УДК 531.8/534

Исследование вынужденных колебаний с возмущением инерционного типа

© В.В. Дубинин, В.В. Витушкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Представлен метод моделирования колебаний различных механических систем с инерционным возмущением с использованием лабораторной установки. Приведено описание конструкции и работы этой установки, методики проведения исследований колебаний и построения расчетных и экспериментальных амплитудно-частотных (АЧХ) и фазочастотных (ФЧХ) характеристик. Показано, что в силу подобия дифференциальных уравнений движения различных реальных промышленных объектов и данной экспериментальной установки, возможно применение последней для моделирования процессов колебаний указанных объектов. Приведены параметры подобия, позволяющие осуществлять такое моделирование и получать АЧХ и ФЧХ различных промышленных устройств.

Ключевые слова: *механические системы, инерционное возмущение, колебания систем, частотные характеристики, лабораторная установка, моделирование колебаний, параметры подобия.*

В течение ряда лет на кафедре теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана успешно развивается направление создания автоматизированных лабораторных комплексов различного типа механических систем для научной работы и учебного процесса по основным разделам механики [1, 2].

На практике часто встречаются процессы, в которых возникают колебания систем с инерционным возмущением. В данной работе представлена физическая установка, на которой моделируется такой реальный физический процесс. Она входит в лабораторный исследовательский комплекс, который можно использовать также и в учебном процессе для исследований линейной модели вынужденных колебаний механической системы. Этот комплекс включает в себя собственно электромеханическую установку с блоком управления, аналого-цифровой преобразователь (АЦП), ПЭВМ и программно-методическое обеспечение.

Электромеханическая лабораторная установка (рис. 1, *а*) представляет собой механическую систему, состоящую из основания *1* с направляющими *2*, в которых с возможностью продольного перемещения установлена каретка *3* с колесами *4*. На каретке смонтирован механизм возбуждения ее колебаний, состоящий из электродвигателя *5*, редуктора *6*, маятника *12* и шарнирного механизма, включающего в себя закрепленный на выходном валу редуктора кривошип *7* с регулируемым эксцентриситетом и шток *8*. Маятник шарнирно установлен на стойке *11*, закрепленной на основании, и снабжен грузом *13* и рычагом *9*, шарнирно соединенным со штоком *8*. При этом груз можно закреплять на стержне маятника на различных расстояниях от его оси вращения. Маятник совершает вынужденные колебания в соответствии с законом, близким к синусоидальному. Эти колебания обеспечивают формирование возмущающего воздействия на каретку, которая соединена с основанием пружинами *15* и на которой установлены также дополнительные сменные грузы *14*. Устройство снабжено потенциометрическим датчиком *10* угла поворота маятника, индуктивным датчиком *18* продольных перемещений каретки, блоком *16* электропитания электродвигателя и датчиков и ПЭВМ *17*. При этом датчик *18* выполнен в виде катушки, установленной на основании *1*, и ферромагнитного стержня *19*, закрепленного на каретке. Сменные пружины *15* и грузы *14* позволяют изменять жесткостные и инерционные свойства системы, получать и исследовать различные амплитудно-частотные (АЧХ) и фазочастотные (ФЧХ) характеристики вынужденных колебаний каретки.

