УДК 539.3

Моделирование структурных технологических напряжений в волокнистых композиционных материалах

© С.Л. Косачёв

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Представлен аналитический метод расчета структурных технологических остаточных напряжений в волокнистом композиционном материале (ВКМ), основанный на использовании модели регулярно армированного ВКМ, геометрия и напряженное состояние которого полностью определяются микроструктурой фундаментальной ячейки. Приведены результаты расчетов для стеклопластика с гексагональной решеткой по предложенной методике.

Ключевые слова: *композиционный материал, прочность, остаточные напряжения, периодические структуры*.

Постановка задачи. В качестве модели ВКМ примем некоторую трехмерную изотропную кусочно-однородную среду, упругие и геометрические свойства которой неизменны в направлении x_3 и имеют двоякопериодический характер в плоскости x_1x_2 (рис. 1). Будем полагать, что в среде реализуется такое напряженно-деформированное состояние, при котором компонента деформации e_{33} не зависит от всех координат, а остальные компоненты деформации — от координаты x_3.

Поскольку напряженно-деформированное состояние слоя ВКМ является двоякопериодическим, то достаточно рассмотреть периодический элемент структуры в виде параллелограмма периодов (фундаментальная ячейка). Пусть ω_1 и ω_2 — основные периоды структуры. Внутри параллелограмма периодов $P_{m,n}$ ($m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) со-

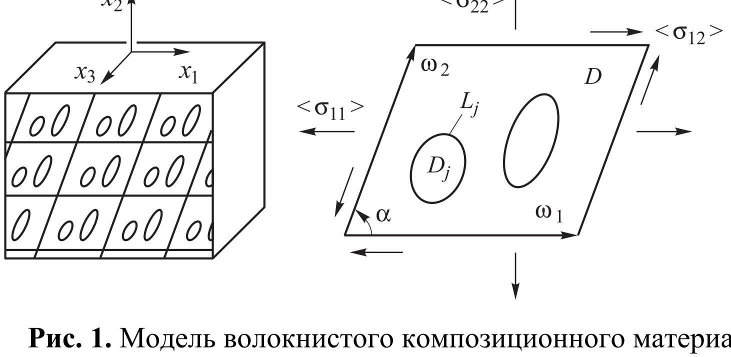

Рис. 1. Модель волокнистого композиционного материала

держится k непересекающихся включений (волокон), ограниченных контурами L_j. Конечные односвязные области, ограниченные контурами L_j, обозначим через D_j, упругие постоянные среды в областях D_j (волокна) и D (матрица) — через E_j, ν_j и E, ν соответственно.

Предположим, волокна посажены в матрицу с некоторым известным натягом h_j в плоскости x_1x_2 и упругое взаимодействие матрицы и волокон идеально, что означает непрерывность векторов напряжений и перемещений (с учетом натяга) при переходе через L_j.

Сведение задачи к системе интегральных уравнений. Пусть в области D справедлив закон Гука, тогда

$$e_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}),\ e_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}),\ e_{12} = \frac{1}{\mu}\sigma_{12}. \tag{1}$$

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \tag{2}$$

Уравнения совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{3}$$

Если ввести в рассмотрение функцию напряжений (функцию Эри) по формулам

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}; \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}; \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{4}$$

то соотношения (1) и (3) приводят к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2\nabla^2 U(x_1, x_2) = 0, \tag{5}$$

при этом уравнения равновесия удовлетворяются автоматически. Таким образом, функция Эри является бигармонической. Если ввести в рассмотрение комплексную переменную $z = x_1 + ix_2$, то любую бигармоническую функцию можно выразить через две произвольные аналитические в области D функции (потенциалы) $\varphi(z)$, $\psi(z)$ по формуле Гурса [1]. Тогда напряжения и перемещения, действующие в среде, запишутся в виде

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}=4\operatorname{Re}\Phi(z),\ \sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12}=2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)],$$
$$\sigma_{33}=2\mu(1+\nu)e_{33}+4\nu\operatorname{Re}\Phi(z), \tag{6}$$
$$2\mu(u_1+iu_2)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\Phi(z)}-\overline{\psi(z)},$$

где $\Psi(z)=\psi'(z), \Phi(z)=\varphi'(z),\ \ \kappa=3-4\nu.$ Черта над функцией означает комплексно сопряженную функцию.

