УДК 517.977.5

Оптимальные траектории систем канонического вида

© Г.А. Нефедов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Для нелинейных систем с векторным управлением, записанных в каноническом виде, указан вид программных траекторий в классе полиномов, на которых реализуется минимальное значение специального энергетического функционала; построено соответствующее этому виду программное управление. Использование полиномов является типичным приемом построения траекторий движения системы канонического или квазиканонического вида при решении терминальных задач. Представленные результаты позволяют подвести теоретическую базу под выбор полиномов в качестве базисных функций.

Ключевые слова: *нелинейная динамическая система, канонический вид, терминальная задача, оптимальное управление.*

Введение. Терминальная задача состоит в выборе такого управления, при котором динамическая система из заданного начального состояния переходит в заданное конечное состояние. При заданном времени движения эта задача может быть решена в рамках концепции обратных задач динамики: следует выбрать траекторию движения системы, удовлетворяющую заданным граничным условиям (например, в классе полиномов от времени), а затем для полученной траектории рассчитать программное управление. Например, такой подход реализован в [1] при построении траекторий движения летательного аппарата.

Если аффинная стационарная система с векторным управлением

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} B_i(\mathbf{x}) u_i, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния системы, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^{\mathrm{T}}$ — вектор управлений размерности m, преобразуется в некоторой области $U \subset \mathbb{R}^n$ в систему канонического вида [2]

$$
\begin{aligned}
\dot z_1^1 &= z_2^1, \ldots, \dot z_{n_1-1}^1 = z_{n_1}^1, \\
\dot z_{n_1}^1 &= f_1 + \sum_{i=1}^{m} g_i^1 u_i, \\
&\ldots \\
\dot z_1^m &= z_2^m, \ldots, \dot z_{n_m-1}^m = z_{n_m}^m, \\
\dot z_{n_m}^m &= f_m + \sum_{i=1}^{m} g_i^m u_i,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где $\mathbf{z} = (z_1^1, \ldots, z_{n_1}^1, \ldots, z_1^m, \ldots, z_{n_m}^m)^{\text{т}}$ — вектор состояния новой системы размерности $n = n_1 + \ldots + n_m$, $\det(\mathrm{G}(\mathbf{z})) \neq 0$, $G(\mathbf{z}) = (\mathrm{g}_j^i(\mathbf{z}))$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$, и построенная траектория целиком лежит в U, то по программной траектории можно рассчитать программное управление и синтезировать управление в виде обратной связи, стабилизирующее полученное программное движение.

В случае, если система не преобразуется к каноническому виду, часто ее можно привести к регулярному квазиканоническому виду [3]. Если при этом нулевая динамика системы в отклонениях от программной траектории оказывается равномерно асимптотически устойчивой, то, стабилизируя систему в отклонениях по части переменных, задающих ее каноническую часть, можно также обеспечить реализацию заданного программного движения. Например, в [4] на основе описанного подхода решена задача синтеза управления, обеспечивающего движение колесного робота по заданной траектории.

Для стационарных аффинных систем, преобразуемых к квазиканоническому виду (нормальной форме) с асимптотически устойчивой нулевой динамикой, также известен подход [5], обеспечивающий стабилизацию программного движения по «канонической» части переменных. Метод построения аффинных систем, которые преобразуются к квазиканоническому виду с асимптотически устойчивой нулевой динамикой, предложен в [6].

Отметим, что, вводя вспомогательные управления $v_i = f_i + \sum_{j=1}^{m} g_j^i u_j$, $i = \overline{1,m}$, систему канонического вида (2) можно преобразовать в линейную систему специального вида

$$
\begin{array}{rcl}
\dot{z}_1^1 & = & z_2^1, \ldots, \dot{z}_{n_1-1}^1 = z_{n_1}^1, \\
\dot{z}_{n_1}^1 & = & v_1, \\
 & \ldots & \\
\dot{z}_1^m & = & z_2^m, \ldots, \dot{z}_{n_m-1}^m = z_{n_m}^m, \\
\dot{z}_{n_m}^m & = & v_m,
\end{array}
\qquad (3)
$$

а из системы квазиканонического вида выделить линейную подсистему и сделать в ней аналогичную замену управления. В дальнейшем ограничимся рассмотрением аффинных систем, преобразуемых к регулярному каноническому виду.

