УДК 531.01/534.112

Расчет малых колебаний упругих систем с трением

© А.А. Пожалостин, Б.Г. Кулешов, А.В. Паншина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрен разработанный приближенный аналитический метод для расчета малых свободных и вынужденных колебаний одномерных систем с сухим трением. Метод основан на приведении системы к механическому аналогу. Механический аналог представлен для каждого типа колебаний в виде бесконечной системы линейных осцилляторов в предположении равенства частот i-го тона свободных колебаний каждого вида системы i-му тону колебаний механического аналога. Для учета сухого трения использован энергетический метод, который впервые был применен для исследования вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы С.П. Тимошенко. При построении методики расчета колебаний использован метод приведенных (эквивалентных) параметров. Для вынужденных колебаний механических аналогов найдены частные решения и рассмотрены уравнения переходного процесса. Результаты расчетов можно применять при исследовании динамики трубопроводов, например, нефтепроводов.

Ключевые слова: *консольная балка, сухое трение, свободные и вынужденные колебания, приведенное вязкое сопротивление.*

Введение. Использован разработанный приближенный аналитический метод для расчета малых свободных и вынужденных колебаний одномерных систем с сухим трением [1–7]. Приведены примеры колебаний упругих балок. Подобные задачи встречаются на практике, например, при ремонте газо- и нефтепроводных систем, в самолетостроении и в областях, где имеется достаточное количество длинных трубопроводов.

Использована модель сухого трения, которая была применена к расчету колебаний системы с одной степенью свободы в [8]. В этой модели сухое трение не зависит от скорости скольжения элементов колебательной системы.

Основные допущения состоят в следующем:

1) сухое трение считается небольшим;

2) формы собственных колебаний не изменяются при учете трения.

Известно, что последнее условие применяют при расчете колебаний механических систем с малым вязким сопротивлением в гидроупругости. Также предполагается, что колебания малые, материал подчиняется закону Гука, однороден, депланация сечений стержня отсутствует, справедлива гипотеза сплошности среды.

Продольные колебания однородной консольной балки. Для построения методики расчета был использован метод приведенных

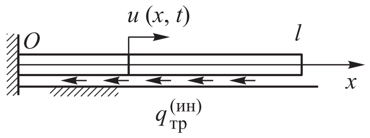

Рис. 1. Однородная консольная балка ($u(x, t)$ — перемещение материального сечения с координатой x стержня в продольном направлении)

(эквивалентных) параметров и энергетический метод. Для вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы энергетический метод применен С.П. Тимошенко [8].

Проиллюстрируем разработанную методику расчета на примере продольных колебаний однородной консольной балки (рис. 1).

Случай 1. Свободные колебания. Предположим, что на балку действует равномерно распределенная сила сухого трения интенсивностью $q_{\text{тр}}^{(\text{ин})} = \frac{G}{l}\delta$, где G — сила тяжести стержня; l — его длина; δ — коэффициент кулонова трения 1-го рода.

Дифференциальное уравнение продольных колебаний имеет вид [8–12]

$$EF_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где μ_0 — погонная масса; EF_0 — жесткость стержня в продольном направлении.

Частное решение уравнения (1), согласно методу Фурье [8], представим в виде

$$u(x,t) = f(x)s(t),$$

где $f(x)$ — форма колебания, $s(t)$ — временной множитель.

Запишем граничные условия системы (см. рис. 1) для функции f:

$$f(0) = 0, \quad f'(l) = 0.$$

Решение $f_i(x)$ имеет вид [8]

$$f_i = \sin \frac{(2i-1)}{2} \frac{\pi x}{l}, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

На первом этапе решения задачи сила сухого трения интенсивностью $q_{\text{тр}}^{(\text{ин})}$ не рассматривается.

Функция $s_i(t) = A_i \cos(\omega_i t - \alpha_i)$, где A_i и α_i — константы, подлежащие определению; ω_i — частота i-го тона свободных колебаний.