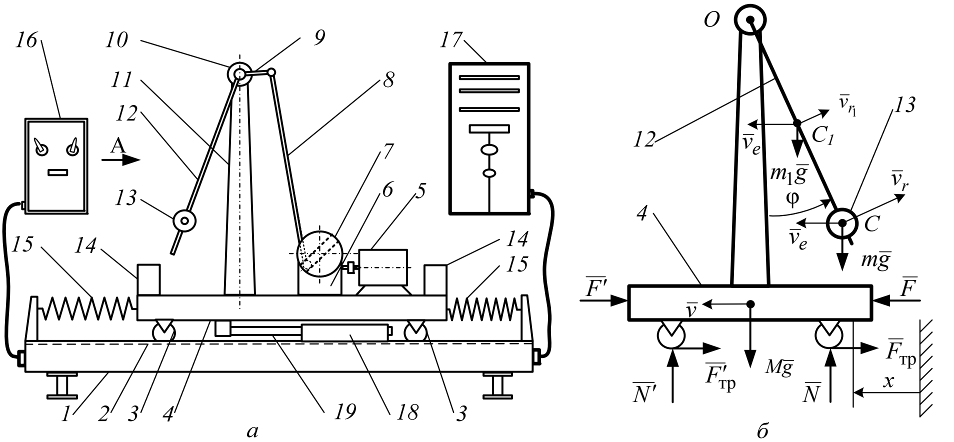


Рис. 1. Схемы электромеханической установки:
а — конструктивная; *б* — расчетная

Для вынужденных колебаний каретки, вызванных возмущением инерционного типа, при изменении частоты вынужденных колебаний строят теоретические кривые АЧХ и ФЧХ. Вычисление амплитуды и разности фаз осуществляют на основе анализа сигналов, снимаемых с датчиков угла отклонения маятника и линейного перемещения каретки, т. е. сигналов возмущения и вынужденных колебаний. Запись сигналов и их обработку, получение параметров вынужденных колебаний тележки проводят с помощью ПЭВМ. Программное обеспечение рассматриваемого комплекса реализовано как в оригинальном исполнении, так и в среде системы LabView 7.0.

Рассмотрим линеаризованную математическую модель движения каретки. На расчетной схеме установки (рис. 1, *б*) длина стержня *15* маятника равна l_1, $OC = l$, масса каретки равна M, массу m груза *13* считаем сосредоточенной в точке C, масса стержня *12* равна m_1. Колеса *3* совершают плоское движение, но в силу их малой массы будем учитывать ее в общей массе каретки M при прямолинейном поступательном движении последней. Система имеет две степени свободы, обобщенные координаты: x — линейное перемещение каретки и φ — угловое отклонение маятника. Изменение координаты φ задано, а уравнение $x = x(t)$ необходимо определить. Примем, что колеса катятся без скольжения, поэтому работа на перемещениях точек приложения сил $\bar{N}, \bar{N}', \bar{F}_{\text{тр}}, \bar{F}'_{\text{тр}}$ равна нулю.

Для составления дифференциального уравнения движения каретки используем уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \tag{1}$$

где $T = \dfrac{Mv^2}{2} + \dfrac{mv_C^2}{2} + \dfrac{J_{C_1z}\dot{\varphi}^2}{2} + \dfrac{m_1 v_{C_1}^2}{2}$ — кинетическая энергия;

$$v = \left|\bar{v}\right| = \dot{x},\ \ \bar{v}_C = \bar{v}_r + \bar{v}_e,\ \ \bar{v}_{C_1} = \bar{v}_{e_1} + \bar{v}_{r_1},\ \ v_r = OC\dot{\varphi} = l\dot{\varphi},\ \bar{v}_e = \bar{v}_{e_1} = \bar{v},$$

$$v_{r_1\tau} = \frac{l_1}{2}\dot{\varphi},\ \ J_{C_1z} = m_1 l^2 / 12,$$

$$v_C^2 = \left(\bar{v}_e + \bar{v}_r\right)^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2\,\dot{x}\,l\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi,$$

$$v_{C_1}^2 = \left(\bar{v}_{e_1} + \bar{v}_{r_1}\right)^2 = \dot{x}^2 + \frac{l_1^2}{4}\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}\frac{l_1}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

и окончательно —

$$T = \frac{\left(M + m + m_1\right)\dot{x}^2}{2} - \left(m + \frac{m_1}{2}\frac{l_1}{1}\right)\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi + \left(ml^2 + J_{C_1z} + m_1\frac{l_1^2}{4}\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Обобщенная сила

$$Q_x = \frac{\left[-c\left(x_0 + x\right) - c\left(x - x_0\right) - \mu\dot{x}\right]\delta x}{\delta x} = -2cx - \mu\dot{x},$$

где x_0 и c — начальная деформация и жесткость пружин; μ — коэффициент вязкого трения.

С учетом выражений для T и Q_x уравнение Лагранжа 2-го рода принимает вид

$$\left(M+m+m_1\right)\ddot{x}+\mu\dot{x}+2cx=\left(m+\frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right)l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).$$

В правой части уравнения находится нелинейная обобщенная возмущающая сила (здесь слагаемое $\dot{\varphi}^2\sin\varphi$ — величина третьего порядка малости). Угол φ задан принудительно: $\varphi=\varphi_0\sin\left(\omega t+\delta\right)$, где φ_0 и ω — соответственно амплитуда и частота кинематического параметра возмущения φ. В силу предположения о том, что φ — малая величина, линейное дифференциальное уравнение движения системы можно записать как

$$\left(M+m+m_1\right)\ddot{x}+\mu\dot{x}+2cx=\left(m+\frac{m_1}{2}\frac{l_1}{1}\right)l\ddot{\varphi}=-\left(m+\frac{m_1}{2}\frac{l_1}{1}\right)l\varphi_0\omega^2\sin(\omega t+\delta)$$

