УДК 62-82(075.8)

О физическом смысле числа Рейнольдса и других критериев гидродинамического подобия

© К.А. Макаров

МГТУ имени Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предлагается физическая интерпретация числа Рейнольдса как отношение потока импульса жидкости, заключенной в объеме единичной длины вдоль по потоку, к силе вязкого трения на единице длины вдоль по потоку. При такой интерпретации также снимается противоречие между «энергетической» и «силовой» трактовками физического смысла числа Рейнольдса. Приводится обоснование логической корректности такой интерпретации. Рассмотрен физический смысл других параметров гидродинамического подобия.

Ключевые слова: *гидродинамическое подобие, число Рейнольдса, число Фруда, число Ньютона, число Эйлера.*

Рассматриваемая проблема связана с понятиями, давно и хорошо всем известными и широко используемыми в научной и прикладной деятельности. Но именно это обстоятельство делает ее особенно актуальной.

В наше время наряду с накоплением информации об окружающем мире в массе действует тенденция утраты способности понимать эту информацию. Люди привыкают использовать термины ситуационно, не задумываясь над их смыслом. К сожалению, эта тенденция действует и в области науки. По выражению А.А. Зиновьева, научные истины входят в массовое сознание в форме стереотипов и заблуждений [1].

Использование понятий без понимания их физического смысла чревато логическими ошибками и получением абсурдных результатов как научных, так и прикладных. Единственной защитой от этого является соблюдение требований научного мышления, главное из которых — корректное обращение с терминологией в соответствии с правилами логики.

У А.А. Зиновьева сформулированы требования к определению терминов (понятий), используемых в науке: однозначность, логическая непротиворечивость, полнота, удобство использования [2].

Если рассмотреть с этой точки зрения такую широко используемую величину, как число Рейнольдса, то можно заметить, что в фундаментальных трудах по гидродинамике [3–5] оно вводится просто как безразмерный комплекс, получающийся при обезразмеривании системы уравнений Навье — Стокса. Его величина позволяет судить о степени влияния некоторых членов уравнения на характер решения.

При этом физическому смыслу данной величины внимания не уделяется, поскольку, для математического вида решения это большого значения не имеет. Однако вопрос о физическом смысле выходит на первый план там, где встает задача об интерпретации результатов: в прикладных задачах и при построении новых теоретических представлений о тех или иных физических явлениях.

В публикациях по технической гидравлике, имеющих в большей степени прикладную направленность [6], как правило, дается физическая интерпретация числа Рейнольдса как **величины, пропорциональной отношению сил инерции, к силам вязкого трения, действующим в потоке**. Такое определение не является корректным, что проявляется при рассмотрении стационарных течений в каналах постоянного сечения, для описания которых число Рейнольдса широко используется (исторически оно и было введено для таких каналов).

Для анализа ситуации обратимся к смыслу принятого в механике понятия «сила». Он вводится как характеристика причины, способной вызвать изменение количества движения (импульса) физического тела, и численно равен скорости изменения импульса; в других терминах, удобных для описания течения непрерывной среды, — как изменение потока импульса на рассматриваемом интервале траектории движения непрерывной среды.

В соответствии с первым законом Ньютона, в инерциальных системах отсчета причиной такого изменения может быть только другое физическое тело, а численное значение характеризует степень его воздействия на рассматриваемое тело. Сила инерции вводится (и имеет смысл) только в неинерциальных системах отсчета. Ее принципиальная особенность в том, что она описывает изменение импульса тела (в неинерциальных системах отсчета), не вызванное воздействием других физических тел, а являющееся исключительно следствием неинерциальности системы отсчета, в которой работаем. Очевидно, в инерциальной системе отсчета ее быть принципиально не может, или можно сказать, что она по определению равна нулю. При введении числа Рейнольдса обычно работаем в инерциальных системах отсчета, связанных со стенками канала, и используем скорость относительно стенок канала, неподвижного относительно Земли, а в подавляющем большинстве задач гидравлики Земля постулируется как инерциальная система отсчета. Тогда, в соответствии с объявленным физическим смыслом, число Рейнольдса должно быть равно нулю. Переход к системе отсчета, связанной с элементом текущей жидкости, не снимает это противоречие в случае стационарного течения в канале с постоянным сечением. В этом случае скорость потока постоянна, а любая система отсчета, движущаяся без ускорения относительно инерциальной (Земли), тоже является инерциальной.

Известна также «энергетическая» интерпретация числа Рейнольдса как **величины, пропорциональной отношению кинетической энергии объема, протекающего через рассматриваемое сечение, к работе сил вязкого трения над ним в процессе протекания.** При такой интерпретации парадокса в случае стационарного течения в канале постоянного сечения не возникает. Кинетическая энергия отлична от нуля, работа сил вязкого трения — тоже. Можно было бы ограничиться чисто «энергетической» интерпретацией, но поскольку в классической механике «силовой» подход Ньютона и «энергетический» Лейбница тождественны и логически выводятся один из другого, то «силовая» интерпретация должна существовать и не приводить к парадоксам. Потребность в корректной «силовой» интерпретации диктуется тем, что число Рейнольдса используется в качестве критерия динамического подобия, характеризующего отношение сил в потоке.

