УДК 519.714

Особенности автоматизации синтеза булевых функций

© А.А. Гурченков[1], Е.К. Егорова[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]МАТИ — РГТУ им. К.Э. Циолковского, Москва, 121552, Россия

Изложен оригинальный подход к автоматическому синтезу дискретных устройств в базисе микросхем. Методические установки этого подхода основываются на математическом и информационном описаниях булевых функций и их структурно-функциональной декомпозиции. Параллельная и последовательная декомпозиции по сложности (числу подформул) характеризуются одинаковым качеством, но по глубине лучшим качеством (меньшим или равным значением) обладает первая, поэтому для синтеза схем применена параллельная декомпозиция. В частности, предложен вычислительный метод для нахождения оценок сложности реализации произвольных булевых функций в базисе Жегалкина на основе параллельной декомпозиции. Метод позволяет оценить возможность минимизации числа транзисторов и времени задержки схемы. Для алгоритма рассмотрены несколько особых случаев с примерами. На основе этих особенностей внесены дополнения в алгоритм, в результате чего алгоритм стал универсальным.

Ключевые слова: *булевы функции, показатели сложности, минимизация, декомпозиция, функциональные уравнения, схемы.*

В данной работе применяется метод структурно-функциональной декомпозиции булевых функций и схем из функциональных элементов [1–5]. При использовании структурно-функциональной декомпозиции произвольной булевой функции, зависящей от любого конечного числа переменных, получены функционалы, позволяющие заранее подсчитывать показатели качества синтеза — число элементов и глубину схемы [2, 3, 6, 7]. Функционалы также могут быть использованы для оптимизации синтеза [1, 6, 8–10].

Для автоматического нахождения оценки здесь приводится алгоритм, позволяющий это легко сделать [5, 10]. Кроме того, рассмотрен ряд особых случаев, для обработки которых пришлось модифицировать построенный алгоритм. Для лучшего понимания работы алгоритма особые случаи подтверждены примерами.

Пусть $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ — множество булевых переменных и произвольная булевой функции $f^{(n)}$ задается полиномом Жегалкина $F^{(n)}$ в базисе G_3 (n — число переменных); m — длина полинома; K_i — монотонная элементарная конъюнкция ранга r_i, $i=\overline{1,m}$. Вектор

$\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_i,\ldots,r_m)$ рангов полинома Жегалкина упорядочивается для алгоритма один раз, отношением “ $\geq$”. Получаем $r_1 \geq \ldots \geq r_i \geq \ldots \geq r_m$. Полином Жегалкина $F^{(n)}$ представляется в виде табл. 1 ($K_{i,j}$) с числом строк ($m+1$) и числом столбцов ($n+1$). Первые m строк и n столбцов определяют полином Жегалкина, ($m+1$)-я строка применяется для указания числа повторений букв в формуле и ($n+1$)-й столбец — для рангов элементарной конъюнкции (ЭК) K_i. Если $x_j \in \{K_i\}$, то $K_{i,j}=1$, иначе $K_{i,j}=0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, где под символом $\{K_i\}$ понимаем множество переменных, образующих ЭК K_i.

Таблица 1

	x_1	…	x_j	…	x_n	$\boldsymbol{r}$
K_1	…	…	…	…	…	r_1
…	…	…	…	…	…	…
K_i	…	…	$x_{i,j}=1$	…	…	r_i
…	…	…	…	…	…	…
K_m	…	…	…	…	…	r_m
p	p_1	…	p_j	…	p_n	L_B

Для элементарного симметричного полинома Жегалкина $F_i^{(n)}$ шаг декомпозиции определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$F_i^{(n)} = \left(\left(x_n F_{i-1}^{(n-1)}\right) \oplus F_i^{(n-1)}\right).$$

Остаточные функции, рассматриваемые на множестве $X' = X \setminus \{x_j\}$, в алгоритме будем записывать соответственно как $F' = F_{i-1}^{(n-1)}$ и $F'' = F_{i-1}^{(n-1)}$.