или

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+K^2x=-h\sin\left(\omega t+\delta\right). \qquad (2)$$

Здесь $K=\sqrt{\dfrac{2c}{M+m+m_1}}$, $\quad 2n=\dfrac{\mu}{M+m+m_1}$, $\quad h=\dfrac{\left(m+\dfrac{m_1}{2}\dfrac{l_1}{l}\right)l\varphi_0\omega^2}{M+m+m_1}$.

Интерес представляют вынужденные колебания каретки (системы). Найдем решение уравнения (2) в виде $x_{\text{в}}=a_{\text{в}}\sin\left(\omega t+\delta-\varepsilon\right)$, где амплитуда вынужденных колебаний определяется соотношением $-a_{\text{в}}\omega^2+a_{\text{в}}K^2=-h$ и, следовательно,

$$a_{\text{в}}=\frac{\left(m+\dfrac{m_1}{2}\dfrac{l_1}{l}\right)l\varphi_0\omega^2}{\left(M+m+m_1\right)\sqrt{\left(K^2-\omega^2\right)^2+4n^2\omega^2}},$$

$$\lambda=\frac{a_{\text{в}}}{l\varphi_0}=\frac{m+\dfrac{m_1}{2}\dfrac{l_1}{l}}{M+m+m_1}\quad\frac{Z^2}{\sqrt{\left(1-Z^2\right)^2+Z^2/Q^2}},$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\left[\frac{Z}{Q(1-Z^2)}\right], \qquad (3)$$

где $Z = \omega/K$ — коэффициент расстройки; λ — коэффициент динамичности; $Q = K/2n$ — добротность системы.

Для определения параметров n, K, Q регистрируем собственные затухающие колебания системы (рис. 2, *а*). Определяем круговую частоту затухающих колебаний $K_1 = 2\pi / T_1$, круговую частоту свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления — $K = \sqrt{K_1^2 + n^2}$ (здесь T_1 — условный период затухающих колебаний системы), а также декремент и логарифмический декремент колебаний

$$D = q_i / q_{i+1} = e^{nT_1}, \text{ и } \ln D = \ln\frac{q_i}{q_{i+1}} = nT_1,$$

откуда находим $n = \ln D/T_1$ и $Q = K/2n$.

С использованием полученных таким образом данных строим по формулам (3) теоретические кривые $\lambda = \lambda(Z)$ и $\varepsilon = \varepsilon(Z)$.

Затем включаем электродвигатель и, постепенно увеличивая частоту возмущения маятника ω, регистрируем частоту вынужденных колебаний и соответствующее ей значение максимального отклонения каретки от положения равновесия $\left(\omega_i, x_{m_i}\right)$ (рис. 2, *б*).

На рис. 3 представлены теоретические АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний каретки, рассчитанные по формулам (3), а экспериментальные значения приведены в виде совокупности точек, образующих размытые линии.

Результаты экспериментов подтверждают допустимость применения линейной модели для анализа работы лабораторной установки.

Обобщим типовые схемы таких реальных механических объектов, в которых имеется инерционное возмущение (рис. 4).

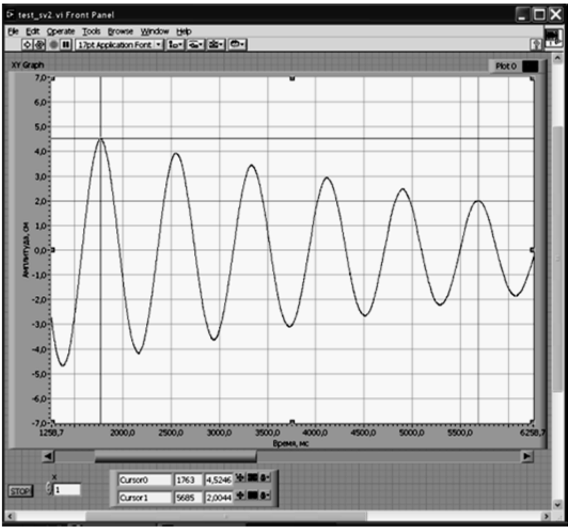
Применяя уравнение Лагранжа 2-го рода (1), для приведенных на рис. 4, *а*−*г* схем механических систем (диски — однородные, качение — без скольжения) и без учета сопротивления имеем, соответственно, следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\ddot{x} + K^2 x = h\sin\left(\omega t + \delta\right), \; h = s_0\omega^2, \; K^2 = \frac{c}{m};$$

