

Задача быстродействия при управлении ориентацией двухзвенника в безопорной фазе движения

© В.В. Лапшин¹, Г.К. Боровин²

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

²ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 125047, Россия

Исследовано движение двух шарнирно соединенных тел в фазе полета (невесомости). Решена задача минимизации и максимизации времени разворота из заданного начального положения в заданное конечное. Предполагается, что при этом кинетический момент системы относительно центра масс отличен от нуля. Данная задача является простейшей моделью управления ориентацией прыгающего аппарата в безопорной фазе прыжка.

Ключевые слова: оптимальное управление движением, прыгающий аппарат.

Введение. При увеличении скорости движения машин, передвигающихся с помощью ног, энергетически выгодно переходить от статически устойчивых режимов ходьбы к динамическим, а затем к бегу и прыжкам аналогично тому, как это имеет место у животных [1, 2]. Этим объясняется интерес к исследованию динамики и управления движением прыгающих и бегающих аппаратов, движение которых состоит в чередовании опорных и безопорных фаз.

В безопорной фазе движения центр масс аппарата перемещается по баллистической траектории, и его движение неуправляемо. Движением аппарата вокруг центра масс можно управлять за счет изменения движения конечностей или одной части корпуса относительно другой [1–10]. Интерес к этой проблеме объясняется изучением биомеханики движений спортсменов, космонавтов и животных, а также исследованиями динамики и управления движением прыгающих и бегающих аппаратов. Как для прыгающих аппаратов, так и для животных и человека целью управления является обеспечение требуемого (программного) положения в момент приземления. Задача управления движением в фазе полета разбивается на две подзадачи. Алгоритм построения программного движения определяет скорости всех звеньев аппарата в момент отрыва от опорной поверхности, обеспечивающие переход из заданного начального положения в заданное конечное. Алгоритм стабилизации движения обеспечивает реализацию требуемого положения в момент приземления при наличии возмущений и ошибок отработки программных значений коор-

динат и скоростей в момент отрыва от опорной поверхности за счет изменения движения ног относительно корпуса [2–5, 8].

Для исследования вопроса о допустимом значении ошибок, которые способен обработать алгоритм стабилизации, представляет интерес задача определения минимального и максимального времени разворота аппарата в фазе полета из заданного начального положения в заданное конечное при известном (ненулевом) значении кинетического момента аппарата относительно центра масс. В [10] эта задача решена для простейшей модели аппарата, состоящего из двух твердых тел, соединенных линейным сервоприводом. В данной работе рассмотрена модель аппарата, состоящего из двух шарнирно соединенных тел. Ее можно рассматривать как упрощенную модель движения прыгающего аппарата, спортсмена при прыжках в воду или акробата в предположении, что во время полета используется только тазобедренный шарнир.

Постановка задачи. Конструктивная схема аппарата приведена на рис. 1. Масса i -го ($i = 1, 2$) тела равна m_i , момент инерции относительно центра масс C_i — J_i , $l_i = AC_i$. Точка C — центр масс аппарата. Положение системы относительно абсолютной неподвижной системы координат Oxy (ось Oy направлена вертикально вверх) определяется координатами x, y шарнира A , углом тангажа первого тела θ (углом между горизонтальной осью Ox и линией AC_1) и углом между телами α , который изменяется с помощью сервопривода.

В безопорной фазе движения имеет место закон сохранения кинетического момента относительно центра масс (относительно осей Кенига, перемещающихся поступательно вместе с центром масс)

$$(I_1 - 2I_0 \cos \alpha)\dot{\theta} + (I_2 - I_0 \cos \alpha)\dot{\alpha} = K_C = \text{const},$$

где

$$I_1 = J_1 + J_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (l_1^2 + l_2^2); I_2 = J_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l_2^2; I_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l_1 l_2.$$

Отметим, что

$$I_1 - 2I_0 = J_1 + J_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (l_1 + l_2)^2 > 0. \quad (1)$$

Обозначим α^0, θ^0 и α^D, θ^D начальное и требуемое конечное положения аппарата относительно центра масс в конечный момент времени. Допустим, $\alpha^0, \alpha^D \in [0, 2\pi]$.

Для определенности положим

$$K_C > 0. \quad (2)$$

За управление $u = \dot{\alpha}$ примем скорость изменения угла в шарнире A и положим, что оно ограничено максимальной скоростью сервопривода: $|u| \leq u_m$.