В алгоритме используются следующие параметры: $t_1 = 1, 2, \ldots$ — номер последней функции, записанной в табл. 2; $t_2 = 1, 2, \ldots$ — номер последней прочитанной функции; $j = j_{\max}$ — индекс переменной x_j с максимальным числом p_j повторений в табл. 1.

На основе множества рангов r_i элементарных конъюнкций K_i, $i=\overline{1,m}$, выносим за скобки переменную x_j с максимальным числом повторений, при этом получается полином F' длиной p_j. Остаточные формулы записываются в табл. 2.

Таблица 2

№	n	m	F
1	$n' := n - 1$	$m' := p_j$	F'
2	$n'' := n'$	$m'' := m - m'$	F''
…	…	…	…

В алгоритме используются следующие параметры: $t_1 = 1, 2, \ldots$ — номер последней функции, записанной в табл. 2; $t_2 = 1, 2, \ldots$ — номер последней прочитанной функции; $j = j_{\max}$ — индекс переменной x_j с максимальным числом p_j повторений в табл. 1. Если сразу несколько переменных удовлетворяют этому условию, то, для сохранения упорядоченности рангов, выбираем из них переменную с минимальными индексами i и j.

Реализуемая формула $F^{(n)}$ (и получаемые остаточные) в общем случае разбивается на две более простые следующим образом: $F^{(n)} = x_{j\max} F^{(n-1),1} \oplus F^{(n-1),2}$. На каждом шаге остаточные формулы записываются в табл. 2, при этом значение t_1 увеличивается на единицу с каждой записанной формулой. На следующем шаге происходит чтение формулы из строки с номером t_2, после чего значение t_2 также увеличивается на 1. Алгоритм завершается, когда выполнится условие $t_2 \geq t_1$. Таким образом, будут получены суперпозиционная формула $F^{(n)}$ и оценка числа подформул $L_F\left(F^{(n)}\right) = N$, где N находится в процессе работы алгоритма.

Шаг 1. Подготовка начальных данных.

Вводится полином $F^{(n)}$, для него подсчитываются n, m, L_B. Составляется таблица, подсчитываются и упорядочиваются векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$. Инициализируются переменные $t_1 := 0$, $t_2 := 0$, $N := 0$.

Шаг 2. Исходный полином записывается в таблицу. Счетчик записи увеличивается на единицу: $t_1 := t_1 + 1$.

Шаг 3. Чтение из таблицы полинома с индексом t_2.

$t_2 := t_2 + 1$.

Шаг 4. Проверка $m = 1$.

Если формула состоит только из одной конъюнкции, то

$N := N + (m - 1)$;

$t_1 := t_1 + 1$.

Переход к шагу 9.

Шаг 5. Проверка $p_{j\max} = 1$.

Если максимальный ранг равен единице, то формула представляет собой сложение по модулю 2*n* переменных.

$N := N + (n-1)$;

$t_1 := t_1 + 1$.

Переход к шагу 9.

Шаг 6. Проверка $L_B = 3$.

$N := N + 2$;

$t_1 := t_1 + 1$.

Переход к шагу 9.

Шаг 7. Разложение.

Выделяется переменная $x_{j\max}$ и конъюнкции, содержащие эту переменную, копируются в формулу F'.

$n' := n - 1$;

$m'' := p_{j\max}$;

$N := N + 1$;

$t_1 := t_1 + 1$.

Шаг 8. Проверка $m' \neq m$.

Оставшиеся конъюнкции копируются в формулу F''.

$n'' := n - 1$;

$m'' := m - m'$;

$N := N + 1$;

$t_1 := t_1 + 1$.

Переход к шагу 9.

Шаг 9. Проверка $t_2 < t_1$.

Переход к шагу 3.

Шаг 10. Вывод результата.