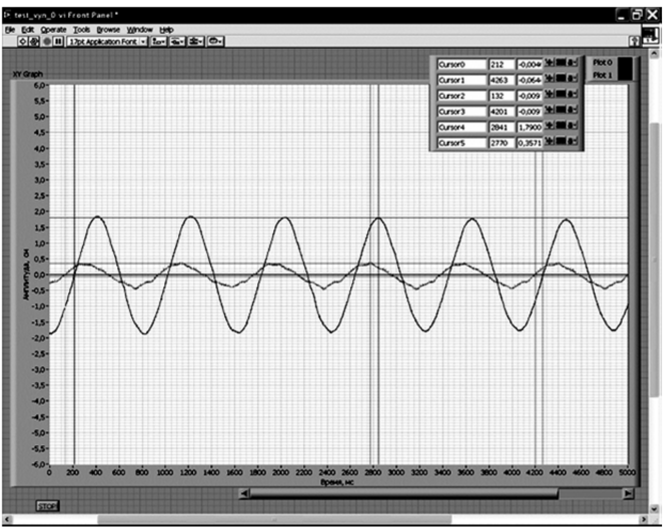
$$\ddot{x} + K^2 x = h\sin\left(\omega t + \delta\right), \; K^2 = \frac{c}{m + m_1/2}, \; h = \frac{m}{m + m_1/2} s_0\omega^2;$$

$$\ddot{s} + K^2 s = h \sin\left(\omega t + \delta\right),\ K^2 = \frac{c}{m+M},\ h = \frac{m}{m+M} x_0 \omega^2;$$

$$\ddot{s} + K^2 s = h \cos\left(\omega t + \delta\right),\ K^2 = \frac{c}{M+m},\ h = \frac{m}{M+m} l \omega^2. \qquad (4).$$