Рассмотрим поля напряжений, обладающие той же группой симметрии, что и область *D*. В этом случае напряжения в *D* должны иметь двоякопериодическую структуру. Тогда постановку задачи о плоской деформации композиционного материала можно сформулировать следующим образом. Определить функции $\varphi(z),\psi(z)$ и $\varphi_j(z),\psi_j(z)$, регулярные, соответственно, в областях *D*, D_j (j = 1, 2, ..., k) и удовлетворяющие на границе раздела $L=\bigcup L_j$ следующим условиям сопряжения матрицы и волокон:

- непрерывность вектора напряжений

$$\varphi(t)+t\bar{\Phi}(t)+\bar{\psi}(t)=\varphi_j(t)+t\bar{\Phi}_j(t)+\bar{\psi}_j(t); \tag{7}$$

- непрерывность (с учетом натяга) вектора перемещений

$$\frac{1}{\mu}\left[\kappa\varphi(t)-t\bar{\Phi}(t)-\bar{\psi}(t)\right]=\frac{1}{\mu_j}\left[\kappa_j\varphi_j(t)-t\bar{\Phi}_j(t)-\bar{\psi}_j(t)\right]+2h_j(t), \tag{8}$$

где $t\in L_j,\ \ \Phi(z)=\dfrac{d\varphi(z)}{dz},\ \ \mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)},\ \ \mu_j=\dfrac{E_j}{2(1+\nu_j)},\ \ \kappa=\dfrac{3-\nu}{1+\nu},$

$\kappa_j=\dfrac{3-\nu_j}{1+\nu_j}.$

При этом подразумевается, что все условия периодичности выполнены автоматически за счет специального вида представлений искомых регулярных функций. Как показано в [2], искомые функции $\varphi(t),\psi(t)$ можно выразить через две неизвестные комплексные функции (плотности) $p(t)$ и $q(t)$, причем таким образом, что для определения $p(t)$ и $q(t)$ получается эквивалентная исходной краевой задаче система интегральных уравнений. Подставив выражения для $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в условия сопряжения (7) и (8), получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned}&p(t_0)-M_j(p(t),q(t),t_0)=R_j(t_0),\\&q(t_0)-N_j(p(t),q(t),t_0)=Q_j(t_0).\end{aligned} \tag{9}$$

Решив систему (9), получим значения плотностей $p(t)$, $q(t)$ на контуре L. После этого вычисляются производные от комплексных потенциалов, а затем и напряжения на границе раздела компонентов по формулам [2]

$$\begin{aligned} \sigma_r(t) &= \mathrm{Re}[2\Phi(t) - \bar{t}\,\Phi'(t) - \Psi(t)], \\ \sigma_\theta(t) &= \mathrm{Re}[2\Phi(t) + \bar{t}\,\Phi'(t) + \Psi(t)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Учет остаточных напряжений. Гетерогенная структура ВКМ в силовых конструкциях обычно формируется в условиях повышенных температур (160...180 °С) с последующим охлаждением до окружающей комнатной температуры, что обеспечивает достижение наиболее высоких механических свойств. Процесс охлаждения сопровождается температурными деформациями компонент КМ, а поскольку термоупругие свойства волокон и матрицы различны, возникает их стесненная температурная деформация, пропорциональная разности коэффициентов температурного расширения и температурному интервалу режима охлаждения. Разделение главных действующих напряжений в поперечном срезе, проведенное по результатам поляризационно-оптических измерений, показало, что в плоскости, перпендикулярной направлению армирования, действуют радиальные остаточные напряжения сжатия $\sigma_r^{\text{ост}}$ и тангенциальные напряжения растяжения $\sigma_\theta^{\text{ост}}$, достигающие своих наибольших значений на поверхности раздела.

Для аналитического расчета остаточных напряжений в одноосно армированном композите используется экспериментально установленная термоупругая аналогия [3], в соответствии с которой остаточные напряжения считаются термоупругими, пропорциональными разности коэффициентов температурного расширения матрицы и армирующих волокон и разности температур ΔT при охлаждении композита.