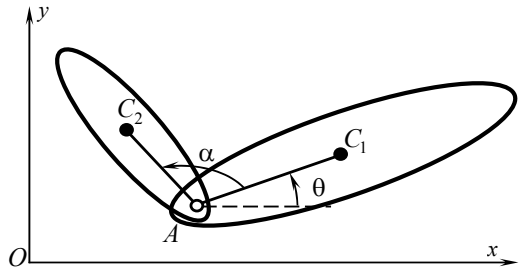


Рис. 1. Конструктивная схема аппарата

Уравнения движения аппарата относительно центра масс имеют вид

$$\dot{\alpha} = u, \quad \dot{\theta} = \frac{K_C}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} - \frac{I_2 - I_0 \cos \alpha}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} u.$$

Введем новые переменные:

$$x_1 = \alpha - \pi, \quad x_2 = \theta + \beta(\alpha) - \theta^D - \beta(\alpha^D),$$

где

$$\begin{aligned} \beta(\alpha) &= \int \frac{I_2 - I_0 \cos \alpha}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \left[\alpha + (2I_2 - I_1) \int \frac{d\alpha}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{2I_2 - I_1}{\sqrt{I_1^2 - 4I_0^2}} \operatorname{arctg} \left[\frac{I_1 + 2I_0}{\sqrt{I_1^2 - 4I_0^2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta} + \frac{d\beta}{d\alpha} \dot{\alpha} = \dot{\theta} + \frac{I_2 - I_0 \cos \alpha}{I_1 - 2I_0 \cos \alpha} \dot{\alpha}.$$

Задача минимизации времени разворота аппарата в безопорной фазе движения имеет вид

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = \omega(x_1), \quad (3)$$

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_1(T) = x_1^D = \alpha^D, \quad x_2(T) = 0, \quad (4)$$

$$|u| \leq u_m, \quad (5)$$

$$T \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$x_1^0, x_1^D \in [-\pi, \pi], \quad (7)$$

где

$$\omega(x_1) = \frac{K_C}{I_1 + 2I_0 \cos x_1}. \quad (8)$$

Отметим, что в силу (1) и (2)

$$\omega(x_1) > 0 \quad (9)$$

при любом значении x_1 . Следовательно, при $t > T$ система не останется в программном положении, а продолжит вращение относительно центра масс.

При $x_1 \equiv 0$ аппарат распрямлен (момент инерции относительно центра масс максимальный) и вращение происходит с минимальной угловой скоростью $\dot{x}_2 = \dot{\theta} = \omega_{\min} = \omega(0) = \frac{K_C}{I_1 + 2I_0}$. При $x_1 \equiv \pm\pi$ аппа-

рат сложен (момент инерции относительно центра масс минимальный) и вращение происходит с максимальной угловой скоростью

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta} = \omega_{\max} = \omega(\pm\pi) = \frac{K_C}{I_1 - 2I_0}.$$

Решение задачи о минимизации времени разворота. Для решения задачи быстродействия (3)–(9) воспользуемся принципом максимума Понтрягина [11]. При этом гамильтониан

$$H = -1 + \psi_1 u + \psi_2 \omega(x_1). \quad (10)$$

Сопряженные переменные являются решениями уравнений

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2 \frac{d\omega}{dx_1}, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0. \quad (11)$$

Тогда

$$\psi_2 = \text{const}. \quad (12)$$

В соответствии с принципом максимума на оптимальной траектории достигается максимум Гамильтониана по u . Оптимальный закон управления

$$u^* = \begin{cases} u_m & \text{при } \psi_1 > 0, \\ \text{не определено} & \text{при } \psi_1 = 0, \\ -u_m & \text{при } \psi_1 < 0, \end{cases} \quad (13)$$

и на оптимальной траектории справедливо условие трансверсальности

$$H = -1 + \psi_1 u + \psi_2 \omega(x_1) \equiv 0. \quad (14)$$

Если $u = u_m$ ($\psi_1 > 0$), то

$$x_1 = c_1 + u_m t, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{\omega(x_1)}{u_m}, \quad x_2 = \frac{\varphi(x_1)}{u_m} + c_2, \quad (15)$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования;

$$\varphi(x_1) = \int \omega(x_1) dx_1 = \frac{2K_C}{\sqrt{I_1 - 2I_0}} \operatorname{arctg} \frac{I_1 - 2I_0}{\sqrt{I_1^2 - 4I_0^2}} \operatorname{tg} \frac{x_1}{2}. \quad (16)$$

Для однозначности положим, что $\operatorname{arctg} \frac{I_1 - 2I_0}{\sqrt{I_1^2 - 4I_0^2}} \operatorname{tg} \frac{x_1}{2}$ и $\frac{x_1}{2}$ лежат

в одной четверти. Тогда $\varphi(x_1)$ — монотонно возрастающая нечетная функция x_1 .

