УДК 531.38

Новые интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости

© Ю.Д. Плешаков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена классическая задача о движении многосвязного твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости — задача Кирхгофа. Показано, что в том случае, когда матрица параметров гамильтониана приводится к диагональному виду, то на элементы диагональных матриц никаких ограничений не накладывается, а именно: все девять параметров независимы и могут принимать любые значения. Показано, что с помощью канонических преобразований уравнения сферического движения в осесимметричном силовом поле приводятся к виду уравнений Кирхгофа, описывающих движение многосвязного твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости. Установлено, что уравнения задачи о сферическом движении твердого тела в осесимметричном силовом поле интегрируются в квадратурах при произвольном тензоре инерции, произвольном расположении центра масс и произвольной квадратичной части потенциала. Классические интегрируемые случаи Лагранжа, Ковалевской, Горячева — Чаплыгина содержатся в найденном решении как частный результат.

Ключевые слова: *задача Кирхгофа, осесимметричное силовое поле, интегрируемые случаи.*

Рассматривается сферическое движение твердого тела в осесимметричном силовом поле, потенциал которого содержит линейную и квадратичную части. Показано, что с помощью канонических преобразований уравнения сферического движения в осесимметричном силовом поле приводятся к виду уравнений Кирхгофа, описывающих движение многосвязного твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости, которые при определенных ограничениях на параметры уравнения интегрируются в квадратурах.

Уравнения задачи Кирхгофа, описывающие движение многосвязного твердого тела в несжимаемой жидкости [1–7], имеют вид

$$\dot{\overline{P}} = \overline{P}\times a\overline{P} + \overline{P}\times c\overline{R} + \overline{P}\times\overline{d} + \overline{R}\times\overline{P}c + \overline{R}\times\overline{r} + \overline{R}\times b\overline{R}; \tag{1}$$

$$\dot{\overline{R}} = \overline{R}\times a\overline{P} + \overline{R}\times c\overline{R} + \overline{R}\times\overline{d}, \tag{2}$$

где a, b — симметричные матрицы 3×3; c — произвольная матрица 3×3; $\overline{d}$, $\overline{r}$ — векторы, постоянные в теле.

Уравнения (1), (2) имеют три первых интеграла

$$2H = a\overline{P}\overline{P} + 2c\overline{R}\overline{P} + b\overline{R}\overline{R} + 2\overline{P}\overline{d} + 2\overline{R}\overline{r} = \text{const},\ \overline{P}\overline{R} = \text{const},\ \overline{R}\overline{R} = \text{const}.$$

Для интегрируемости уравнений (1), (2) в квадратурах надо найти четвертый первый независимый интеграл.

Уравнениям (1), (2) можно придать иную, более компактную и удобную для вычислений структуру, выполняя линейную обратимую замену переменных, предложенную Г.В. Колосовым:

$$\overline{\omega} = a\overline{P} + c\overline{R} + \overline{d} \Leftrightarrow \overline{P} = I\overline{\omega} - Ic\overline{R} - I\overline{d}.$$

Тогда они примут вид

$$I\dot{\overline{\omega}} = I\overline{\omega}\times\overline{\omega} + \overline{\omega}\times\overline{e} + \overline{\omega}\times\sigma\overline{R} + \overline{R}\times\overline{g} + \overline{R}\times\Lambda\overline{R}, \tag{3}$$

$$\dot{\overline{R}} = \overline{R}\times\overline{\omega}, \tag{4}$$

где $I = a^{-1}$; $\sigma = Ic + \left(Ic\right)^{\text{т}} - 1\cdot spIc$; $\Lambda = b - c^{\text{т}}Ic$, $\overline{e} = I\overline{d}$; $\overline{g} = \overline{r} - \overline{e}c$; $j = 1\cdot spI - 2I$; 1 — единичная матрица. Символ $\sum\limits_{(123)}$ означает, что сумма образуется круговой перестановкой индексов (123).

Справедлива ***теорема 1*** [8]. Если выполняются условия

$$I_{12} = I_{13} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \Lambda_{12} = \Lambda_{13} = \Lambda_{23} = 0, \tag{5}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3, \quad \overline{g} = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_2 I_2 - \sigma_3 I_3 = 0,\\ &\sigma_1 I_1 - \sigma_2 I_2 + \sigma_{23} I_{23} = 0,\\ &\sigma_{23}\left(I_2 - I_3\right) + I_{23}\left(\sigma_2 - \sigma_3\right) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

то существует четвертый первый независимый интеграл

$$2V_1 = X\overline{\omega}I\overline{\omega} + 2Y\overline{R}I\overline{\omega} + Z\overline{R}\cdot\overline{R} + 2\eta I\,\overline{\omega}\overline{e} + 2\overline{W}\overline{R} = \text{const}, \tag{8}$$