Стесненные температурные перемещения армирующих волокон и матрицы могут быть определены из уравнений [4]:

$$\begin{aligned} & U + iV = t(\alpha - \alpha_{2j})\Delta T, \\ & W = t(\alpha - \alpha_{1j})\Delta T, \\ & t \in L. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь α_{1j} и α_{2j} — коэффициенты температурного расширения вдоль и поперек j-го волокна соответственно, α — коэффициент температурного расширения матрицы. Осевые остаточные напряжения

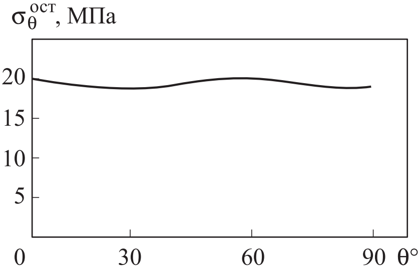

Рис. 2. Распределение тангенциальных остаточных напряжений

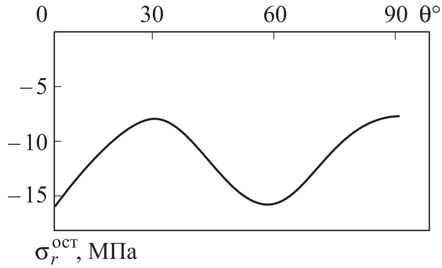

Рис. 3. Распределение радиальных остаточных напряжений

$\sigma_3^{\text{ост}}$ образуются вследствие различия коэффициентов Пуассона для волокон и матрицы.

Напряжения $\sigma_1^{\text{ост}}$ и $\sigma_2^{\text{ост}}$, действующие в поперечных сечениях, находятся из решения задачи о плоской деформации композита (9) при следующем нагружении:

$$\langle\sigma_{11}\rangle = \langle\sigma_{22}\rangle = \langle\sigma_{12}\rangle = 0,\ h_j \neq 0, \tag{12}$$

где h_j — поперечный натяг волокна, вызванный температурными деформациями матрицы и волокна. Его можно определить из уравнения

$$h_j(t) = t\Delta T[(\alpha - \alpha_{2j}) + (\alpha - \alpha_{1j})(\nu - \nu_j)]. \tag{13}$$

В отличие от полученных ранее решений, здесь учитываются поперечные деформации не только матрицы, но и волокон, т. е. определяются напряжения как в областях, занимаемых волокнами, так и в области, занимаемой матрицей.

Результаты расчета. По предложенной методике проведены расчеты для различных типов решеток, температурных интервалов и степеней армирования ВКМ. На графиках (рис. 2, 3) представлено распределение остаточных напряжений для стеклопластика вдоль границы раздела матрица — волокно, где они достигают максимальных значений, для гексагональной решетки ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{i\pi/3}$), имеющей в узлах включения радиусом $R = 0{,}75$, $\Delta T = -120°\text{C}$.

Для выявления влияния на уровень начального напряженного состояния степени армирования и температуры отверждения построены графики распределения относительных эквивалентных остаточных напряжений для стеклопластика (рис. 4), рассчитанные по тензорно-инвариантному критерию прочности Гольденблата — Копнова.

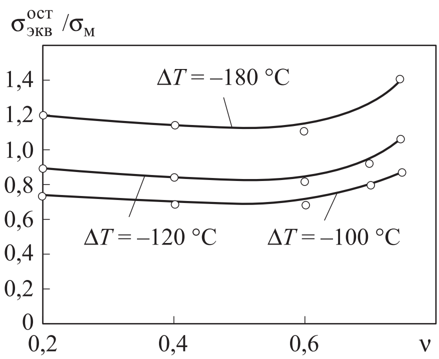

Рис. 4. Распределение относительных эквивалентных остаточных напряжений

Как видно на графиках, при высоких степенях армирования и температурах разрушение матрицы может наступать еще на этапе изготовления материала без приложения внешней нагрузки. Кроме того, установлена некоторая оптимальная степень армирования, соответствующая $\nu \approx 0{,}6$, при которой остаточные напряжения являются минимальными для различных температур отверждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Москва, Наука, 1966, 708 с.

[2] Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. *Периодические кусочно-однородные упругие структуры.* Москва, Наука, 1992, 287 с.

[3] Молодцов Г.А. *Напряженные элементы конструкций ЛА из композиционных материалов.* Москва, Машиностроение, 1993, 224 с.

[4] Косачёв С.Л. Структурные остаточные напряжения в гибридных волокнистых композиционных материалах. *Материалы международного научного семинара «Технологические проблемы прочности».* Подольск, 2004, с. 193–198.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Косачёв С.Л. Моделирование структурных технологических напряжений в волокнистых композиционных материалах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1. URL: http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1182.html

Косачёв Сергей Леонидович родился в 1972 г., окончил Московский авиационный институт в 1995 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики им. Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов: механика и прочность композиционных материалов. e-mail: vector_sk@maiL.ru