Если $u = -u_m$ ($\psi_1 < 0$), то

$$x_1 = d_1 - u_m t, \quad x_2 = -\frac{\varphi(x_1)}{u_m} + d_2, \quad (17)$$

где d_1, d_2 — постоянные интегрирования.

В вырожденном случае $\psi_1 \equiv 0$ в течение некоторого интервала времени и $\dot{\psi}_1 \equiv 0$. Из (11) следует $\frac{d\omega}{dx_1} \equiv 0$. Тогда $\sin x_1 \equiv 0$ и в силу

(11) вырожденные фазовые траектории соответствуют управлению $u \equiv 0$ и

$$x_1 \equiv n\pi, u \equiv 0, \dot{x}_2 = \frac{K_C}{I_1 - (-1)^n 2I_0} = \operatorname{const} > 0, \quad (18)$$

где $n \in \{-1; 0; 1\}$.

Для задачи быстродействия в силу принципа оптимальности подходят только траектории, соответствующие сложенному положению аппарата:

$$x_1 \equiv \pm\pi, u \equiv 0, \dot{x}_2 = \omega_{\max} = \frac{K_C}{I_1 - 2I_0} = \text{const} > 0. \quad (19)$$

Через программное конечное положение проходят две фазовые траектории (рис. 2). Одна из них —

$$\Gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_1^D)}{u_m}, x_1 < x_1^D \right\} \text{ — соответствует управле-$$

$$\text{нию } u = u_m, \text{ а вторая — } \Gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{\varphi(x_1^D) - \varphi(x_1)}{u_m}, x_1 > x_1^D \right\} \text{ —}$$

управлению $u = -u_m$.

Эти кривые вместе с кривыми Γ_1 и Γ_2 , соответствующими вырожденному случаю $u \equiv 0$,

$$\Gamma_1 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = -\pi, x_2 < \frac{\varphi(-\pi) - \varphi(x_1^D)}{u_m} \right\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = \pi, x_2 < \frac{\varphi(x_1^D) - \varphi(\pi)}{u_m} \right\},$$

кривыми $\tilde{\Gamma}_-, \tilde{\Gamma}_+$

$$\tilde{\Gamma}_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{-\varphi(x_1^D) - \varphi(x_1)}{u_m}, x_1 < -x_1^D \right\},$$

$$\tilde{\Gamma}_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{\varphi(x_1^D) + \varphi(x_1)}{u_m}, x_1 > -x_1^D \right\}$$

и прямая $x_1 = -x_1^D$ делят часть фазовой плоскости, в которой лежат начальное и конечное положения аппарата (т. е. часть фазой плоскости, удовлетворяющей условию $-\pi \leq x_1 \leq \pi$), на пять областей — $R_0, R_1, R_2, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ (см. рис. 2).

Утверждение 1. Если система находится в области R_0 , то ее невозможно перевести в требуемое конечное положение.

При заданном положительном значении кинетического момента системы ($K_C > 0$) невозможно перевести систему из произвольного

начального положения в заданное конечное, т. е. система является неуправляемой.

Доказательство этого утверждения очевидно. Ни одна из фазовых траекторий (15), (17), (18), начинающаяся в области R_0 , не проходит через программное конечное положение.

Утверждение 2. Если в начальный момент времени система не лежит в области R_0 , то оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = \begin{cases} -u_m & \text{при } (x_1, x_2) \in R_1 \cup \tilde{R}_1 \cup \Gamma_- \cup \tilde{\Gamma}_-, \\ +u_m & \text{при } (x_1, x_2) \in R_2 \cup \tilde{R}_2 \cup \Gamma_+ \cup \tilde{\Gamma}_+, \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \end{cases}$$

Если система находится в области R_1 , то оптимальная управляющая последовательность $\{-u_m, u_m\}$, в области R_2 — $\{u_m, -u_m\}$, в области \tilde{R}_1 — $\{-u_m, 0, u_m\}$, в области \tilde{R}_2 — $\{u_m, 0, -u_m\}$.

Доказательство утверждения 2 приведено в [12].

Соответствующие оптимальные фазовые траектории при различных начальных условиях показаны на рис. 3.

