УДК 517.977.1

Построение автоматического управления горизонтальным движением вертолета

© Ю.С. Белинская

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассматриваются дифференциально-геометрические подходы к решению задачи терминального управления прямолинейным горизонтальным движением вертолета из одного положения равновесия в другое. Изучается простая, но не плоская динамическая система. С помощью метода симметрий удается снизить количество граничных условий задачи. Упрощенная таким образом задача решается методом накрытий. Управление в данном случае находится среди разрывных функций времени. Результаты численного моделирования демонстрируют эффективность обоих используемых подходов.

Ключевые слова: *конечные симметрии, неплоские системы с управлением, задача терминального управления, метод накрытий.*

Введение. Одной из важнейших задач теории управления является задача терминального управления. Существуют методы ее решения для плоских систем, но общие методы решения для неплоских систем пока неизвестны.

В работе рассматривается задача терминального управления для прямолинейного горизонтального движения вертолета, причем используемая математическая модель движения вертолета является неплоской динамической системой. Для решения задачи используются два подхода. Первый из них основан на конечной симметрии [1], которая преобразует начальные условия в конечные, что позволяет уменьшить количество граничных условий задачи. При этом искомое управление представляет собой разрывную функцию времени.

Второй используемый подход основан на понятии накрытия [1], сюръективно отображающем множество решений первой системы во множество решений второй. Пусть задача терминального управления поставлена для первой системы. Предположим также, что найденное накрытие преобразует конечные условия для этой задачи в некоторые граничные условия для второй системы, а начальные условия не дают никаких ограничений на решения второй системы. Тогда задача терминального управления сводится к двум задачам Коши: к задаче для второй системы с указанными граничными условиями и к задаче для первой системы с учетом найденного решения второй системы с заданными начальными условиями. Результаты работы демонстрируют эффективность обоих подходов.

Рассмотрим горизонтальное движение вертолета [2], задаваемое системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -q\,\mathrm{tg}\,\theta - \dfrac{u_2}{M\cos\theta}, \\ \ddot{\theta} = Lu_2, \end{cases} \tag{1}$$

где x — горизонтальное перемещение вертолета; θ — угол тангажа вертолета; M — общая масса вертолета; $L = l_h / i_{yy}$; l_h — расстояние от втулки несущего винта до центра масс фюзеляжа; i_{yy} — второй диагональный элемент матрицы инерции вертолета; g — ускорение свободного падения.

Ставится следующая задача терминального управления:

$$x(t_1) = x_1,\ \theta(t_1) = 0,\ \dot{x}(t_1) = 0,\ \dot{\theta}(t_1) = 0; \tag{2}$$

$$x(t_2) = x_2,\ \theta(t_2) = 0,\ \dot{x}(t_2) = 0,\ \dot{\theta}(t_2) = 0, \tag{3}$$

где $t_1,\ x_1,\ x_2$ заданы; t_2 произвольно, $t_2 > t_1$. Таким образом, необходимо перевести вертолет из одного положения равновесия в другое.

Построение управления. Для решения этой задачи воспользуемся следующим преобразованием пространства переменных системы:

$$F : (t, x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}, u_2) \mapsto (t_1 + t_2 - t, x_1 + x_2 - x, -\theta, \dot{x}, \dot{\theta}, -u_2). \tag{4}$$

Это преобразование является симметрией задачи терминального управления (1) – (2) – (3), причем при этом преобразовании условия на правом конце отрезка переходят в условия на левом его конце.

Будем искать такое решение задачи (1) – (2) – (3), которое переходит в себя при преобразовании (4).

Искомое решение удовлетворяет условиям

$$x(t_3) = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \theta(t_3) = 0, \tag{5}$$

где $t_3 = (t_1 + t_2)/2$, при этом значения $\dot{x}(t_3)$, $\dot{\theta}(t_3)$ произвольны. Следовательно, с помощью преобразования (4) удалось исходную задачу (1) – (2) – (3) свести к упрощенной задаче (1) – (2) – (5). При этом управление на отрезке $[t_3, t_2]$ выбираем симметрично управлению на отрезке $[t_1, t_3]$.

Обозначим $x_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Для решения упрощенной задачи добавим к системе (1) уравнение

$$D(\psi)=0,\ \psi=(\frac{1}{\dot\theta}D)^2(x)=\frac{\ddot{x}\dot\theta-\dot{x}\ddot\theta}{\dot\theta^3}, \tag{6}$$

где D — производная по t в силу системы; производную x заменяем на правую часть первого уравнения (1). Используем выход

$$z=x-\theta\frac{\dot x}{\dot\theta}+\frac{\theta^2}{2}\psi. \tag{7}$$

На решениях системы (1) – (6) в точках, где $\dot\theta\neq 0$, имеем

$$\dot z=0. \tag{8}$$

Таким образом, функция (7) определяет накрытие из системы (1) – (6) в (8).

Использовать этот выход для решения задачи (1) – (6) – (2) – (5) нельзя, так как выход z не определен в области начальных условий (2). Следовательно, отрезок $[t_1,t_3]$ разбиваем на два отрезка: от t_1 до t_4 и от t_4 до t_3. На первом отрезке необходимо вывести систему из положения равновесия, а затем уже применить метод накрытия.

