УДК 624.07:534

# Особый случай малых вынужденных колебаний линейной упругой механической системы

© Г.М. Тушева, О.Н. Тушев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Анализируются стационарные изгибно-крутильные колебания прямолинейного стержня в линейной постановке. Показано, что вынужденные крутильные колебания этого простого объекта происходят с частотой, отличной от частоты возбуждения, в окрестности некоторого постоянного угла закрутки, неравного нулю. Результаты иллюстрируются примером.*

***Ключевые слова**: колебания, изгиб, кручение, частота.*

Известно, что в линейной упругой системе при синусоидальном возмущающем воздействии возникают вынужденные колебания с частотой внешнего возмущения. В некоторых случаях частота вынужденных колебаний оказывается вдвое больше частоты возмущения. Как будет показано далее, этот эффект имеет чисто внешний, формальный характер, а свойства линейных систем, безусловно, не нарушаются.

Более сорока лет назад постановку оригинальной задачи предложил академик В.Н. Челомей.

Рассматриваются малые изгибно-крутильные колебания упругого призматического стержня при синусоидальном аддитивном воздействии. Будем считать, что изгиб стержня происходит только в одной плоскости, а в ортогональной — является абсолютно жестким. Отметим также, что поперечное сечение стержня может отличаться от прямоугольного и выбрано таковым для определенности.

На рис. 1 изображен консольно закрепленный стержень длиной $l$ прямоугольного сечения. При этом высота сечения существенно меньше ширины и на рис. 1 условно не показана. К стержню приложена поперечная распределенная нагрузка

$$f(z,t) = u(z)\sin pt \tag{1}$$

под углом $\alpha$ к оси $y$, причем $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, стержень совершает изгибные колебания в плоскости $xOy$ и крутильные — вокруг оси $z$. При этом линейные перемещения $x$ и угловые $\varphi$ малы, а также $\varphi \ll \alpha$.

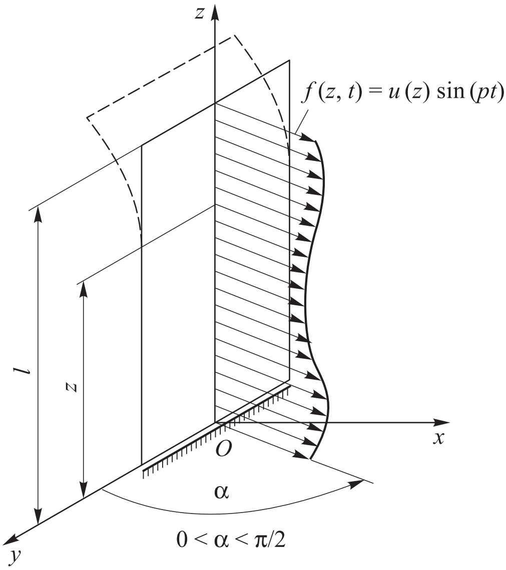


**Рис. 1.**

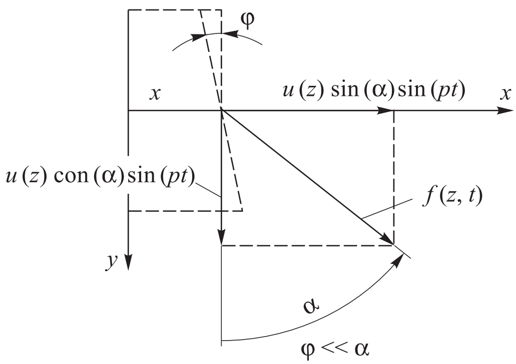


**Рис. 2.**

На рис. 2 показаны перемещения стержня в сечении по оси $z$.

Уравнение изгибных колебаний стержня при действии нагрузки (1) и с учетом принятых допущений запишем в следующем виде [1]:

$$F\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+EJ_x\frac{\partial^4 x}{\partial z^4}=$$
$$=u(z)\sin\alpha\cdot\sin pt,$$

где $F$, $\rho$, $EJ_x$ — площадь поперечного сечения стержня, плотность материала стержня и изгибная жесткость соответственно.

Вынужденные стационарные изгибные колебания происходят с частотой возмущающего воздействия $p$ по закону

$$x(z,t)=v(z)\sin\alpha\sin pt, \quad (2)$$

где $v(z)$ — форма вынужденных колебаний, которую несложно определить известным способом с привлечением граничных условий.

Теперь найдем выражение крутящего момента $M_{\text{кр}}(z,t)$ в сечении $z$:

$$M_{\text{кр}}(z,t)=\int\limits_z^l u(z')\cos\alpha\sin pt\left[x(z')-x(z)\right]dz=$$
$$=\cos\alpha\sin pt\int\limits_z^l u(z')\left[v(z')-v(z)\sin\alpha\sin pt\right]dz'=$$
$$=\frac{\sin 2\alpha}{2}\sin^2 ptR(z),$$

где $R(z)=\int\limits_z^l u(z')\left[v(z')-v(z)\right]dz'$.

Тогда

$$M_{\text{кр}}(z,t)=\frac{1}{4}R(z)\sin 2\alpha\left(1-\cos 2pt\right). \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение малых крутильных колебаний

$$\rho J_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+GJ_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{4}R(z)\sin 2\alpha(1-\cos 2pt), \tag{4}$$

где $GJ_p$ — крутильная жесткость стержня.