Решение $u(x,t)$ должно удовлетворять начальным условиям:

$$u(x,0)=\varphi(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|_{t=0}=\psi(x).$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x)\cos(\omega_i t-\alpha_i). \qquad (2)$$

Функции $f_i(x)$ удовлетворяют условиям ортогональности [8, 9]:

$$\int_0^l \mu_0 f_i(x) f_j(x)dx=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ \|f_i\|, & i=j \end{cases}$$

Построим для колебаний однородной консольной балки приведенную эквивалентную систему. Основным условием является равенство частот собственных колебаний консольной балки и ее механического аналога [10]. Представим механический аналог исходной системы в виде бесконечной системы линейных осцилляторов (рис. 2).

Из равенства частот колебаний системы и механического аналога, находим приведенные массу и жесткость последнего [10]:

$$m_i^0=\int_0^l \mu_0 f_i^2(x)dx, \; c_i^0=\int_0^l EF_0(f_i')^2\,dx.$$

Система собственных функций $f_i(x)$, $i=1, 2, \ldots$ полна и обладает свойством ортогональности [9].

Для учета сил сухого трения разложим $q_{\text{тр}}^{(\text{ин})}$ в ряд по функциям $f_i(x)$:

$$q_{\text{тр}}^{(\text{ин})}=\frac{G}{l}\delta=\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x),$$

получим

$$a_i=\frac{G}{\pi}\frac{4\delta}{(2i-1)l}. \qquad (3)$$

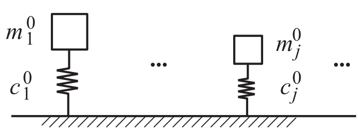

Рис. 2. Механический аналог колебательной системы

Воспользуемся энергетическим методом определения величины эквивалентного вязкого трения μ_i для каждого номера i. Приравняем работу сил вязкого трения $A_{\text{тр}}$ за период $T_i = \dfrac{2\pi}{\omega_i}$ свободных колебаний работе сил сухого трения (3) для каждого номера i:

$$\int_0^l \int_0^{T_i} \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dxdt = 4a_i \int_0^l A_i f_i(x)dx,$$

где $u_i = A_i f_i(x) \cos(\omega_i t + \alpha_i)$.

Отсюда коэффициент приведенного линейного сопротивления

$$\mu_i = \frac{4a_i \delta}{T_i \pi (2i-1) A_i}.$$

Дифференциальное уравнение для i-го осциллятора имеет вид

$$\ddot{y}_i + 2n_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0. \quad (4)$$

Здесь $2n_i = \dfrac{\mu_i^0}{m_i^0}$, $\mu_i^0 = \mu_i \left\| f_i(x) \right\|$, $\left\| f_i(x) \right\|$ — норма функции $f_i(x)$.

Запишем решение уравнения (4)

$$y_i(t) = A_i e^{-n_i t} \cos(\omega_{1i} t - \alpha_i), \quad (5)$$

где $\omega_{1i}^2 = \omega_i^2 - n_i^2$.

Отметим, что величины n_i и ω_{1i} обратно пропорциональны амплитуде A_i. Частота ω_{1i} зависит от неизвестной постоянной A_i.

Выпишем, используя (5), общее решение уравнения (1) с учетом трения

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x) e^{-n_i t} \cos(\omega_{i1} t - \alpha_i).$$

Используя начальные условия (2) и условия ортогональности функций $f_i(x)$, получим

$$A_j = \frac{\int_0^l \varphi(x) f_i(x) dx}{\left\| f_j \right\| \cos \alpha_j}, \; A_j \sin \alpha_j = \frac{1}{\omega_{1j}} \left(b_{2j} + b_{1j} n_j \right),$$

где $b_{1j} = A_j \cos\alpha_j$, $b_{2j} = \dfrac{\int\limits_0^l \psi(x) f_j(x)dx}{\|f_j\|}$.

Отсюда

$$A_j = \sqrt{b_{1j}^2 A_j^2 + \frac{1}{\omega_{1j}^2}\left(b_{2j} + b_{1j} n_j\right)^2}. \tag{6}$$

Решая трансцендентное уравнение (6), находим амплитуду A_j и фазовый сдвиг $\alpha_j = \arccos\dfrac{b_{1j}}{A_j}$.