где элементы матриц X, Y, Z и $\overline{W}$ определяются выражениями

$$X_{13} = X_{12} = Y_{12} = Y_{13} = Z_{12} = Z_{13} = 0; \tag{9}$$

$$\sum_{(123)} X_1\left(I_2 - I_3\right) = 0, \quad X_{23}\left(I_1 - I_3\right) + I_{23}\left(X_1 - X_3\right) = 0, \quad X_{23} = \eta I_{23}; \tag{10}$$

$$Y_1 - Y_3 = \eta\left(\sigma_1 - \sigma_3\right), \quad Y_2 - Y_3 = \eta\left(\sigma_2 - \sigma_3\right), \quad Y_{23} = \eta\sigma_{23}; \qquad (11)$$

$$Z_1 = Z_3 + Y_1\sigma_3 - Y_3\sigma_1, \quad Z_2 = Z_3 + Y_2\sigma_3 - Y_3\sigma_2, \quad Z_{23} = Y_{23}\sigma_2 - Y_2\sigma_{23}; \qquad (12)$$

$$W_1 = \left(\eta\sigma_1 - Y_1\right)e_1, \quad W_2 = \left(\eta\sigma_1 - Y_1\right)e_2, \quad W_3 = \left(\eta\sigma_1 - Y_1\right)e_3, \quad e_1 \neq 0, \qquad (13)$$

и, следовательно, уравнения движения задачи Кирхгофа интегрируются в квадратурах.

Теорема 1 справедлива, поскольку производная по времени $\dot{V}_1$, составленная в силу уравнений движения (3), (4), равна нулю при выполнении условий теоремы 1, следовательно, $V_1 = \text{const}$ — первый интеграл уравнения движения.

Имеет место ***теорема 2***. Если гамильтониан задачи Кирхгофа определяет выражение

$$2H_2 = A\overline{P}\overline{P} + 2\varGamma\overline{R}\overline{P} + B\overline{R}\overline{R} + 2\overline{P}\overline{q} + 2\overline{\chi}\overline{R} = \text{const},$$

где элементы матриц A, Γ, B и векторы $\overline{q}$ и χ определены соотношениями

$$A = Xa, \quad \Gamma = Y + Xc, \quad B = Z + 2YIc + c^{\mathrm{T}} IXc;$$

$$\overline{q} = A\overline{e} + \eta\overline{e}, \quad \chi = \overline{W} + \left(Y + c^{\mathrm{T}} X + \eta c^{\mathrm{T}} I\right)\overline{e},$$

а элементы матриц a, c, b, X, Y, Z и вектор $\overline{W}$ отвечают условиям (5)–(13), то существует четвертый первый независимый интеграл

$$2V_2 = a\overline{P}\overline{P} + 2c\overline{R}\overline{P} + b\overline{R}\overline{R} + 2\overline{P}\overline{d} + 2\overline{R}\overline{r} = \text{const}$$

и, следовательно, уравнения движения задачи Кирхгофа интегрируются в квадратурах.

Справедливо **следствие 1.** Если выполнить каноническую замену переменных

$$\overline{P} \to \overline{P} + \overline{k} \times \overline{R},$$

где компоненты вектора $\overline{k}$ определяют соотношения

$$k_1 = \frac{\varGamma_{23} - \varGamma_{32}}{A_2 + A_3}, \quad k_2 = -\frac{\varGamma_{13}}{A_1}, \quad k_2 = \frac{\varGamma_{12}}{A_1},$$

то матрицы A, Γ, B одновременно приводятся к диагональному виду с помощью одной матрицы ортогональных преобразований, причем элементы преобразованных диагональных матриц $\hat{A}, \hat{\Gamma}, \hat{B}$ будут связаны только одним соотношением:

$$\frac{\hat{\Gamma}_3-\hat{\Gamma}_2}{\hat{A}_1}+\frac{\hat{\Gamma}_1-\hat{\Gamma}_3}{\hat{A}_2}+\frac{\hat{\Gamma}_2-\hat{\Gamma}_1}{\hat{A}_3}=0, \qquad (14)$$

причем при $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2=\hat{\Gamma}_3$ имеет место соотношение

$$\frac{\hat{B}_3-\hat{B}_2}{\hat{A}_1}+\frac{\hat{B}_1-\hat{B}_3}{\hat{A}_2}+\frac{\hat{B}_2-\hat{B}_1}{\hat{A}_3}=0. \qquad (15)$$

Замечание. Соотношения (14), (15) определяют условия интегрируемости уравнений движения в однозначных функциях времени [9].

