УДК 519.6+536.6

Процесс тепломассопереноса частиц в щелевых системах

© А.А. Гурченков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На базе предложенной математической модели взаимодействия атомов, вылетающих с поверхности конденсированной фазы, разработаны компьютерные программы по моделированию стационарного процесса тепломассопереноса в открытых системах щелевого и цилиндрического типов. Компьютерные эксперименты позволили определить вероятности вылета атомов из систем, угловые распределения и энергии вылетающих атомов, распределения атомов по напыляемым поверхностям и числа столкновений атомов со стенками. Данный подход удобен для получения точных формул вероятностей вылета частиц из щелевых систем. Точные формулы получены для систем с различными высотами стенок и числом столкновений частиц со стенками систем в свободномолекулярном режиме течения газовой среды при различных законах вылета частиц с поверхностей.

Ключевые слова: *математическое моделирование, геометрико-вероятностный метод, перенос частиц.*

Процесс массопереноса частиц газа в системах в свободномолекулярном режиме течения характеризуется тем, что частицы движутся прямолинейно и сталкиваются со стенками систем, а не друг с другом в газовой фазе. Для описания движения частиц в таких условиях уравнение Больцмана не подходит [1–6]. Для определения вероятностей вылета частиц из открытых систем щелевого типа используют метод Монте-Карло [7–13]. В зависимости от цели исследований можно получать узконаправленные потоки частиц из систем или с максимальным рассеянием. Таким образом, изменяя высоту стенок систем, можно получать пучки частиц с заданным рассеянием, т. е. управлять движением вылетающих частиц.

При моделировании вылета частиц с поверхности конденсированной фазы или с поверхности стенок систем используют закон косинуса. Как было установлено [4], этот закон является предельным случаем для безразмерного параметра $r = U/(kT)$, стремящегося к бесконечности, где U — энергия связи вылетающих частиц с молекулами поверхности конденсированной фазы; k — постоянная Больцмана; T — температура системы. Вероятности вылета частиц из систем для параметра $r > 10$ на доли процента отличаются от соответствующих вероятностей вылета для асимптотического случая. В другом предельном случае, при $r \to 0$, вылет частиц с поверхности осуществляется по закону синуса, что соответствует равновероятному вылету частиц с поверхности.

Следуя геометрико-вероятностному подходу, из схемы, представленной на рисунке, получаем: точечная частица, имеющая координату x, может вылететь из системы с относительной высотой стенок, равной H, без столкновения со стенками в том случае, если соотношение между компонентами скоростей v_x и v_y будет таким, что угол, под которым вылетает частица, будет меньше критических углов $\theta_{кр1}$ и $\theta_{кр2}$.

Для произвольного положения x частицы на поверхности конденсированной фазы можно найти критический угол по формуле

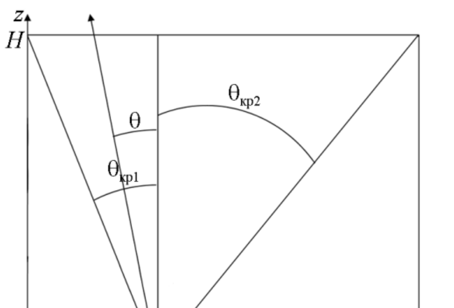
$$\theta_{кр1}=\operatorname{arctg}\frac{x}{H}.$$

Все частицы, вылетающие из точки с координатой x, могут вылететь из системы без столкновений со стенками, если угол вылета θ, определяемый составляющими скорости, принадлежит интервалу $(0;\ \theta_{кр1})$. Отсюда можно определить средний угол вылета частиц из системы, просуммировав все возможные углы вылета θ и все возможные положения точек вылета на поверхности конденсированной фазы от нуля до единицы. Средний критический угол для вылета частиц по закону косинуса будет определяться с помощью двойного интеграла:

$$\overline{\theta}_{кр1}=\int_0^1 dx\int_0^{\theta_{кр1}}\cos\theta d\theta.$$

Вычисление двойного интеграла приводит к следующей формуле:

$$\overline{\theta}_{кр1}=\sqrt{H^2+1}-H.$$



Общая схема щелевого канала

Чтобы найти весь средний угол, следует провести аналогичные расчеты и для второго критического угла $\theta_{кр2}$ или, исходя из очевидной симметрии задачи, умножить полученное выражение на 2.

Для определения вероятности вылета частиц из системы без столкновений со стенками необходимо учитывать нормирующий множитель:

$$M = 2\int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta.$$

С учетом нормировки получаем точную формулу для определения вероятности вылета частицы из щелевого канала без столкновения со стенками:

$$W_1(0; H) = \sqrt{1+H^2} - H.$$

В предельном случае при $H = 0$, когда нет стенок, $W_1(0; H) = 1$, т. е. все частицы вылетают из такой системы без столкновений со стенками. При $H \to \infty$ $W_1(0; H) \to 0$.