Для систем, допускающих преобразование к виду (3), ставится задача поиска траекторий, на которых достигается минимум энергетического функционала

$$
I = \int_0^\tau f_0(v)dt \to \min, \quad f_0(v) = \sum_{k=1}^m \frac{\delta_k}{2} v_k^2(t)dt, \qquad (4)
$$

где все коэффициенты δ_k неотрицательны и среди них есть хотя бы один ненулевой. Предполагается, что конечный момент времени τ фиксирован. Граничные условия зададим в следующем виде:

$$
z(0) = z_0, \quad z(\tau) = z_\tau. \qquad (5)
$$

В [7] для продольного движения автомобиля получен общий вид траекторий, минимизирующих функционал вида (4). Уравнения движения автомобиля представлены кинематическими соотношениями в виде линейной системы третьего порядка специального вида со скалярным управлением — рывком автомобиля. Основываясь на подходе, предложенном в [7], можно получить вид траекторий для системы (3), на которых достигается минимизация функционала (4).

Нахождение оптимальных траекторий. Программная траектория системы (3) может быть однозначно задана координатными функциями $z_1^i(t)$, $i = \overline{1,m}$; остальные координатные функции находятся их последовательным дифференцированием.

Т е о р е м а . Координатные функции $z_1^i(t)$, $i = \overline{1,m}$, траектории $\mathbf{z}(\mathrm{t})$, являющейся решением задачи оптимального управления (3) – (5), являются полиномами порядка $2n_i - 1$, $i = \overline{1,m}$.

Доказательство. Выпишем лагранжиан задачи:

$$L(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}},\mathbf{v}) = f^0(t,\mathbf{z},\mathbf{v}) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)(\dot{\mathbf{z}}_i - f^i(t,\mathbf{z},\mathbf{v})) = f^0 + \lambda^{\text{т}}(\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{f}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\delta_k}{2}v_i^2(t) + \sum_{j=1}^{n_i-1}\lambda_j^i(\dot{z}_j^i - z_{j+1}^i) + \lambda_{n_i}^i(\dot{z}_{n_i}^i - v_i)\right).$$

Соответствующие уравнения Эйлера с учетом разделения переменных на фазовые переменные и управления имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}L'_{\dot{z}_i} - L'_{z_i} = 0, & i = \overline{1,n}, \\ \dfrac{d}{dt}L'_{\dot{v}_j} - L'_{v_j} = 0, & j = \overline{1,m}, \end{cases}$$

или для данного вида лагранжиана

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda}_1^j = 0, \quad j = \overline{1,m}, \\ &\dot{\lambda}_i^j = -\lambda_{i-1}, \quad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{2,n_j}, \\ &\delta_j v_j = \lambda_{n_j}^j, \ j = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, что $\lambda_1^j = C_0^j = \text{const}$, $j = \overline{1,m}$. Тогда, последовательно интегрируя (1) – (5), получаем

$$\lambda_i^j = \sum_{k=0}^{i-1}\frac{C_{i-1-k}^j t^k}{k!}, \quad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,n_j},$$

$$v_j = \frac{\lambda_{n_j}^j}{\delta_j}, \quad j = \overline{1,m} \wedge \delta_j \neq 0. \tag{7}$$

Если один из коэффициентов $\delta_j = 0$, то все соответствующие ему λ_i^j, $i = \overline{1,n_j}$ будут тождественно равны нулю.

Подставив программное управление (7) в систему (3) и последовательно интегрируя снизу вверх уравнения в каждом блоке (3), найдем

$$z_i^j = \sum_{k=0}^{2n_j-i}\frac{C_{2n_j-i-k}^j t^k}{\delta_j k!}, \quad j = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,n_j}.$$

В частности, изменение переменной $z_1^j(t)$ будет определяться полиномом от времени порядка $2n_j - 1$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-07-00329, 12-01-31303 и 13-07-00720.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Канатников А.Н., Шмагина Е.А. Задача терминального управления движением летательного аппарата. *Нелинейная динамика и управление: Сборник статей*. Вып. 7. Емельянов С.В., Коровин С.К., ред. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2010, с. 79–94.

[2] Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. *Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза.* Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, 520 с.

[3] Ткачев С.Б., Шевляков А.А. Преобразование аффинных систем со скалярным управлением к квазиканоническому виду. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2013, № 1, с. 3–16.

[4] Ткачев С.Б. Реализация движения колесного робота по заданной траектории. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 2, с. 33–55.

[5] Ткачев С.Б. Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с векторным управлением. *Наука и образование*. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн., 2012, № 8, с. 121–134.

[6] Isidori A. *Nonlinear control systems*. London, Springer-Verlag, 1995, 587 p.

[7] Werling M., Kammel S., Ziegler J., Groll L. Optimal trajectories for time-critical street scenarios using discretized terminal manifold. *I. J. Robotic Res.*, 2012, pp. 346–359.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Нефедов Г.А. Оптимальные траектории систем канонического вида. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1.
URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1186.html

Нефедов Григорий Андреевич — аспирант, ассистент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: mastergrig90@gmail.com