Рассмотрим, откуда взялась «силовая» интерпретация, приводящая к парадоксальным результатам. По определению А.А. Зиновьева, в основе любого парадокса лежит логическая ошибка, и разрешить парадокс — значит показать ее [2].

В учебниках по машиностроительной гидравлике [6] используется утверждение, что в потоке вязкой несжимаемой жидкости силы инерции пропорциональны произведению динамического давления $\frac{\rho v^2}{2}$ на характерную площадь S. Для обоснования этого утверждения записывается закон сохранения количества движения (второй закон Ньютона) для элемента жидкости с характерным размером δl:

$$\delta F = k\rho(\delta l)^3 \frac{dv}{dt} = k\rho(\delta l)^3 \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = k\rho(\delta l)^3 v\frac{dv}{ds}, \tag{1}$$

где k — безразмерный коэффициент формы; ds — элементарный путь частицы.

Далее проводится обезразмеривание с использованием характерного размера потока l и характерной величины средней скорости $\langle v \rangle$:

$$\delta F = k\frac{\delta l}{ds}\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 \frac{v}{\langle v \rangle} d\left(\frac{v}{\langle v \rangle}\right)\rho\langle v \rangle^2 l^2. \tag{2}$$

Таким образом,

$$\delta F \sim \rho\langle v \rangle^2 l^2, \tag{3}$$

где коэффициент пропорциональности зависит только от кинематических параметров и, следовательно, у подобных потоков одинаков. А так как $l^2 \sim S$ и $\delta F \sim F$, то

$$F \sim \rho \langle v \rangle^2 S. \tag{4}$$

Для корректного использования приведенного вывода следовало бы оговорить, что δF в инерциальной системе отсчета, связанной со стенками канала, имеет смысл «суммы всех сил» и может быть интерпретировано как «сила инерции», если рассматривать элемент жидкости в системе отсчета, связанной с ним самим. Тогда сумма всех сил, вызванных воздействием физических тел, будет уравновешиваться этой силой инерции. Однако в случае постоянной скорости, при обоих этих подходах, и сила инерции, и сумма всех сил, вызванных воздействием физических тел, будут равны нулю, что лишает сделанные выводы смысла. Нуль пропорционален любому числу, если коэффициент пропорциональности тоже нуль, а здесь таковой присутствует в явном виде: $d\left(\dfrac{v}{\langle v \rangle}\right) = 0$.

Откуда же взялась сила инерции? Для выяснения этого можно рассмотреть известную задачу о набегании потока жидкости на нормальную твердую безграничную стенку. В этом случае секундный импульс

$$P = \rho Q v = \rho v^2 S \tag{5}$$

будет равен силе воздействия потока на стенку. Соответственно, по третьему закону Ньютона, это будет сила воздействия стенки на поток, изменяющая его импульс. В этом случае в системе отсчета, связанной с элементом потока, она будет уравновешена силой инерции, возникающей в данной системе отсчета.

Таким образом, число Рейнольдса следует строго определять как «величину, пропорциональную отношению сил инерции действующих на элемент объема потока, которые возникнут в неинерциальной системе отсчета, связанной с этим элементом объема, если скорость этого объема проекции на первоначальное ее направление изменится до нуля в единицу времени к силам вязкого трения». Без сделанных здесь многочисленных оговорок физическая интерпретация утрачивает логическую строгость, что приводит к парадоксу, рассмотренному выше.

Такая громоздкая интерпретация физического смысла неудобна в использовании, очевидно поэтому, в книгах, имеющих прикладную направленность, эти необходимые оговорки опускают. Кроме того, такая интерпретация неудобна и для теоретических построений.

В качестве более удобного и в то же время корректного определения можно предложить следующее: число Рейнольдса — величина, пропорциональная отношению потока импульса жидкости через выбранное сечение, заключенной в объеме единичной длины вдоль по потоку, к силе вязкого трения, действующей на этот объем.

Действительно, если за время Δt, необходимое для протекания через сечение диаметром d объема единичной длины, через это сечение будет переноситься поток импульса

$$P = \rho v^2 \frac{\pi d^2}{4}, \qquad (6)$$

сила вязкого трения, действующая на этот объем, —

$$F_T = \tau v \Delta t \pi d. \qquad (7)$$

Если принять ньютоновский реологический закон на границе рассматриваемого объема

$$\tau = \mu \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0, \qquad (8)$$

где $\vec{n}$ — направление, нормальное к боковой поверхности объема, то

$$F_T = \mu \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0 v \Delta t \pi d. \qquad (9)$$

Таким образом,

$$\frac{P}{F_T} = \frac{\rho v d}{\mu} \frac{1}{4} \frac{1}{\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0 \Delta t}, \qquad (10)$$

где $\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_0 \Delta t$ — коэффициент, имеющий только кинематический смысл (угол наклона эпюры скоростей к нормали).

