УДК 519.718

Об одной задаче оптимальной остановки марковских цепей

© А.В. Анферова, Л.Г. Ветров, А.Л. Сунчалина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Для марковской цепи с дискретным или непрерывным множеством состояний рассмотрена задача нахождения двух марковских моментов остановки, для которых математическое ожидание разности значений случайного процесса в эти моменты времени имеет максимальное значение. Интерпретация задачи — моменты покупки и продажи финансового актива в условиях, когда цена на этот актив изменяется по закону марковской цепи с заданной матрицей переходных вероятностей. Приведены результаты численных расчетов для ряда моделей марковских цепей.

Ключевые слова: *марковская цепь, момент остановки, переходные вероятности, метод обратной индукции, случайное блуждание, модель Эренфестов.*

Введение. Пусть на конечном временно́м интервале $[0, N]$ задана марковская цепь X_n, $n \in [0, 1, ..., N]$. Случайная величина $\tau = \tau(\omega)$, принимающая значения из множества $[0, 1, ..., N]$, называется марковским моментом остановки, если при всех $l \in [0, 1, ..., N]$ имеет место включение $\{\omega : \tau(\omega) = l\} \in \sigma\{X_0, X_1, ..., X_l\}$, где $\sigma\{X_0, X_1, ..., X_l\}$ — сигма-алгебра, порожденная случайными величинами $X_0, X_1, ..., X_l$, т. е. принятие решения об остановке в момент времени l $(\{\tau = l\})$ определяется по поведению марковской цепи до момента l включительно.

Задача заключается в том, чтобы отыскать два марковских момента остановки τ и σ, таких, что $\mathrm{M}(X_\tau - X_\sigma) \to \max$, где $\mathrm{M}(\;)$ — математическое ожидание случайной величины.

Интерпретация задачи. Пусть цена некоторого актива изменяется по закону, описываемому марковской цепью X_n. Если σ — момент покупки актива, а τ — момент его продажи, то задача состоит в том, чтобы получить максимальный средний выигрыш от операции «покупка—продажа» актива. В дальнейшем будем придерживаться терминологии в рамках этой интерпретации. Будем различать стратегию поведения игроков двух типов: 1) склонный к риску игрок покупает актив и не продает имеющийся на руках актив, даже если ожидаемый выигрыш равен нулю; 2) не склонный к риску игрок покупает актив только в том случае, если ожидаемый выигрыш строго положителен, и продает, если предложенная цена не меньше средней ожидаемой цены от продажи в будущем.

Дискретные марковские цепи. Пусть множество состояний марковской цепи является дискретным: $X_l \in \{t_1, t_2, ..., t_m\}$ (конечное или счетное). В этом случае поведение марковской цепи описывается матрицей переходных вероятностей $\mathrm{P}_l(i, j) = \mathrm{P}\left(X_{l+1} = t_j \middle| X_l = t_i\right)$ (для однородной марковской цепи матрица переходных вероятностей от l не зависит). Сначала рассмотрим момент продажи τ уже имеющегося актива. Обозначим через $S_l(t)$ средний доход от продажи актива при условии, что $X_l = t$, $t \in \{t_1, t_2, ..., t_m\}$, $l = 1, 2, ..., N$. Воспользуемся методом обратной индукции. Ясно, что $S_N(t) = t$.

Рассмотрим предыдущий момент времени $l = N-1$. Пусть $X_{N-1} = t_j$. Решение о том, продавать актив в момент времени $l = N-1$ или нет, зависит от того, какова цена на него в этот момент: если ожидаемый доход на следующий момент $\sum_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}(j, i)$ больше, чем предлагаемая цена $X_{N-1} = t_j$, то имеет смысл ждать еще один шаг; в противном случае $\tau = N-1$ и $S_{N-1}(t_j) = t_j$.

Итак, для игрока, не склонного к риску,

$$\tau = \begin{cases} N, & t_j < \sum_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}(j,i); \\ N-1, & t_j \ge \sum_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}(j,i). \end{cases}$$

При этом

$$S_{N-1}(t_j) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}(j, i), & t_j < \sum_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}(j, i); \\ t_j, & t_j \ge \sum_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}(j, i). \end{cases}$$

Для склонного к риску игрока строгие неравенства становятся нестрогими и, наоборот, нестрогие неравенства следует заменить на строгие. Это замечание касается всех последующих рассуждений, поэтому соответствующие формулы приводятся для игрока, не склонного к риску.