а



б

Рис. 2. Фрагменты записи свободных и вынужденных (при ω < *K*) колебаний системы

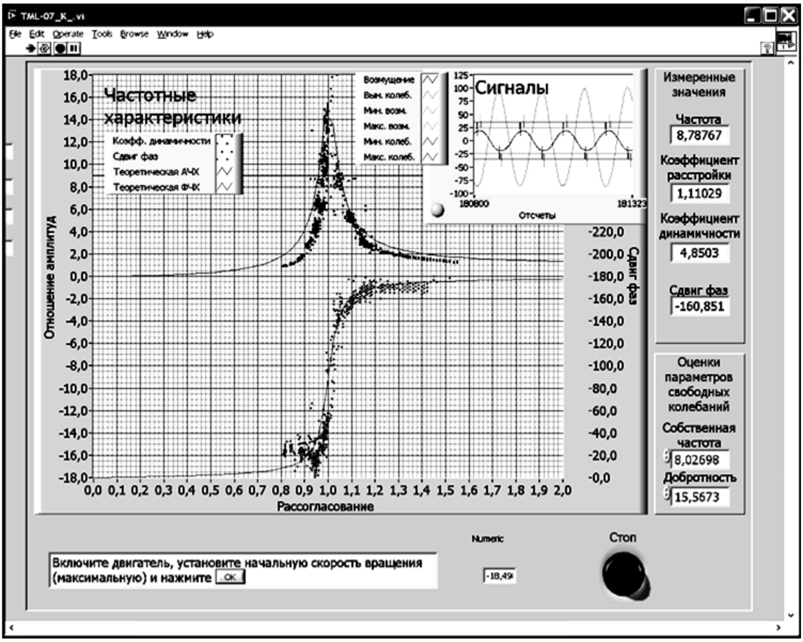


Рис. 3. АЧХ и ФЧХ на экране виртуального прибора

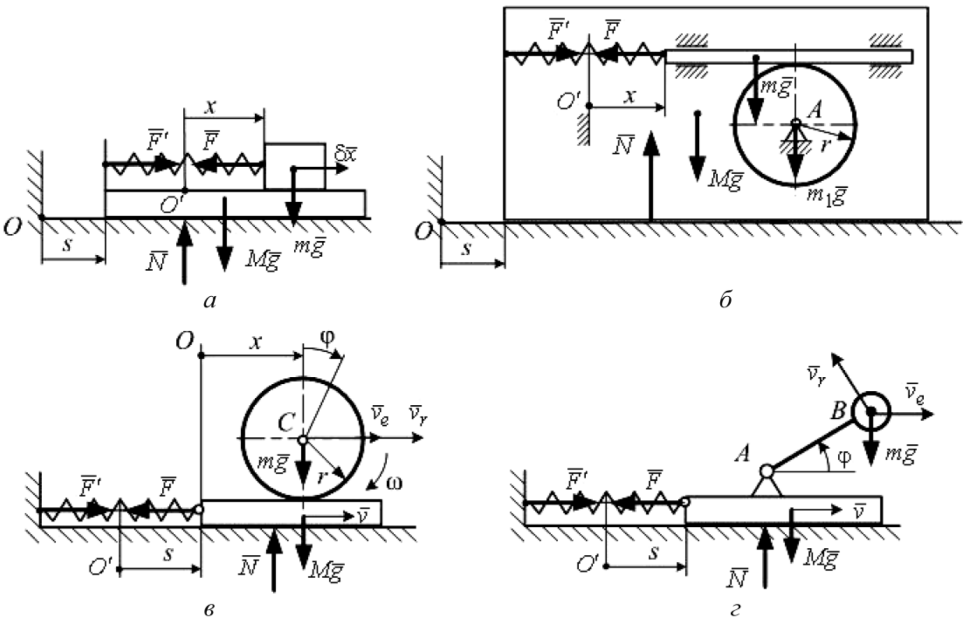


Рис. 4. Типовые схемы реальных механических объектов, заданы:
$s = s_0 \sin(\omega t + \delta)$ (*а*); $s = s_0 \sin\left(\omega t + \delta\right)$ (*б*); $x = x_0 \sin\left(\omega t + \delta\right)$ (*в*);
$\varphi = \omega t,\ \omega = \text{const}$ (*г*)

В силу того, что дифференциальные уравнения (4) аналогичны уравнению (2), созданная установка позволяет получать АЧХ и ФЧХ для реальных установок (натурных объектов) при одинаковых значениях добротности модели и натурного объекта $Q_{\text{м}} = Q_{\text{н}}$.

Рассмотрим вариант рис. 4, *а*. В этом случае коэффициент λ определяется формулой

$$\lambda = \frac{Z^2}{\sqrt{\left(1 - Z^2\right)^2 + Z^2 / Q^2}}.$$

где все величины безразмерные, т. е. уже являются инвариантами при моделировании.

При $Z = \dfrac{\omega}{K} = \text{inv} = I_1$, $Q = \dfrac{K}{2n} = \text{inv} = I_2$ коэффициент динамичности

$$\lambda = \text{inv} = I. \tag{5}$$

Это означает, что при выполнении условий для инвариантов I_1, I_2 (коэффициентов подобия) можно получить для любых экспериментов $\lambda_{\text{н}} = \lambda_{\text{м}}$, т. е. предсказать вид зависимости $\lambda\left(Z, Q\right)$ для натурного объекта. Выполняя условия (5), получаем

$$I_1 = \left(\frac{\omega}{K}\right)_{\text{н}} = \left(\frac{\omega}{K}\right)_{\text{м}} \text{ и } I_2 = \left(\frac{K}{n}\right)_{\text{н}} = \left(\frac{K}{n}\right)_{\text{м}}, \tag{6}$$

откуда следует, что необходимо выполнить условия $\dfrac{\omega_{\text{н}}}{\omega_{\text{м}}} = \dfrac{K_{\text{н}}}{K_{\text{м}}} = m_K$ и $\dfrac{n_{\text{н}}}{n_{\text{м}}} = \dfrac{K_{\text{н}}}{K_{\text{м}}} = m_K$ (m_K — масштабный коэффициент). Тогда $Z_{\text{н}} = Z_{\text{м}}$, $Q_{\text{н}} = Q_{\text{м}}$, $\lambda_{\text{н}} = \lambda_{\text{м}}$ и кривые $\lambda(Z, Q)$ для натурного объекта и модели совпадают.