Предлагаемая интерпретация снимает рассмотренный выше парадокс: в стационарном течении через постоянное сечение поток импульса отличен от нуля. Кроме того, она обеспечивает внутренне смысловое единство «силового» и «энергетического» подхода. Так же, как и кинетическая энергия течения, поток импульса никак себя внешне не проявляет и измерен быть не может. Внешне проявляется и может быть измерено только изменение кинетической энергии, как и потока импульса (через совершенную работу, или силу).

Аналогичным образом можно интерпретировать и другие числа гидродинамического подобия:

число Ньютона

$$\mathrm{Ne} = \frac{F_i}{\rho \langle v \rangle^2 S} \text{ —} \tag{11}$$

как отношение какого-либо вида сил к потоку импульса;

число Эйлера

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho \langle v \rangle^2} \text{ —} \tag{12}$$

как отношение сил давления к потоку импульса;

число Фруда

$$\mathrm{Fr} = \frac{\langle v \rangle^2}{FL} \text{ —} \tag{13}$$

как отношение потока импульса к массовым силам (как правило — гравитационным).

Такая физическая интерпретация хорошо согласуется с тем, для чего используются числа подобия: оценка влияния соответствующих членов в системе уравнений Навье — Стокса, что физически означает степень влияния соответствующих сил (как источников изменения потока импульса) на «запасенную» величину потока импульса по отношению к этой величине.

Строгим логическим обоснованием предлагаемой интерпретации является следующее. Если записано какое-либо уравнение (численное выражение), описывающее физическую ситуацию (т. е. имеющее физический смысл), то при проведении над ним преобразований в соответствии с правилами логики смысл уравнения (численного выражения) должен сохраняться на каждом шаге таких преобразований [2]. Именно с этой целью правила логических преобразований и были придуманы. Правила математических преобразований являются частным случаем логических.

Косвенным проявлением этого закона в физике является сохранение размерности. Нарушение размерности соотношений — явный признак логической ошибки. Соблюдение размерности — необходимое условие логической корректности, но не достаточное, так как величины, имеющие разный физический смысл, могут иметь одинаковую размерность (например, масса как мера гравитации, масса как мера инертности, энергия и работа). Необходимым и достаточным условием будет именно сохранение физического смысла выражений, а сохранение размерности отсюда следует логически.

Рассмотрим с этой точки зрения систему уравнений Навье — Стокса:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Sh}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}}+\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{y}}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{\mathrm{Fr}}\overline{F}_x-\mathrm{Eu}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{y}^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{z}^2}\right)\\
&\mathrm{Sh}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{t}}+\overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{x}}+\overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}}+\overline{w}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{\mathrm{Fr}}\overline{F}_y-\mathrm{Eu}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{y}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{y}^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{z}^2}\right)\\
&\mathrm{Sh}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{t}}+\overline{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{x}}+\overline{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{y}}+\overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{\mathrm{Fr}}\overline{F}_z-\mathrm{Eu}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{z}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{y}^2}+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\overline{z}^2}\right)
\end{aligned}\right\}. \quad (14)$$

Она представляет собой закон сохранения количества движения для сплошной среды. Другими словами: в левой части изменение потока импульса, переносимого элементарным объемом, а в правой — разного рода силы, воздействующие на этот объем. При обезразмеривании для удобства работы переходим к безразмерным численным величинам. Но, поскольку физический смысл должен сохраняться, то, с точки зрения логики, безразмерные числа подобия, появившиеся в качестве параметров в этих уравнениях, должны нести физическую смысловую нагрузку. Если проанализировать их физический смысл, можно заключить, что множитель $\frac{1}{\mathrm{Re}}$ в правой части перед безразмерной величиной, описывающей действие сил вязкого трения, в знаменателе должен иметь величину, по физическому смыслу пропорциональную потоку импульса, а в числителе — пропорциональную силам вязкого трения, поскольку в левой части — именно поток импульса остается без коэффициента. Иначе говоря, на характерную величину потока импульса мы делим все члены уравнения при обезразмеривании. Таким образом, число Рейнольдса должно иметь физический смысл, сформулированный в настоящей работе. Аналогично обосновывается физический смысл других чисел подобия.

Предлагаемая интерпретация и ее обоснование имеют как познавательную ценность, так, возможно, и практическую, поскольку дают наглядные, непротиворечивые представления. Особое внимание этому вопросу следует уделять в технических вузах, основной задачей которых является научить студентов мыслить на научном уровне.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зиновьев А.А. *Логический интеллект*. Москва, Изд-во Моск. гуманит. ун-та, 2005, 284 с.

[2] Зиновьев А.А. *Очерки комплексной логики*. Москва, Эдиториал УРСС, 2000, 560 с.

[3] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика, ч. 2*. Москва, Физматгиз, 1963, 728 с.

[4] Милн-Томсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика*. Москва, Мир, 1964, 655 с.

[5] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. Москва, Наука, 1970, 904 с.

[6] Башта Т.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б., Байбаков О.В., Кирилловский Ю.Л. *Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы*. Москва, Машиностроение, 1970, 504 с.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Макаров К.А. О физическом смысле числа Рейнольдса и других критериев гидродинамического подобия. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1185.html

Макаров Константин Анатольевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Гидромеханика, гидромашины и пневмогидроавтоматика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kmakarov@list.ru