Случай 2. Вынужденные колебания упругой системы с сухим трением.

Этот режим колебаний рассмотрим также на примере продольных колебаний однородной консольной балки (рис. 1). Учтем внешнее воздействие $F(t) = F_0 \cos(pt + \beta)$. Сосредоточенная сила $F(t)$ приложена в сечении x_i вдоль консоли, F_0 — ее амплитуда, p — частота изменения силы $F(t)$. Все допущения остаются прежними. Воспользуемся механическим аналогом системы. Для каждого осциллятора с номером i правая часть уравнения его движения определяется с помощью обобщенной силы [9].

Разложим силы сухого трения в ряд по собственным функциям однородной краевой задачи $f_i(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2l}(2i-1)$. Тогда $\dfrac{G}{l}\delta = \sum\limits_i a_i \sin\dfrac{\pi x}{l}\left(2i-1\right)$ и $a_i = \dfrac{4G\delta}{l\pi(2i-1)}$.

Коэффициент приведенного вязкого сопротивления μ_i находим из условия равенства за период $T = \dfrac{2\pi}{p}$ вынужденных колебаний работы сил линейно-вязкого сопротивления и работы сил сухого трения для каждого номера i:

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l \mu_i f_i^2(x) p^2 \sin^2(pt + \alpha) dxdt = 4\int\limits_0^l a_i f_i(x)dx.$$

Отсюда погонный коэффициент вязкости $\mu_i = \dfrac{64G\delta}{B_i(2i-1)^2\pi^3 l}$.

Для вычисления приведенного коэффициента вязкого сопротивления μ_i^0 для механического аналога сравним функцию Рэлея для эквивалентной системы $\Phi_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \mu_i^0 \dot{y}_i^2$ и i-е слагаемое в разложении функции Рэлея для продольных колебаний балки $\Phi_i = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \mu_i f_i^2 dx \right] \dot{s}_i^2$.

Получим

$$\mu_i^0 = \mu_i \left\| f_i \right\|.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний для эквивалентной системы примет вид

$$m_i^0 \ddot{y}_i + \mu_i^0 \dot{y}_i + c_i^0 y_i = Q_i, \qquad (7)$$

где

$$Q_i = \frac{\sum \overline{F}_k \delta \overline{r}_k}{\delta y_i} = +\int_0^l F(\delta(x - x_i) f_i(x) dx = F_0 \cos(pt + \beta) f_i(x). \qquad (8)$$

Уравнение (7) с учетом выражения (8) принимает вид

$$\ddot{y}_i + 2n_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = h_i \cos(pt + \alpha), \qquad (9)$$

где $2n_i = \mu_i^0 / m_i^0$, $\omega_i^2 = c_i^0 / m_i^0$ — собственные частоты продольных колебаний без трения.

Частное решение уравнения (9) представим следующим образом:

$$y_i^* = B_i \cos(pt + \alpha - \varepsilon_i),$$

где B_i — амплитуда вынужденных колебаний:

$$B_i = \frac{h_i}{\sqrt{\left(\omega_i^2 - p^2\right)^2 + 4n_i^2 p^2}} = \pm \frac{1}{\left(\omega_i^2 - p^2\right)} \sqrt{h_i^2 - \eta_i^2 p^2}, \; h_i = \frac{F_0 f_i(x_i)}{m_i^0},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_i = \frac{2n_i p}{\left(\omega_i^2 - p^2\right)} = \frac{\eta_i}{A_i} \frac{p}{\left(\omega_i^2 - p^2\right)}.$$

Здесь η_i — некоторые константы.

