УДК 517.929.4

Об альтернативном способе вывода матричного неравенства Разумихина

© А.В. Горбунов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматривается способ вывода достаточного условия асимптотической устойчивости для линейной системы с запаздыванием, не использующий классические теоремы Красовского и Разумихина об асимптотической устойчивости. В основу подхода положена оценка решений одного скалярного дифференциального неравенства, записанная для значений положительно определенной квадратичной функции на траекториях рассматриваемой системы. Найденное таким способом условие асимптотической устойчивости линейной системы с запаздыванием совпадает с известным ранее условием, являющимся следствием теоремы Разумихина об асимптотической устойчивости.

Ключевые слова: *линейная система с запаздыванием, условия асимптотической устойчивости, теорема Разумихина.*

Введение. Известно [1], что для асимптотической устойчивости положения равновесия системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \qquad x \in R^n, \quad A, B \in R^{n\times n}, \quad h > 0 \tag{1}$$

достаточно, чтобы существовала матрица $P = P^{\mathrm{т}} > 0$ и скаляр $\beta \ge 0$ такие, что выполняется матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{т}}P + PA + \beta P & PB \\ B^{\mathrm{т}}P & -\beta P \end{pmatrix} < 0. \tag{2}$$

Здесь и далее символы «$<$» и «$\le$» обозначают отношение порядка на множестве симметрических матриц, причем $P < Q$, если $x^{\mathrm{т}}Px < x^{\mathrm{т}}Qx$ для всех $x \ne 0$, $x \in R^n$, а $P \le Q$ — если $x^{\mathrm{т}}Px \le x^{\mathrm{т}}Qx$ для всех $x \in R^n$. Смысл символов «$>$» и «$\ge$» определен аналогично.

Неравенство (2) получено в [1] на основе условия теоремы Разумихина об асимптотической устойчивости [2–4] для системы (1), в котором в качестве функции Ляпунова использована функция $v(x) = x^{\mathrm{т}}Px$. Отметим, что для рассматриваемой линейной автономной системы (1) свойства асимптотической, равномерной асимптотической и экспоненциальной устойчивостей совпадают, поэтому условие (2) является также достаточным условием экспоненциальной устойчивости для системы (1).

Тем не менее в общем случае теорема Разумихина не дает количественных оценок для динамики значения $v(x(t))$ функции Ляпунова. Поэтому при использовании ее для нелинейной системы доказательство свойства экспоненциальной устойчивости уже может быть существенно затруднено. Отсутствие величины запаздывания h в условии теоремы Разумихина практически исключает возможность ее применения для оценки «скорости» переходных процессов в системе (1). В этой связи интерес представляют методы, дающие возможность доказательства экспоненциальной устойчивости и оценки параметров переходных процессов в системе (1). В частности, в настоящей работе для этого использован подход, основанный на следующей лемме [5, 6].

Лемма 1. Пусть $v(t) \geq 0$ непрерывна на отрезке $[t_0 - h, T]$. При $t \in [t_0, T]$ функция $v(t)$ непрерывно дифференцируемая и удовлетворяет неравенству

$$\dot{v}(t) \leq -\alpha v(t) + \beta \| v_t(\cdot) \|_h,$$

где $v_t(\theta) = v(t+\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, $\| v_t(\cdot) \|_h = \max\limits_{\theta \in [-h,0]} | v(t-\theta) |$; α и β — постоянные, удовлетворяющие неравенству $0 \leq \beta < \alpha$. Тогда

$$v(t) \leq \| v_{t_0}(\cdot) \|_h \, e^{-\lambda(t-t_0)},$$

где $v_{t_0}(\theta) = v(t_0 + \theta)$; λ — единственный положительный корень уравнения

$$\lambda = \alpha - \beta e^{\lambda h}.$$

Пример использования леммы 1 для оценки степени затухания и перерегулирования в системе (1) рассматривается в [7].

Основной результат. Проиллюстрируем предлагаемый подход на примере доказательства следующего утверждения [1].

Теорема 1. Пусть существуют $P > 0$, $0 \leq \beta$ такие, что выполнено матричное неравенство (2). Тогда нулевое решение уравнения (1) экспоненциально устойчиво.

Покажем вначале, что из справедливости матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} P + PA + \beta P & PB \\ B^{\mathrm{T}} P & -\beta P \end{pmatrix} < 0$$

для некоторых $P > 0$ и $0 \le \beta$ следует существование $\alpha > \beta$, для которого верно матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + \alpha P & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -\beta P \end{pmatrix} < 0. \qquad (3)$$

Для краткости будем использовать обозначения

$$M = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + \beta P & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -\beta P \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} P & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_{\max}(M)$, $\lambda_{\max}(N)$ и $\lambda_{\max}(P)$ — наибольшие собственные значения матриц M, N и P соответственно. Тогда [8, 9]

$$M \le \lambda_{\max}(M)E$$

и

$$N \le \lambda_{\max}(N)E,$$

где $E \in R^{n\times n}$ — единичная матрица.