$L_F\left(F^{(n)}, G_3\right) := N.$

Пример 1. Рассмотрим случай, когда число конъюнкций $m = 1$. В этом случае формула представляет собой перемножение n переменных:

$$F^{(n)} = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Поскольку число подфункций на единицу меньше числа переменных, можно считать, что

$$L_F = n - 1.$$

Если в виде формулы данный случай не представляет особых сложностей, то в виде схемы может быть несколько вариантов размещения элементов.

Пусть

$$F^{(7)} = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7.$$

Тогда возможны два случая:

- случай 1 (рис. 1):

$$F^{(7)} = \left(\left(\left(\left(\left(\left(x_1 x_2\right) x_3\right) x_4\right) x_5\right) x_6\right) x_7\right); \tag{1}$$

- случай 2 (рис. 2):

$$F^{(7)} = \left(\left(x_1 x_2\right)\left(x_3 x_4\right)\right)\left(\left(x_5 x_6\right) x_7\right). \tag{2}$$

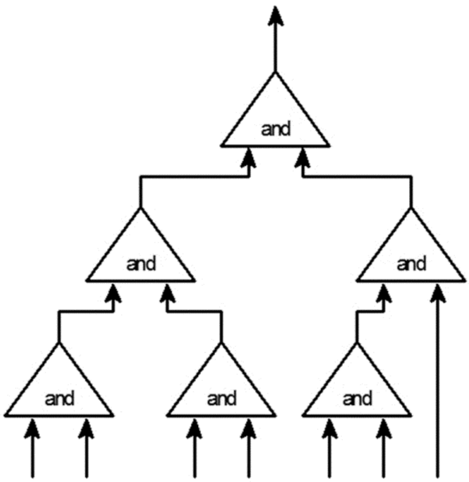

Рис. 1

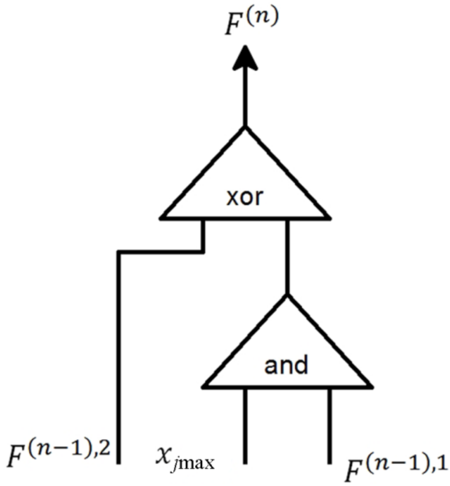

Рис. 2

Формула (1) и соответствующая ей схема имеют глубину $\mathrm{Dep}_F = 6$, а формула (2) – $\mathrm{Dep}_F = 2$. Очевидно, что параллельная декомпозиция будет иметь преимущества по скорости быстродействия.

Пример 2. Еще одним особенным случаем является вариант, когда $x_{j\max} = 1$. При этом все ранги равны единице, следовательно, формула состоит из n переменных, сложенных по модулю 2:

$$F^{(n)} = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n.$$

Аналогично примеру 1 имеем

$$F^{(5)} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5;$$

$$F^{(5)} = \left(\left(\left(x_1 \oplus x_2\right) \oplus \left(x_3 \oplus x_4\right)\right) \oplus x_5\right).$$

Пример 3. Пусть

$$F^{(2)} = x_1 \oplus x_1 x_2. \tag{3}$$

Если вынести переменную с максимальным рангом за скобки, получим

$$F^{(2)} = x_1 \left(1 \oplus x_2\right). \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) содержат одно и то же число операций. Следовательно, формулу (3) можно оставить в исходном виде, но при этом учесть число подформул.

Рассмотрим еще два случая, когда при разложении отсутствует одна из подформул.

