенству $b^2 h^2 \leq (\rho^2 + b^2) \times$ $\times (\rho^2 + h^2)$, где радиус инерции $\rho \neq 0$.

Изменение направления скольжения в фазе деформации. В этом случае $t^- \leq t^* \leq t' \leq t^+$ и $u_n^* \leq 0$, где t^* — момент изменения направления скольжения в процессе удара.

На первом этапе фазы деформации при $t \in [t^-, t^*]$ точка контакта скользит налево $u_\tau^- < 0$, $u_\tau^* = 0$, $R_\tau'^* = f R_n'^*$, где u_n^*, u_τ^* — скорость точки контакта S в момент смены направления скольжения; $R_n'^*$, $R_\tau'^*$ — импульсы ударной реакции в течение первого этапа фазы деформации. Из уравнений удара для первого этапа фазы деформации

$$R_n'^* = \frac{-m\rho^2 u_\tau^-}{bh + f(\rho^2 + h^2)}, \quad u_n^* = u_n^- - u_\tau^- \frac{[\rho^2 + b^2 + f bh]}{bh + f(\rho^2 + h^2)}.$$

На втором этапе фазы деформации при $t \in [t^*, t']$ точка контакта скользит направо: $u_\tau^* = 0, u_\tau' > 0, u_n' = 0, R_\tau'^{**} = -f R_n'^{**}$, где $R_n'^{**}$, $R_\tau'^{**}$ — импульсы ударной реакции в течение второго этапа фазы деформации. Из уравнений удара для этого этапа

$$R_n'^{**} = \frac{-m\rho^2 u_n^*}{\rho^2 + b^2 - f bh}, \quad u_\tau' = -u_n^* \frac{[bh - f(\rho^2 + h^2)]}{\rho^2 + b^2 - f bh}.$$

При $t \in [t', t^+]$ точка контакта скользит направо: $u_\tau' \geq 0$, $u_\tau^+ > 0$, $u_n' = 0$, $R_\tau'' = -f R_n''$, $R_n'' = kR_n'$, $R_n' = R_n'^* + R_n'^{**}$. Из уравнений удара для фазы восстановления (6) получаем

$$u_\tau^+ = u_\tau' + \frac{1}{m\rho^2} kR_n'[bh - f(\rho^2 + h^2)],\ u_n^+ = \frac{1}{m\rho^2} kR_n'(\rho^2 + b^2 - f\,bh).$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\begin{gathered} u_n^- \le 0,\ u_\tau^- < 0,\ f < \frac{bh}{\rho^2 + h^2}, \\ u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + f\,bh] \le 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Изменение направления скольжения в фазе восстановления: $t^- \le t' \le t^* \le t^+$ и $u_n^* \ge 0$. В фазе деформации при $t \in [t^-, t']$ и на первом этапе фазы восстановления при $t \in [t', t^*]$ точка контакта скользит налево: $u_\tau^- < 0$, $u_\tau' < 0$, $u_\tau^* = 0$, $R_\tau' = f R_n'$, $R_\tau''^* = fR_n''^*$, где u_n^*, u_τ^* — скорость точки контакта S в момент смены направления скольжения; $R_n''^*$, $R_\tau''^*$ — импульсы ударной реакции в течение первого этапа фазы восстановления. Из уравнений удара для фазы деформации (5) и первого этапа фазы восстановления получаем

$$R_n' = \frac{-m\rho^2 u_\tau^-}{bh + f(\rho^2 + h^2)},\ u_\tau' = u_\tau^- - u_n^- \frac{[bh + f(\rho^2 + h^2)]}{bh + f\,(\rho^2 + h^2)},$$

$$R_n''^* = \frac{-m\rho^2 u_\tau'}{bh + f(\rho^2 + h^2)},\ u_n^* = -u_\tau' \frac{\rho^2 + b^2 + f\,bh}{bh + f\,(\rho^2 + h^2)}.$$