Рассмотрим теперь уравнение переходного процесса. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}A_i e^{-n_i t}\cos(\omega_{1i}t-\alpha_i)f_i(x)+\sum_{i=1}^{\infty}B_i f_i(x)\cos(pt+\alpha-\varepsilon_i).$$

Постоянные A_i и α_i определяем из начальных условий [5–7]. В результате получаем трансцендентное уравнение

$$A_j^2=\left\{\frac{\int_0^l \varphi(x)f_j(x)dx}{\|f_j\|}-B_j\cos\left(\alpha_j-\varepsilon_j\right)^2\right\}+$$

$$+\frac{1}{\omega_{1j}^2}\left\{\frac{\int_0^l \psi(x)f_j(x)dx}{\|f_j(x)\|}+n_j\frac{\int_0^l \varphi(x)f_j(x)dx}{\|f_j\|}-B_j\left[n_j\cos\left(\alpha_j-\varepsilon_j\right)\right]+p\sin(\alpha_j-\varepsilon_j)\right\}^2$$

Решая его, вычисляем A_j. После этого находим α_j и уравнение переходного процесса.

Заключение. Представленная модель сухого трения позволяет рассчитывать в первом приближении свободные и вынужденные колебания таких механических систем, как например, газо- и нефтепроводные системы, а также трубопроводные системы в аэро- и ракетостроении.

Исследования проводились при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ. № НШ — 4748. 2012.8.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пожалостин А.А., Петров Е.П. Аналитический метод расчета декремента колебаний упругого бака с жидкостью. *Сб. тр. 27 Российской школы «Наука и технология»*. Миасс, 2007, с. 559.

[2] Pozgalostin A.A., Petrov E.P. Analytical method of calculating the transfer functions of damper in pipe. *Int. J. of Vibration and Acoustics, American Society of Mechanical Engineers*, paper No. VIB-08-1195, December 2008.

[3] Пожалостин А.А., Кулешов Б.Г., Паншина А.В. *Колебания упругих систем с сухим трением*. Деп. в ВИНИТИ. Москва, 2011, № 324-В2011, 8 с.

[4] Кулешов Б.Г., Пожалостин А.А., Паншина А.В. Поперечные колебания упругой балки с сухим трением. *Тез. докл. X Всерос. съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. Н. Новгород, Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2011, с. 101–102.

[5] Пожалостин А.А., Паншина А.В. Вынужденные колебания упругих одномерных систем с сухим трением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2012, вып. 7, с. 21. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/293.html.

[6] Пожалостин А.А., Шевченко А.А. Вынужденные крутильные колебания прямого вала с сухим трением. *Студ. научн. вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2012, т. 12, ч. 4, с. 100.

[7] Пожалостин А.А., Паншина А.В. Применение принципов классической механики к динамике упругого тела. Современные проблемы механики и ее преподавания в вузах. *Доклады IV Всероссийского совещания-семинара заведующих кафедрами и ведущих преподавателей теоретической механики вузов Российской Федерации*. Новочеркасск, ЮРГТУ, 2010, с. 194–197.

[8] Тимошенко С.П. *Колебания в инженерном деле*. Москва, КомКнига, 2006, 439 с.

[9] Бабаков И.М. *Теория колебаний*. Москва, Дрофа, 2004, 592 с.

[10] Шиманский Ю.А. *Динамический расчет судовых конструкций*. Ленинград, Судпромгиз, 1963, 253 с.

[11] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. *Теория колебаний*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 272 с.

[12] Пановко Я.Г. *Введение в теорию механических колебаний*. Москва, Наука, 1991, 256 с.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Пожалостин А.А., Кулешов Б.Г., Паншина А.В. Расчет малых колебаний упругих систем с трением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1187.html

Пожалостин Алексей Алексеевич окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1963 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Научные интересы: гидроупругость, теория колебаний. e-mail: a.pozhalostin@mail.ru

Кулешов Борис Георгиевич окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1961 г. Старший преподаватель кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители». МГТУ им. Н.Э. Баумана. Научные интересы: проектирование ракет-носителей.

Паншина Алла Викторовна окончила механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1982 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Научные интересы: теория колебаний, геометрические и алгебраические свойства механических систем. e-mail: panshina@bmstu.ru