Пример 4. Пусть

$$F^{(n)} = x_{j\max} \oplus F^{(n-1),2}.$$

Очевидно, что переменная $x_{j\max}$ имеет число повторений $p_{j\max} = 1$, иначе существовала бы подформула $F^{(n-1),1}$. Но в таком случае и остальные переменные повторяются всего один раз.

Можно привести аналогичный пример:

$$F^{(4)} = x_1 \oplus x_2 x_3 x_4. \tag{5}$$

Для того чтобы избежать подобной ситуации, в алгоритме выполняется первоначальное упорядочивание по числу переменных в конъюнкциях. Таким образом, пример (5) приобретет следующий вид:

$$F^{(4)} = x_2 x_3 x_4 \oplus x_1,$$

где максимальный ранг будет иметь переменная x_2. Следовательно, единственный возможный вид формулы в таком случае

$$F^{(4)} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4.$$

Данный вид формулы разбирается в примере 2.

Пример 5. Рассмотрим последний случай, когда

$$F^{(n)} = x_{j\max} F^{(n-1),1}.$$

Пусть

$$F^{(4)} = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_4 = x_1\left(x_2 \oplus x_3 \oplus x_4\right).$$

В данном случае просто учитываем, что появляется всего одна остаточная подформула, а следовательно, увеличиваем значение счетчика записи всего на единицу: $t_1 = t_1 + 1$.

Рассмотрены все актуальные частные случаи представления булевой формулы в виде полинома Жегалкина, которые могут вызывать проблемы при работе алгоритма [5]. Были внесены изменения в алгоритм для корректной обработки этих случаев.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Поспелов Д.А. *Логические методы анализа и синтеза схем*. Москва, Энергия, 1974, 342 с.

[2] Чебурахин И.Ф. *Синтез дискретных управляющих систем и математическое моделирование: алгоритмы, программы*. Москва, Физматлит, 2004, 247 с.

[3] Чебурахин И.Ф. *Математические модели для интеллектуализации синтеза дискретных логических управляющих устройств на основе цифровых интегральных схем*. Известия РАН. Теория и системы управления, 2008, № 1, с. 68—77.

[4] Чебурахин И.Ф., Цурков В.И. Синтез дискретных логических устройств обработки информации на основе теории агентов. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2011, № 3, с. 27—34.

[5] Егорова Е.К., Чебурахин И.Ф. О минимизации сложности и автоматизации эффективного представления булевых функций в классах формул и схем. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2013, № 3, с. 121—129.

[6] Чебурахин И.Ф. Преобразования функциональных уравнений и показатели сложности булевых функций. *Матер. IX Междунар. семинара* «Дискретная математика и ее приложения». Москва, Изд-во МГУ, 2007, с. 126—129.

[7] Чебурахин И.Ф. Сложность симметрических полиномов Жегалкина. *Тр. XVII Междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» им. акад. О.Б. Лупанова*. Новосибирск, 2008, с. 180—185.

[8] Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Подколзин А.С. *Введение в теорию интеллектуальных систем*. Москва, Изд-во МГУ, 2006, 208 с.

[9] Цурков В.И. *Декомпозиция в задачах большой размерности*. Москва, Наука, 1981, 324 с.

[10] Чебурахин И.Ф. Математические модели для минимизации и автоматизации синтеза дискретных управляющих систем. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2012, № 4, с. 5—13.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Гурченков А.А., Егорова Е.К. Особенности автоматизации синтеза булевых функций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http:// engjournal.ru/ catalog/appmath/hidden/1167.html

Гурченков Анатолий Андреевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов: управление и устойчивость вращающихся твердых тел с жидким наполнением. e-mail: challenge2005@mail.ru

Егорова Евгения Кирилловна родилась в 1988 г., окончила МАТИ — РГТУ им. К.Э. Циолковского в 2011 г. Ассистент кафедры «Прикладная математика и инфо-рмационные технологии» МАТИ — РГТУ им. К.Э. Циолковского. e-mail: eeniya@gmail.com