На втором этапе фазы восстановления при $t \in [t^*, t^+]$ точка контакта скользит направо: $u_\tau^* = 0$, $u_\tau^+ > 0$, $u_n^* \ge 0$, $u_n^+ \ge 0$, $R_\tau''^{**} = -fR_n''^{**}$, $R_n'' = kR_n'$, $R_n''^{**} = kR_n' - R_n''^*$. Из уравнений удара для второго этапа фазы восстановления имеем

$$u_\tau^+ = \frac{1}{m\rho^2}(kR_n' - R_n''^*)[bh - f(\rho^2 + h^2)],$$

$$u_n^+ = u_n^* + \frac{1}{m\rho^2}(kR_n' - R_n''^*)(\rho^2 + b^2 - f\,bh).$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$u_n^- \le 0,\; u_\tau^- < 0,\; f < \frac{bh}{\rho^2 + h^2},$$
$$u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] > 0, \tag{16}$$
$$(1+k)u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] \le 0.$$

Для всех рассмотренных выше случаев определены условия, при которых они имеют место, а также скорость точки контакта S после удара и импульсы ударных сил реакции опорной поверхности для фаз деформации и восстановления. Найдем полные импульсы ударных реакций в течение всего удара $R_n = R_n' + R_n'' = (1+k)R_n'$, $R_\tau = R_\tau' + R_\tau''$. Причем, если изменяется направление скольжения точки S в фазе деформации, то $R_n' = R_n'^{*} + R_n'^{**}$, $R_\tau' = R_\tau'^{*} + R_\tau'^{**}$. Если изменяется направление скольжения точки S в фазе восстановления, то $R_\tau'' = R_\tau''^{*} + R_\tau''^{**}$.

Значение угловой скорости тела после удара определяется третьими уравнениями в (4)–(5) и равна $\omega^+ = \omega^- + \dfrac{R_n b + R_\tau h}{m\rho^2}$. Скорость центра масс тела после удара вычисляется с помощью соотношений (2).

Графическая интерпретация условий, соответствующих различным типам удара. Выше рассмотрены типы движения тела при ударе и получены условия, при которых имеет место тот или иной тип удара. Однако эти условия достаточно сложны и зависят от значений шести параметров: положения точки контакта относительно центра масс, определяемого параметрами b и h; радиуса инерции тела относительно центра масс ρ; коэффициента трения тела о поверхность f и скорости точки контакта S в начале удара. Непротиворечивость этих условий и корректность модели удара (т. е. однозначность определения характеристик движения в конце удара для любого тела и любых значений скоростей в начале удара) неочевидна.

Для упрощения анализа этих условий введем угол трения φ и углы $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \tilde\gamma_0, \tilde\gamma_1, \tilde\gamma_2, \tilde\gamma_3$:

$$\varphi = \operatorname{arctg}^* f,\; \gamma_0 = \operatorname{arctg}^* \frac{\rho^2 + b^2}{bh},\; \gamma_1 = a\operatorname{arctg}^* \frac{bh}{\rho^2 + h^2},$$
$$\gamma_2 = \operatorname{arctg}^* \frac{\rho^2 + b^2 + fbh}{bh + f(\rho^2 + h^2)},\; \gamma_3 = \operatorname{arctg}^* \frac{\rho^2 + b^2 - fbh}{bh - f(\rho^2 + h^2)}, \tag{17}$$
$$\tilde\gamma_i = \operatorname{arctg}^* \frac{\operatorname{tg}\gamma_i}{1+k},\; i = 0,1,2,3.$$

Учитывая неравенство (14), получаем $0 \le \gamma_1 \le \gamma_2 \le \gamma_0 \le \pi/2$.

Замечание. Здесь и далее $\operatorname{arctg}^* x \in [0, \pi]$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, т. е.

$$\operatorname{arctg}^* x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, \text{ если } x > 0, \\ \operatorname{arctg} x + \pi, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

При этом $\operatorname{arctg}^*(\pm\infty) = \pi/2$; $\operatorname{arctg}^* x \to 0$, если $x \to 0$ и $x > 0$; $\operatorname{arctg}^* x \to \pi$, если $x \to 0$ и $x < 0$.

Отметим, что характер движения точки контакта S в процессе удара зависит от направления скорости точки S до удара и не зависит от ее модуля. Введем угол

$$\beta = \operatorname{arctg}^* \frac{u_n^-}{u_\tau^-},$$

где $\beta \in [0, \pi]$, который является углом падения точки S, отсчитываемым от касательного к опорной поверхности направления (рис. 1).