При вылете частиц с поверхности конденсированной фазы возможны такие траектории их движения [14–24], что они будут попадать на стенки системы. Это может реализоваться, если частицы из точки с координатой x будут вылетать в диапазоне углов ($\theta_{кр1}$; $\pi/2$). Средний угол попадания частиц на стенку системы определяется с помощью двойного интеграла:

$$\overline{\theta}_{кр1} = \int_0^1 dx \int_{\theta_{кр1}}^{\pi/2} \cos\theta d\theta.$$

Вычисление этого двойного интеграла и учет нормировочного множителя дает следующую точную формулу для определения вероятности попадания частиц, вылетевших с поверхности конденсированной фазы, на стенку системы:

$$W_2(0; H) = 0,5(1 + H - \sqrt{H^2+1}).$$

Очевидно, что сумма вероятностей $W_1(0; H)$ и $2W_2$ $(0; H)$ равна единице.

Из формулы вероятности попадания частиц на стенки системы после вылета с поверхности конденсированной фазы можно получить формулу плотности вероятности распределения столкновений частиц по высоте стенки системы, заменив H на z и взяв производную от этой функции по z:

$$\rho_2(0;\ z) = 0,5(1 - z / \sqrt{z^2+1}).$$

Данная функция не имеет экстремумов. При $z = 0$ $\rho_2(0; z) = 0,5$, а при $z \to \infty$ ρ_2 $(0; z) \to 0$.

Зная плотность распределения числа столкновений частиц, вылетевших с поверхности конденсированной фазы, по высоте стенки системы, можно получить формулу для определения вероятности попадания частиц в конденсированную фазу после одного столкновения со стенкой $W_3(1;H)$.

Формулу для определения среднего угла попадания частиц в конденсированную фазу с учетом распределения столкновений частиц со стенками системы можно представить в виде

$$\bar{\theta}_{\text{кр}3} = \int_0^H dz\rho_2(0;z)\int_{\theta_{\text{кр}}}^{\pi/2}\cos\theta d\theta,$$

где $\theta_{\text{кр}} = \operatorname{arctg}(1/z)$. С учетом нормировки получим точную формулу для определения вероятности попадания частиц в конденсированную фазу после одного столкновения со стенками системы:

$$W_3(1;H) = \frac{1 + H - \sqrt{1+H^2} - \ln\dfrac{H+\sqrt{1+H^2}}{\sqrt{1+H^2}}}{2\left(1+H-\sqrt{1+H^2}\right)}.$$

Аналогичные вычисления выполнены для случая, когда частицы вылетают с поверхности по закону синуса. Заменив в подынтегральной функции косинус на синус и рассчитав соответствующие двойные интегралы, получим следующие точные выражения.

Вероятность вылета частиц из системы без столкновения со стенками

$$W_1(0;H) = 1 - H\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+H^2}}{H}\right),$$

вероятность попадания частиц на стенку системы

$$W_2(0;H) = \frac{H}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+H^2}}{H}\right),$$

плотность вероятности распределения столкновений частиц, вылетевших с поверхности конденсированной фазы, по стенке системы

$$\rho_2(0;z) = 0,5\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\right) - \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right),$$

вероятность попадания частиц в конденсированную фазу после одного столкновения со стенками системы

$$W_3(1;H)=\frac{\sqrt{1+H^2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+H^2}}{H}\right)-\ln\frac{\sqrt{1+H^2}}{H}-\ln 2}{2H\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+H^2}}{H}\right)}.$$

Результаты расчетов по полученным формулам совпадают с данными вычислений, выполненных с помощью метода Монте-Карло. Аналогичный подход можно применить для определения вероятностей вылета частиц из прямоугольных и цилиндрических систем с произвольным углом наклона стенок. Приведенные точные формулы можно использовать как тестовые при работе датчиков случайных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bird G.A. *Molecular Gas Dynamics.* Claredon Press, Oxford, 1978.

[2] Klots Cornelius E. Evaporation from Small Particles. *J. Phys. Chem*, 1988, vol. 92, no. 11, pp. 5664—5668.

[3] Gvozdev M.A., Samartsau K.S. Computer Modeling of Particles Transport Stationary Process in Open Cylindrical Nanosystems by Monte Carlo method. *Int. J. Monte Carlo Methods and Applications*, 2009, vol. 15, no. 1, pp. 49—62.