Напомним, что в переменных $\hat{A}, \hat{\Gamma}, \hat{B}$ классические случаи интегрируемости выглядят следующим образом:

случай Клебша характеризуется условиями

$$\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2=\hat{\Gamma}_3,\ \sum_{(123)}\hat{B}_1\left(\hat{J}_2-\hat{J}_3\right)=0;$$

случай Ляпунова — Стеклова определяется выражениями

$$\hat{A}_{ij}=\hat{\Gamma}_{ij}=\hat{B}_{ij},\ \forall i\neq j\ (i,j=1,2,3),$$
$$\sum_{(123)}\hat{\Gamma}_1\left(\hat{J}_2-\hat{J}_3\right)=0,$$
$$\hat{B}_1-\left(\hat{\Gamma}_2-\hat{\Gamma}_3\right)^2\hat{J}_1=\hat{B}_2-\left(\hat{\Gamma}_3-\hat{\Gamma}_1\right)^2\hat{J}_2=\hat{B}_3-\left(\hat{\Gamma}_1-\hat{\Gamma}_2\right)^2\hat{J}_3.$$

Следствие 2. Если

$$I_2+I_3=0,\quad c_{12}=c_{21}=c_{13}=c_{31}=0,\quad c_1=0,\quad c_{23}=c_{32},$$

$$a_1\left(c_2+c_3\right)+a_2\left(c_2-c_3\right)+2a_{23}c_{23}=0,$$

$$X_{23}\left(c_2-c_3\right)=c_{23}\left(X_2-X_3\right)+\Gamma_{32}-\Gamma_{23},$$

$$X_2c_3=X_{23}c_{23}+\Gamma_3-\Gamma_1,$$

$$X_3(c_2 - c_3) + (X_3 - X_2)c_3 = \Gamma_2 - \Gamma_3,$$

$$B = Z + 2YIc + c^{\mathrm{T}} IXc,$$

то элементы матриц A, Г, B в переменных Колосова связаны соотношениями

$$J_{12} = J_{13} = E_{12} = E_{13} = N_{12} = N_{13} = 0;$$

$$N_{23}(J_2 - J_3) + J_{23}(N_2 - N_3) = 0;$$

$$J_{23}(E_2 - E_3) + E_{23}(J_2 - J_3) = 0;$$

$$E = J\Gamma + (J\Gamma)^{\mathrm{T}} - 1 \cdot sp\, J\Gamma;$$

$$J = A^{-1};$$

$$N = B - \Gamma^{\mathrm{T}} J\Gamma, \quad j = 1 \cdot sp\, J - 2J,$$

(1 — единичная матрица) и, следовательно, матрицы J, E, N одновременно приводятся к диагональному виду с помощью одной матрицы ортогональных преобразований, причем на элементы преобразованных диагональных матриц $\hat{J}, \hat{E}, \hat{N}$ никаких ограничений не накладывается: все девять элементов независимы и могут принимать любые значения.

Замечание. В переменных Колосова классические интегрируемые случаи выглядят следующим образом:

случай Клебша определяется выражением

$$\hat{E} = n\hat{j}, \quad n = \mathrm{const}, \quad \sum_{(123)} \hat{N}_1\left(\hat{J}_2 - \hat{J}_3\right) = 0;$$

случай Ляпунова —

$$\hat{J}_1 = \hat{J}_2 = \hat{J}_3,\ \hat{N}_1\hat{J}_1 + \hat{E}_2\hat{E}_3 = \hat{N}_2\hat{J}_2 + \hat{E}_1\hat{E}_3 = \hat{N}_3\hat{J}_3 + \hat{E}_1\hat{E}_2;$$

случай Стеклова характеризуется соотношением

$$\hat{N}_1 = \hat{N}_2 = \hat{N}_3,\ \hat{E}_1\hat{J}_1 = \hat{E}_2\hat{J}_2 = \hat{E}_3\hat{J}_3.$$

Справедлива ***теорема 3*** (поскольку справедливы теоремы 1, 2 и их следствия). Уравнения сферического движения твердого тела в силовом поле с потенциалом, содержащим линейную и квадратичную части, интегрируются в квадратурах [8] при произвольном тензоре инерции, произвольном расположении центра масс тела и произвольной квадратичной части потенциала.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кирхгоф Г. *Механика. Лекции по математической физике*. Москва, АН СССР, 1962.

[2] Ламб Г. *Гидродинамика*. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947, 928 с.

[3] Clebsch A. Über die Bewegung eines körpers in einer Flüssigkeit. *Math. Annalen*, Bd. 3, 1871, s. 238–262.

[4] Жуковский Н.Е. *Полн. собр. соч., т. II. Гидродинамика. ОНТИ-НКТП СССР*. Москва — Ленинград, 1935, 359 с.

[5] Ляпунов А.М. *Соб. соч., т.* I. Москва, 1954, с. 276–324.

[6] Чаплыгин С.А. *Соб. соч., т.* I. Москва, ГИТЛ, 1948, с. 194–311.

[7] Стеклов В.А. *О движении твердого тела в жидкости*. Харьков, тип. Даре, 1893, 234 с.

[8] Плешаков Ю.Д. Новые интегрируемые случаи в классических задачах динамики твердого тела. *Докл. РАН*, 2007, т. 413, № 4, с. 478–480.

[9] Козлов В.В. *Симметрии топологии и резонансы в гамильтоновой механике.* Изд-во «Факториал», Удм. ун-т, 1995, 429 с.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Плешаков Ю.Д. Новые интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1188.html

Плешаков Юрий Дмитриевич — доцент кафедры «Теоретическая механика им. Н.Е. Жуковского» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: udpleshakov@mail.ru