Тип удара или характер движения точки контакта S в процессе удара определяется соотношением значений угла трения φ, угла падения β и углов $\gamma_i, \tilde{\gamma}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Анализ условий (9–13), (15–16), определяющих тип удара, показывает, что некоторые из этих условий являются избыточными. На рис. 2 показаны области значений угла трения φ и угла падения β, которые соответствуют различным типам ударов.

В качестве границ, разделяющих эти области, выступают кривые, которые соответствуют зависимости углов γ_2, $\gamma_3, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ от угла трения φ.

Аналитически эти условия имеют следующий вид. В процессе удара точка контакта S: в области I, или при $\varphi \ge \gamma_1$, $\frac{\pi}{2} \le \beta \le \gamma_3$, скользит направо и останавливается в фазе деформации; в области II, или при $\varphi \ge \gamma_1$,

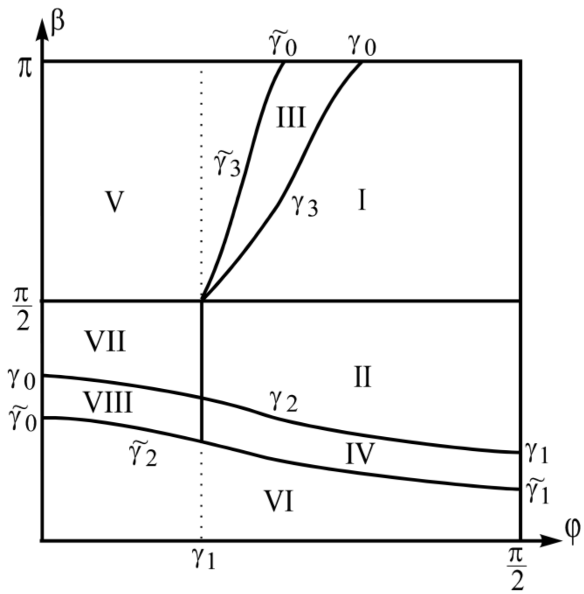

Рис. 2. Области, соответствующие различным типам удара

$\gamma_2 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2}$, скользит налево и останавливается в фазе деформации; в области III, или при $\varphi \ge \gamma_1, \gamma_3 < \beta \le \tilde{\gamma}_3$, скользит направо и останавливается в фазе восстановления; в области IV, или при $\varphi \ge \gamma_1, \tilde{\gamma}_2 \le \beta < \gamma_2$, скользит налево и останавливается в фазе восстановления; в области V, или при $\beta \ge \dfrac{\pi}{2}$ и $\beta > \tilde{\gamma}_3$, скользит направо (полное скольжение); в области VI, или при $\beta < \tilde{\gamma}_2$, скользит налево (полное скольжение); в области VII, или при $\varphi < \gamma_1, \gamma_2 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2}$, меняет направление скольжения в фазе деформации (сначала скользит налево, затем направо); в области VIII, или при $\varphi < \gamma_1, \tilde{\gamma}_2 \le \beta < \gamma_2$, меняет направление скольжения в фазе восстановления (сначала скользит налево, затем направо).

Полученное решение является корректным. Любым начальным условиям соответствует единственный вполне определенный характер движения в процессе удара и имеет место непрерывная зависимость от параметров. На границах областей и, более того, в точках бифуркации этих границ для определения характера движения тела при ударе можно использовать формулы, соответствующие любой из пограничных областей — результат будет один и тот же.

Напомним, что исследование процесса удара проводилось в предположении, что центр масс *C* относительно точки контакта *S* расположен слева (см. рис. 1), или $b \ge 0$. Случай $b < 0$ может быть исследован аналогично, либо все результаты легко получаются из соображений симметрии.

Если в момент удара центр масс расположен над точкой контакта *S*, или $b = 0$ (этот случай имеет место при ударе осесимметричного диска о поверхность), то $\gamma_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\gamma_1 = 0, \gamma_3 = \pi - \gamma_2, \tilde{\gamma}_3 = \pi - \tilde{\gamma}_2$. Всегда $\gamma_1 \le \varphi \le \gamma_0$, и зависимость типа удара от скорости точки контакта до удара показана на рис. 3.