[4] Гурченков А.А., Костиков А.А., Латышев А.В., Юшканов А.А. Функция распределения квантового ферми-газа в задаче об испарении. *Динамика неоднородных систем*. *Тр. ИСА РАН*, 2008, т. 32(3), с. 80—90.

[5] Pletnev L.V. A Computer Modeling of an Evaporation process of a Monotomic Condensed Phase. *VI Int. Congress on Mathematical Modeling: Book of Abs*. Nizhny Novgorod, 2004, pp. 208.

[6] Pletnev L.V. Modeling of Stationary Heat and Mass Transfer of Particles in Nanosystems by the Monte Carlo Method. *VI Int. Congress on Mathematical Modeling: Book of Abs.* Nizhny Novgorod, 2004. pp. 209.

[7] Миносцев В.Б., Порошин В.В., Богомолов Д.Ю., Радыгин В.Ю. Математическое моделирование течения рабочей среды в осесимметричных торцевых уплотнениях с учетом топографии поверхности. *Машиностроение и инженерное образование*, 2007, № 1, с. 48—52.

[8] Порошин В.В., Богомолов Д.Ю., Сыромятникова А.А. Математическая модель течения рабочей среды в подвижных металл-металлических соединениях с учетом трехмерной топографии рабочих поверхностей. Вестник *Брянского гос. техн. ун*., 2008, № 2(18), с. 97—102.

[9] Shejpak A., Poroshin V., Syromiatnikova A., Bogomolov D. Roughness Influence upon the Hermetic of Plunged Pair Using Equivalent Ggap Model. no. Int. J. *Advanced Engineering, Int. J.* 2008, no. 2, pp. 283—290.

[10] Patir N., Cheng H.S. An Average Flow Model for Determining Effects of Three-Dimensional Roughness on Partial Hydrodynamic Lubrication. *ASME J. of Lubrication Technology,* 1978, vol. 100, no. 1, pp. 12—17.

[11] Gurchenkov A.A., Yalamov Y.I. Unsteady Flow over a Porous Plate with Injection (Suction). *Прикладная механика и техническая физика*, 1980, № 4, с. 66.

[12] Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. Ч. II. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2006, № 3, с. 82—89.

[13] Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. Ч. I. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2006, № 1, с. 141—148.

[14] Гурченков А.А. Момент сил внутреннего трения быстровращающегося цилиндрического сосуда, заполненного вязкой жидкостью. *Известия вузов. Сер. Приборостроение,* 2001, т. 44. № 2. с. 44.

[15] Gurchenkov A.A. Stability of a Fluid-Filled Gyroscope. *Инженерно-физический журнал*, 2002, т. 75, № 3, с. 28—32.

[16] Gurchenkov A.A., Yalamov Y.I. Unsteady Viscous Fluid Flow between Rotating Parallel Walls with Allowance for Thermal Slip along One of Them. *Doklady Physics*, 2002, т. 47, № 1. с. 25—28.

[17] Gurchenkov A.A. Stability of a Fluid-Filled Gyroscope. *J. of Engineering Physics and Thermo Physics*, 2002, vol. 75, no. 3, pp. 554.

[18] Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками при наличии поперечного потока. *Прикладная механика и техническая физика,* 2001, т. 42, № 4, с. 48—51.

[19] Гурченков А.А., Корнеев В.В., Носов М.В. Динамика слабовозмущенного движения заполненного жидкостью гироскопа и задача управления. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, № 6, с. 904—911.

[20] Гурченков А.А. Диссипация энергии в колеблющейся полости с вязкой жидкостью и конструктивными неоднородностями. *Докл. Академии наук,* 2002, т. 382, № 4, с. 476.

[21] Gurchenkov A.A., Nosov M.V., Tsurkov V.I. Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies. *CRS Press*, 2013, 147 p. (in English).

[22] Гурченков А.А. Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками. *Прикладная математика и механика,* 2002, т. 66, вып. 2, с. 251—255.

[23] Гурченков А.А., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е. Слоистые структуры в нелинейных векторных полях. Москва, Изд-во ВЦ РАН, 2007, 177 с.

[24] Гурченков А.А., Кулагин Н.Е. *Об узорах симметрии в простых моделях нелинейного скалярного поля.* Москва, Изд-во ВЦ РАН, 2004, 84 с.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Гурченков А.А. Процесс тепломассопереноса частиц в щелевых системах. *Инженерный журнал: наука и инновации,* 2013, вып. 9. URL: http://engjournal.ru /catalog/ appmath/hidden/1166.html

Гурченков Анатолий Андреевич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов: управление и устойчивость вращающихся твердых тел с жидким наполнением. e-mail: challenge2005@mail.ru