Отметим, что $\lambda_{\max}(M) < 0$ и $\lambda_{\max}(N) = \lambda_{\max}(P) > 0$. Поэтому

$$M + \tau N \le (\lambda_{\max}(M) + \tau\lambda_{\max}(P))E,$$

где $\tau > 0$ — скаляр. Полагая

$$\tau = -\frac{\lambda_{\max}(M)}{\lambda_{\max}(P)} > 0,$$

имеем $M + \tau N \le 0$, т. е.

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + (\beta + \tau)P & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -\beta P \end{pmatrix} \le 0.$$

Положив $\alpha = \beta + \tau$, получим требуемое неравенство (3).

Вследствие неравенства (3) для любых $x(t), x(t-h) \in R^n$ верно

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA + \alpha P & PB \\ B^{\mathrm{T}}P & -\beta P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{pmatrix} =$$
$$= x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}P + PA)x(t) + x^{\mathrm{T}}(t-h)B^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)PBx(t-h) +$$
$$+\alpha x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) - \beta x^{\mathrm{T}}(t-h)Px(t-h) \le 0. \qquad (4)$$

Пусть $v(t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$, тогда

$$\dot{v}(t) = x^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)PAx(t) + x^{\mathrm{T}}(t-h)B^{\mathrm{T}}Px(t) + x^{\mathrm{T}}(t)PBx(t-h),$$

а неравенство (4) примет вид

$$\dot{v}(t) + \alpha v(t) - \beta v(t-h) \le 0. \qquad (5)$$

Поскольку $v(t-h) \le \max\limits_{\theta\in[-h,0]} | v(t-\theta) | = \| v_t(\cdot) \|_h$, то из (5) следует, что

$$\dot{v}(t) \le -\alpha v(t) + \beta \| v_t(\cdot) \|_h \, .$$

По лемме 1

$$v(t) \le \| v_{t_0}(\cdot) \|_h \, e^{-\lambda(t-t_0)},$$

где $\lambda > 0$ — корень уравнения $\lambda = \alpha - \beta e^{\lambda h}$.

В силу соотношения Рэлея

$$\lambda_{\min}(P) \| x(t) \|^2 \le v(t) \le \lambda_{\max}(P) \| x(t) \|^2, \| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k}\, ,$$

для $x(t)$ действует оценка

$$\| x(t) \| \le \sqrt{\frac{v(t)}{\lambda_{\min}(P)}} \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \| x_{t_0}(\cdot) \|_h \, e^{-\frac{\lambda(t-t_0)}{2}},$$

где $\| x_{t_0}(\cdot) \|_h = \max\limits_{\theta\in[-h,0]} \| x(t_0 - \theta) \|$.

Поэтому нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво. Теорема 1 доказана.

Заключение. Рассматривается способ получения условий асимптотической устойчивости для систем с запаздыванием, не использующий классические теоремы Красовского и Разумихина об асимптотической устойчивости. Предлагаемый метод проиллюстрирован на примере вывода условия асимптотической устойчивости для линейной системы с запаздыванием. Доказанное в работе условие ранее получено в [1] как следствие теоремы Разумихина об асимптотической устойчивости [2–4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 13-07-00743 и 13-07-00736) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-3659.2012.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. *Stability of time-delay systems.* Boston: Birkhauser, 2003.

[2] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* Москва, Мир, 1984, 424 с.

[3] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием. *Прикладная математика и механика*, 1956, т. XX, вып. 4, с. 500–512.

[4] Разумихин Б.С. *Устойчивость эредитарных систем*. Москва, Наука, 1988, 108 с.

[5] Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.* Москва, Наука, 1981, 448 с.

[6] Halanay A. *Differential equations: stability, oscillations, time lags.* New York — London: Academic Press, 1966, 528 p.

[7] Горбунов А.В. Оценка степени затухания и перерегулирования в линейной системе с запаздыванием. *Наука и образование: Электронное научно-техническое издание*, 2013, № 11, DOI: 10.7463/1113.0622917.

[8] Boyd S.P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. *Linear matrix inequalities in system and control theory.* Philadelphia: SIAM, 1994, 206 p.

[9] Баландин Д.В., Коган М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*. Москва, Наука, 2006, 280 с.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Горбунов А.В. Об альтернативном способе вывода матричного неравенства Разумихина. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1.
URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1179.html

Горбунов Артур Валерьевич родился в 1977 г., окончил факультет «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана, научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. Область научных интересов: теория устойчивости движения. e-mail: hatter@yandex.ru