Замечание 1. Механический смысл оптимального решения очевиден. При уменьшении момента инерции связи двух тел относительно их общего центра масс увеличивается угловая скорость вращения в силу закона сохранения кинетического момента. На оптимальной траектории необходимо с максимальной возможной скоростью сложить аппарат (двухзвен-

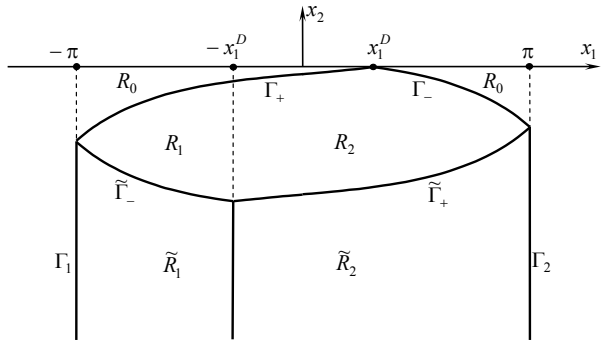


Рис. 2. Линии переключения и области, соответствующие различным оптимальным управляющим последовательностям

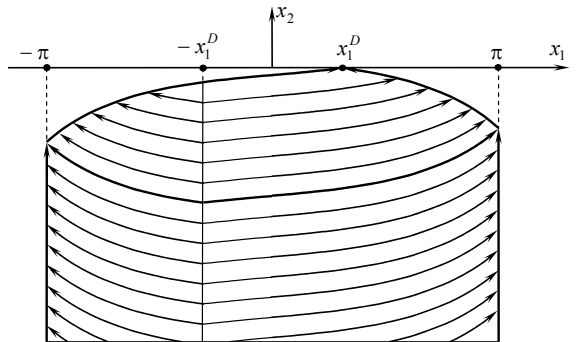


Рис. 3. Оптимальные фазовые траектории в задаче минимизации времени разворота

ник) и тем самым уменьшить момент инерции аппарата относительно общего центра масс. Затем следует привести аппарат в требуемое конечное положение по углу α .

Замечание 2. Если $x_1^0, x_1^D \in [-\pi, \pi]$, то при оптимальном решении $x_1 \in [-\pi, \pi]$ или $\alpha \in [0, 2\pi]$. Это ограничение является естественным для прыгающего аппарата. Тело 2 не может совершать относительно тела 1 несколько оборотов. Для человека вообще $\alpha \in [0, \pi]$.

Задача максимизации времени разворота. Решение задачи (13)–(15), (17)–(19) о максимальном времени разворота или с критерием $T \rightarrow \max$ осуществляется аналогично рассмотренному в предыдущем разделе. Гамильтониан $H = 1 + \psi_1 u + \psi_2 \omega(x_1)$.

Оптимальный закон управления

$$u = \begin{cases} u_m & \text{при } \psi_1 > 0, \\ \text{не определено} & \text{при } \psi_1 = 0, \\ -u_m & \text{при } \psi_1 < 0. \end{cases}$$

Условие трансверсальности $H = 1 + \psi_1 u + \psi_2 \omega(x_1) \equiv 0$.

Если $u = u_m$ ($\psi_1 > 0$), то x_1, x_2 определяются формулами (15), (16) и

$$\psi_1 = -\frac{1}{u_m} [1 + \psi_2 \omega(x_1)].$$

Если $u = -u_m$ ($\psi_1 < 0$), то x_1, x_2 определяются формулами (16), (17) и

$$\psi_1 = \frac{1}{u_m} [1 + \psi_2 \omega(x_1)].$$

В вырожденном случае $\psi_1 \equiv 0$ в течение некоторого интервала времени и $\dot{\psi}_1 \equiv 0$. Из (11) следует $\frac{d\omega}{dx_1} \equiv 0$. Тогда $\sin x_1 \equiv 0$, в силу (3) вырожденные фазовые траектория соответствует управлению $u \equiv 0$ и справедливы условия (18).

Для задачи максимизации времени разворота в силу принципа оптимальности подходят только траектории, соответствующие распрямленному положению аппарата и $x_1 \equiv 0$.

Тогда в вырожденном случае

$$x_1 \equiv 0, u \equiv 0, \dot{x}_2 = \omega_{\min} = \frac{K_C}{I_1 + 2I_0} = \text{const} > 0.$$

Задача максимизации времени разворота решается аналогично задаче быстрогодействия.

При $0 < x_1^D < \pi$ возможны оптимальные управляющие последовательности $\{-u_m\}$, $\{u_m\}$, $\{-u_m, u_m\}$, $\{-u_m, 0, u_m\}$ и $\{u_m, 0, u_m\}$. Результаты синтеза оптимальных траекторий приведены на рис. 4, а. При $-\pi < x_1^D < 0$ возможны оптимальные управляющие последовательности $\{-u_m\}$, $\{u_m\}$, $\{u_m, -u_m\}$, $\{u_m, 0, -u_m\}$ и $\{-u_m, 0, u_m\}$. Результаты синтеза оптимальных траекторий даны на рис. 4, б.