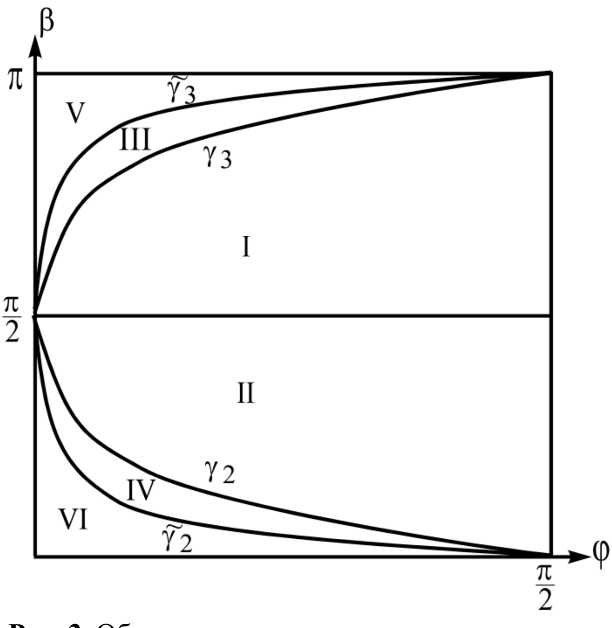

Рис. 3. Области, соответствующие различным типам удара, в случае, когда центр масс тела находится над точкой контакта тела с препятствием

В процессе удара точка контакта S: в области I, или при $\frac{\pi}{2} \le \beta \le \gamma_3$, скользит направо и останавливается в фазе деформации; в области II, или при $\gamma_2 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$, скользит налево и останавливается в фазе деформации; в области III, или при $\gamma_3 < \beta \le \tilde{\gamma}_3$, скользит направо и останавливается в фазе восстановления; в области IV, или при $\tilde{\gamma}_2 \le \beta < \gamma_2$, сначала скользит налево и останавливается в фазе восстановления; в области V, или при $\beta > \tilde{\gamma}_3$, скользит направо (полное скольжение); в области VI, или при $\beta < \tilde{\gamma}_2$, скользит налево (полное скольжение).

Заключение. Показано, что в плоской задаче об упругом ударе тела о неподвижное препятствие с учетом ударных сил сухого трения возможны различные типы удара, которые отличаются характером скольжения точки контакта в процессе удара. Формулы для расчета характеристик движения тела после удара и импульсов ударных реакций зависят от типа удара. Построены области, соответствующие различным типам удара, на плоскости угол трения φ, угол падения β (угол наклона скорости точки контакта тела с поверхностью до удара). Показана корректность рассмотренной модели удара.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00655-а и гранта Президента РФ № НШ-4748.2012.8 для ведущих научных школ РФ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Плявниекс В.Ю. Расчет косого удара о препятствие. *Вопросы динамики и прочности*, 1969, № 18, с. 87–109.

[2] Нагаев Р.Ф. *Механические процессы с повторными затухающими соударениями*. Москва, Наука, 1985, 200 с.

[3] Иванов А.П. *Динамика систем с механическими соударениями*. Москва, Международная программа образования, 1997, 336 с.

[4] Пановко Я.Г. *Введение в теорию механического удара*. Москва, Наука, 1977, 232 с.

[5] Раус Э.Дж. *Динамика системы твердых тел,* т. 1. Москва, Наука, 1983, 463 с.

[6] Кобринский А.Е., Кобринский А.А. *Виброударные системы (динамика и устойчивость)*. Москва, Наука, 1973, 592 с.

[7] Гольдсмит В. *Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел*. Москва, Изд-во литературы по строительству, 1965, 448 с.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Лапшин В.В. Плоская задача об упругом ударе тела о препятствие. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1.
URL:http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1195.html

Лапшин Владимир Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Основные научные интересы: механика и управление движением шагающих аппаратов, робототехника. e-mail: vladimir@lapshin.net