В случае вынужденных колебаний инерционного типа массовый коэффициент в зависимостях $\lambda = \lambda(Z, Q)$ не всегда равен единице, поэтому для него также нужно ввести коэффициент подобия I_3, например, как в данной экспериментальной установке (см. (3)):

$$I_3 = \left(m + \frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right) \Big/ (M + m + m_1)$$

На рис. 5 представлены АЧХ и ФЧХ лабораторной установки и пример моделирования колебаний натурного объекта при $m_k = 1,2$. Безразмерные зависимости $\varepsilon = \varepsilon(Z,Q)$ и $\lambda = \lambda(Z,Q)$ модели и натурного объекта в силу равенства $Q_м = Q_н$ при моделировании совпадают (рис. 5, кривые *1* и *2*), при этом $\omega_н = \omega_м m_K$.

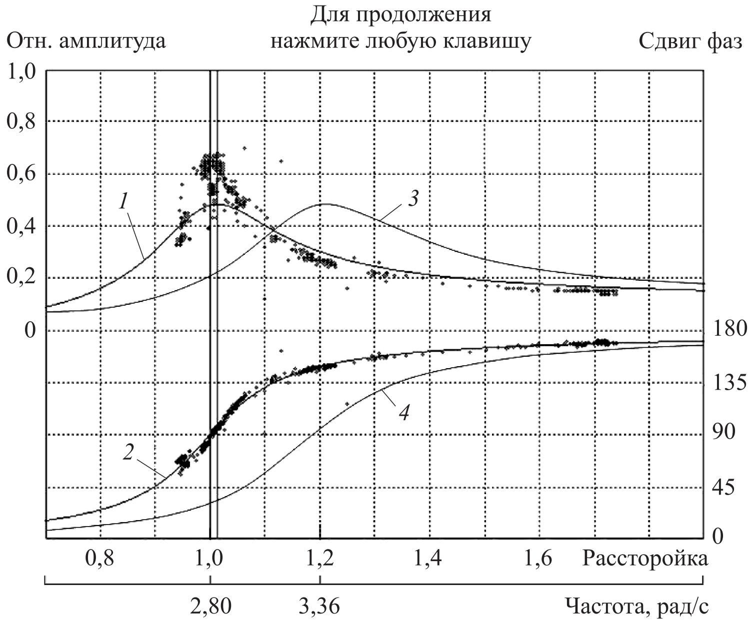


Рис. 5. Построение кривой моделирования

На этом же рисунке построены зависимости $\lambda_н = \lambda_н(\omega)$ и $\varepsilon = \varepsilon(Z,Q)$ для натурного объекта (кривые *3*, *4*), причем в этом случае по оси абсцисс отложены значения ω в рад/с (нижняя ось абсцисс на рисунке). Кривые *3* и *4* смещены вправо по отношению к кривым *1*, *2* и при резонансе $\lambda_н = \lambda_м$, но $\omega_м = K_м \approx 2,8$ рад/с, а $\omega_н = \omega_м \cdot m_K = 2,8 \cdot 1,2 = 3,36$ рад/с.

Таким образом, показано, что в различных промышленных устройствах процессы колебаний при их инерционном возбуждении описываются дифференциальными уравнениями, аналогичными дифференциальным уравнениям движения разработанной экспериментальной установки (модели), что позволяет применять ее для математического и физического моделирования процессов колебаний реальных промышленных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубинин В.В., Жигулевцев Ю.Н., Назаренко Б.П., Ремизов А.В. О внедрении новых информационных технологий в учебный процесс по курсу

«Теоретическая механика». *Научно-методическая конференция, посвященная 35-летию образования факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 20 декабря 1999 г. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999, с. 65–66.

[2] Дубинин В.В., Витушкин В.В., Назаренко Б.П. Современный лабораторный комплекс по теоретической механике. Интеграция образования, науки и производства. *Материалы секционного заседания Международной конференции IX Международного форума «Высокие технологии XXI века»*, 23 апреля 2008 г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, с. 153–156.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубинин В.В., Витушкин В.В. Исследование вынужденных колебаний с возмущением инерционного типа. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1178.html

Дубинин Владимир Валентинович родился в 1937 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1961 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области теоретической и прикладной механики. e-mail: fn3@bmstu.ru

Витушкин Вячеслав Валентинович родился в 1942 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1968 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области прикладной аэрогазодинамики и теоретической механики. e-mail: sovettm@bmstu.ru