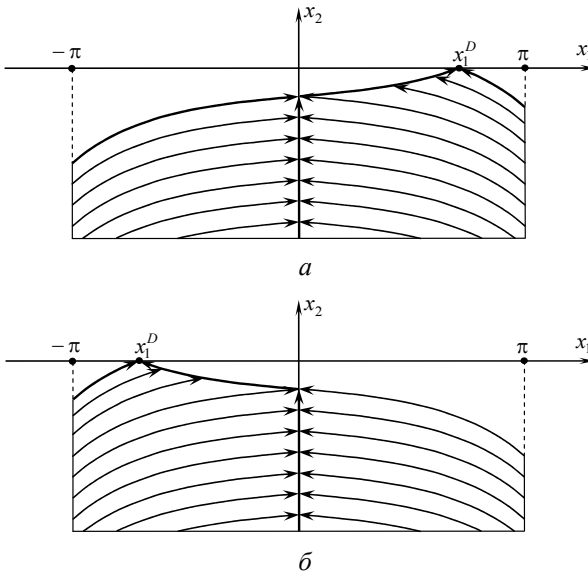


Рис. 4. Оптимальные фазовые траектории в задаче максимизации времени разворота:
 а — при $0 < x_1^D < \pi$; б — при $-\pi < x_1^D < 0$

В вырожденном случае, когда есть участок с $u \equiv 0$, аппарат сначала полностью распрямляется (его угловая скорость минимальна), некоторое время сохраняет это положение, а затем складывается в требуемое конечное положение. В невырожденном случае аппарат не успевает полностью распрямиться.

В заключение отметим, что если при движении аппарата реальное время полета T (определяемое из уравнений движения центра масс) удовлетворяет условию $T_{\min} < T < T_{\max}$, то аппарат в движении вокруг центра масс можно перевести из заданного начального положения в за-

данное конечное за время T . Решение можно искать в виде кусочно-постоянных управляющих последовательностей $\{\pm u_m, 0, \pm u_m\}$. При этом возможны любое сочетание знаков управления на первом и третьем этапе и нулевая продолжительность любого этапа постоянного значения управления.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00655а и гранта Президента РФ для ведущих научных школ (НШ-4748.2012.8).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Okhotsimsky D., Platonov A., Kiril'chenko A., Lapshin V., Tolstousova V. Walking machines. *Advances in mechanics*, 1992, vol. 15, no. 1–2, pp. 39–70.
- [2] Лапшин В.В. *Механика и управление движением шагающих машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 199 с.
- [3] Лапшин В.В. Динамика и управление движением прыгающего аппарата. *Известия АН СССР. МТТ*, 1983, № 5, с. 42–51.
- [4] Лапшин В.В. Управление движением прыгающего аппарата в фазе полета. *Известия АН СССР. МТТ*, 1984, № 1, с. 159–165.
- [5] Лапшин В.В., Чашников С.П. Управление ориентацией прыгающего аппарата в безопорной фазе движения при нулевом кинетическом моменте. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, № 1, с. 55–67.
- [6] Hodgins J., Raibert M.H. Biped gymnastics. *Robotics research: The Fourth International Symposium*. Cambridge, Massachusetts: MIT press, 1987, pp. 5–14.
- [7] Kane T.R., Scher M.P. A dynamical explanation of the falling cat phenomenon. *International Journal of Solids and Structures Applied Mechanics*, 1969, no. 7.
- [8] Lapshin V.V. Motion control of a legged machine in the supportless phase of hopping. *The International Journal of Robotics Research*, 1991, no. 4, pp. 327–337.
- [9] Raibert M.H. *Legged robots that balance*. Cambridge, Massachusetts: MIT press, 1986, 234 p.
- [10] Лапшин В.В., Колесникова Г.П. Оптимальное по времени управление движением связки двух тел вокруг центра масс. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 4, с. 20–28.
- [11] Атанс М., Фалб П. *Оптимальное управление*. Москва, Машиностроение, 1968, 764 с.
- [12] Боровин Г.К., Лапшин В.В. *Оптимальное управление ориентацией двух шарнирно соединенных тел*. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Препринт. 2012, № 46, 23 с.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Лапшин В.В., Боровин Г.К. Задача быстрогодействия при управлении ориентацией двухзвездника в безопорной фазе движения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1194.html>

Лапшин Владимир Владимирович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Основные научные интересы: механика и управление движением шагающих аппаратов, робототехника. e-mail: vladimir@lapshin.net

Боровин Геннадий Константинович — д-р физ.-мат. наук, профессор, зам. директора ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Основные научные интересы: робототехника, математическое моделирование, гидропривод. e-mail: borovin@keldysh.ru