Для того чтобы на первом этапе вывести систему из положения равновесия, задаем $t_4\in[t_1,t_3]$, $\theta_0<0$, $\dot\theta_0>0$ и находим многочлен $\theta_*(t)$ степени 3, удовлетворяющий условиям

$$\theta_*(t_1)=0,\ \dot\theta_*(t_1)=0,\ \theta_*(t_4)=\theta_0,\ \dot\theta(t_4)=\dot\theta_0,$$

а управление u_2 выбираем как $u_2=\ddot\theta_*(t)/L$ и для системы с таким управлением находим решение $(\theta_*(t),x_*(t))$ задачи Коши. Выход z используем для решения задачи (1) – (6) – (5) с начальными условиями:

$$x(t_4)=x_*(t_4),\ \theta(t_4)=\theta_0,\ \dot x(t_4)=\dot x_*(t_4),\ \dot\theta(t_4)=\dot\theta_0. \tag{9}$$

Из конечных условий (5) следует условие $z(t_3)=x_3$. Из этого условия и из уравнения (8) следует, что $z\equiv x_3$. Вычисляя значение правой части равенства (7) в точке $t=t_4$ с учетом условий (9), находим $\ddot\theta(t_4)$. Добавляя это значение к набору (9), получаем начальные условия для системы (1) – (6). Решаем соответствующую задачу Коши на промежутке $t>t_4$. Находим первый момент времени, когда θ становится равным нулю. Обозначаем его t_3. Получаем решение $(x(t),\theta(t))$ на отрезке $[t_4,t_3]$.

Результаты численного моделирования. Выберем параметры следующим образом:

$$t_4 = 28\ \text{с},\ \theta_0 = -0{,}2,\ \dot{\theta}_0 = 0{,}3.$$

Приведем графики переменных состояния от времени (рис. 1, 2).

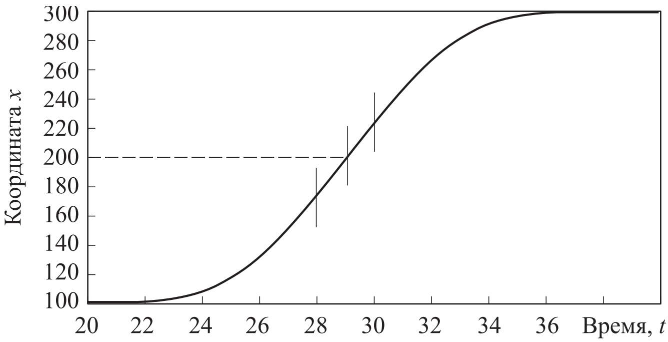

Рис. 1. Зависимость координаты x от времени

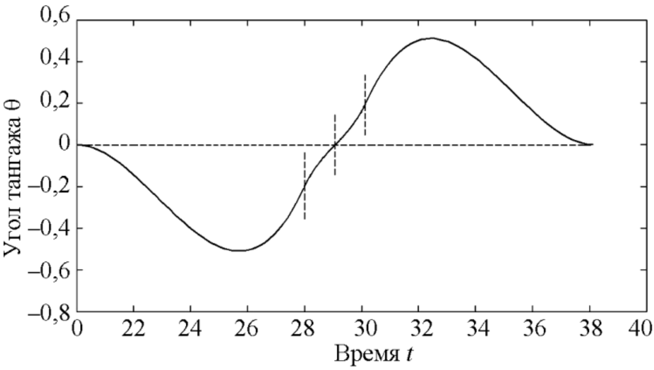

Рис. 2. Зависимость угла тангажа θ от времени

На рисунках видно, что графики симметричны относительно центральной точки, соответствующей $t = t_3$.

При постановке задачи указывалось, что время окончания движения t_2 не задается изначально. Второй этап заканчивается в тот момент, когда переменная θ достигнет значения, равного нулю. Единственный способ изменить время окончания движения — варьирование параметров t_4, θ_0, $\dot{\theta}_0$.

Проведем серию тестов при различных значениях параметров и выясним, как изменяется конечное время движения при различных значениях параметров.

Параметр t_4 зафиксируем, а θ_0 и $\dot{\theta}_0$ будем изменять в промежутке от 0,1 до 0,35 и от –0,1 до –0,4 соответственно с шагом 0,05 (таблица).

Знаком «—» обозначена ситуация, когда полученное решение начинает расходиться. Это связано с ошибками численного интегрирования на втором этапе. По данным таблицы видно, что при увеличении параметров по модулю уменьшается время окончания движения, но увеличивается вероятность расхождения полученного решения.

$\dot{\theta}_0 / \theta_0$	θ_0					
$\dot{\theta}_0$	–0,1	–0,15	–0,2	–0,25	–0,3	–0,35
0,1	49,53	46,35	44,17	42,57	41,32	40,32
0,15	45,91	43,76	42,19	40,98	40,01	39,20
0,2	43,25	41,73	40,57	39,63	38,86	38,21
0,25	41,23	40,13	39,24	38,51	37,89	—
0,3	39,67	38,84	38,15	37,55	37,05	—
0,35	38,43	37,78	37,23	36,75	—	—

Итак, количество граничных условий задачи можно уменьшить с помощью метода симметрий. Если удается найти накрытие, то задача терминального управления сводится к двум задачам Коши. Если в начальном положении накрытие не определено, то можно сначала перевести систему в положение, при котором накрытие определено, а потом применить метод накрытий.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*. Москва, Факториал пресс, 2005, 380 с.

[2] Sira-Ramirez H., Castro-Linares R. and Liceaga-Castro E. A Liouvillian systems approach for the trajectory planning-based control of helicopter models. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2000, vol. 10, p. 301–320.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Белинская Ю.С. Построение автоматического управления горизонтальным движением вертолета. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1.
URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1175.html

Белинская Юлия Сергеевна — аспирант, ассистент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: usbelka@mail.ru