Из уравнения (4) следует, что вынужденные крутильные колебания происходят с частотой $2p$ относительно некоторого постоянного во времени угла $\varphi_1(z)\neq 0$, за исключением «экзотического» случая, когда $u(z)$ подобрана специально.

Обратимся к простейшей постановке задачи, которая, тем не менее сохраняет суть изучаемого явления. Представим модель консольно закрепленного стержня (см. рис. 1). Считаем, что его масса сконцентрирована на верхнем торце. Таким образом, стержень трансформируется в невесомую пружину с теми же жесткостными характеристиками, что и у стержня. На пружине закреплен объект, имеющий массу $m$ и момент инерции $J_z$, размерами которого можно пренебречь (рис. 3).

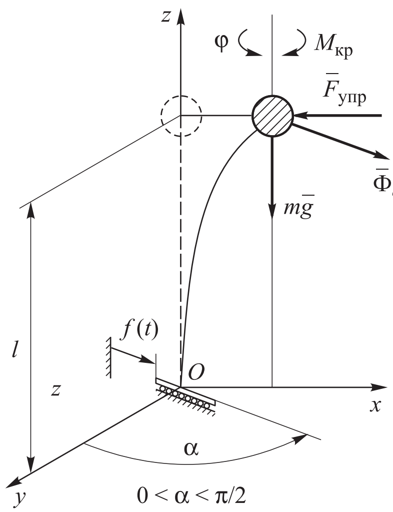


**Рис. 3.**

В отличие от силового воздействия, которое рассматривалось в предыдущем случае, считаем, что основание стержня перемещается под углом $\alpha$ к оси $y$ по закону $f(t)=b\sin pt$. Такое возбуждение вынужденных колебаний называют инерционным.

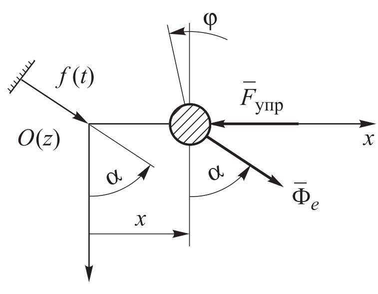


**Рис. 4.**

Опишем малые вынужденные колебания объекта относительно подвижной системы отсчета $xOyz$, связанной с основанием стержня. Здесь $x(t)$ и $\varphi(t)$ — линейное и угловое перемещения объекта относительно подвижной системы отсчета (рис. 3, 4);

$F_{\text{упр}} = c_u x$; $M_{\text{кр}} = k\varphi$; $c_u$ и $k$ — изгибная и крутильная жесткости пружины.

Введем переносную силу инерции $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$, где $\left|\vec{a}_e\right| = \left|\ddot{f}(t)\right|$ — переносное ускорение объекта.

Дифференциальные уравнения относительного движения объекта

$$m\ddot{x} = -c_u x + (-mf)\sin\alpha\,, \tag{5}$$

$$J_z\ddot{\varphi} = -k\varphi - \left[(-m\ddot{f})\cos\alpha\right]x\,. \tag{6}$$

Из (5)

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = bp^2 \sin\alpha \sin pt,$$

где $\omega_1^2 = \dfrac{c_u}{m}$; решение для вынужденных колебаний запишется в виде

$$x(t) = \frac{bp^2 \sin\alpha}{\omega_1^2 - p^2}\sin pt\,. \tag{7}$$

Из (6) — уравнение крутильных колебаний

$$\ddot{\varphi} + \omega_2^2\varphi = \frac{m}{J_z}bp^2 x\cos\alpha\sin pt, \tag{8}$$

где $\omega_2^2 = \dfrac{k}{J_z}$.

Подстановка (7) в (8) дает

$$\ddot{\varphi} + \omega_2^2\varphi = \frac{m}{4J_z}\frac{b^2p^4}{\omega_1^2 - p^2}\sin 2\alpha\left(1 - \cos 2pt\right).$$

Следовательно, угловое перемещение

$$\varphi(t) = \varphi_1 + \varphi_2(t)$$

состоит из двух движений:

$$\varphi_1 = \frac{m}{4J_z}\frac{b^2p^4}{\omega_2^2(\omega_1^2 - p^2)}\sin 2\alpha = \text{const}$$

и

$$\varphi_2(t) = -\frac{m}{4J_z}\frac{b^2 p^4 \sin 2\alpha}{(\omega_2^2 - 4p^2)(\omega_1^2 - p^2)}\cos 2pt.$$

Видно, что $\varphi_1$ и $\varphi_2(t)$ имеют максимальные значения при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом, пример иллюстрирует эффект появления крутильных вынужденных колебаний $\varphi_2(t)$ с частотой $2p$ в окрестности некоторого постоянного угла закрутки $\varphi_1 = \text{const}$.

На наш взгляд, такая задача представляет определенный интерес и может быть использована в учебной литературе по теории колебаний и динамике конструкций, а также в технических устройствах, где этот эффект может себя проявить.[1]

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тушева Г.М., Тушев О.Н. Особый случай малых вынужденных колебаний линейной упругой механической системы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1192.html

**Тушева Галина Михайловна** окончила МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1967 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана.

**Тушев Олег Николаевич** окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1967 г. Д-р техн. наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sm2@bmstu.mai.ru

[1] Пановко Я.Г. *Основы прикладной теории упругих колебаний.* Москва, Машиностроение, 1967, 316 с.