Аналогично при $l = N-2$ ($X_{N-2} = t_j$)

$$\tau = \begin{cases} > N-2, & t_j < \sum_{i=1}^{m} S_{N-1}(t_i)\mathrm{P}_{N-2}(j,i); \\ N-2, & t_j \geq \sum_{i=1}^{m} S_{N-1}(t_i)\mathrm{P}_{N-2}(j,i). \end{cases}$$

Средний выигрыш

$$S_{N-2}(t_j) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} S_{N-1}(t_i)\mathrm{P}_{N-2}(j,\, i); \\ t_j, \quad t_j \geq \sum_{i=1}^{m} S_{N-1}(t_i)\mathrm{P}_{N-2}(j,\, i). \end{cases}$$

Для произвольного момента времени l ($X_l = t_j,\ \tau \geq l$) имеют место следующие соотношения:

$$\tau = \begin{cases} > l, & t_j < \sum_{i=1}^{m} S_{l+1}(t_i)\mathrm{P}_l(j,i); \\ l, & t_j \geq \sum_{i=1}^{m} S_{l+1}(t_i)\mathrm{P}_l(j,i), \end{cases} \qquad S_l(t_j) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} S_{l+1}(t_i)\mathrm{P}_l(j,i); \\ t_j, \quad t_j \geq \sum_{i=1}^{m} S_{l+1}(t_i)\mathrm{P}_l(j,i). \end{cases}$$

Таким образом, стратегия продажи актива заключается в том, что актив продается, если предлагаемая цена $X_l = t_j$ выше ожидаемого дохода от продажи в будущем $\sum_{i=1}^{m} S_{l+1}(t_i)\mathrm{P}_l(j,i)$.

Далее рассмотрим момент покупки σ. Ясно, что $\sigma \leq N-1$. Пусть $X_{N-1} = t_j$. Обозначим через $G_l(t)$ среднюю доходность от операции «покупка—продажа» актива при условии, что $X_l = t$, $t \in \{t_1, t_2, ..., t_m\}$, $l = 1, 2, ..., N$. Имеет смысл купить актив ($\sigma = N-1$), если t_j меньше ожидаемого дохода от продажи актива $S_{N-1}(t_j)$. В этом случае стратегия остановки

$$\sigma = \begin{cases} -, & t_j \geq \sum_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}(j,i); \\ N-1, & t_j < \sum_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}(j,i) \end{cases}$$

и средняя доходность для операции «покупка—продажа»

$$G_{N-1}\left(t_j\right)=\begin{cases}0, & t_j \geq \sum\limits_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}\left(j,i\right); \\ \sum\limits_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}\left(j,i\right)-t_j, & t_j < \sum\limits_{i=1}^{m} t_i \mathrm{P}_{N-1}\left(j,i\right).\end{cases}$$

Аналогично для произвольного момента времени l ($X_l = t_j,\ \sigma \geq l$) получаем

$$\sigma=\begin{cases}>l, & t_j \geq \sum\limits_{i=1}^{m} S_{l+1}(t_i) \mathrm{P}_l\left(j,i\right); \\ l, & t_j < \sum\limits_{i=1}^{m} S_{l+1}(t_i) \mathrm{P}_l\left(j,i\right),\end{cases}$$

и средняя доходность имеет вид

$$G_l\left(t_j\right)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m} G_{l+1}\left(t_i\right) \mathrm{P}_l\left(j,i\right), & t_j \geq \sum\limits_{i=1}^{m} S_{l+1}(t_i) \mathrm{P}_l\left(j,i\right); \\ \sum\limits_{i=1}^{m} S_{l+1}\left(t_i\right) \mathrm{P}_l\left(j,i\right)-t_j, & t_j < \sum\limits_{i=1}^{m} S_{l+1}(t_i) \mathrm{P}_l\left(j,i\right).\end{cases}$$

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие описанные выше правила оптимальной остановки для дискретных марковских цепей.

1. Последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке [1, m] (с точки зрения рынка — полный хаос). Матрица переходных вероятностей имеет вид $\mathrm{P}_l(i,\ j)=1/m.$ На рис. 1 представлены результаты расчетов для слу-

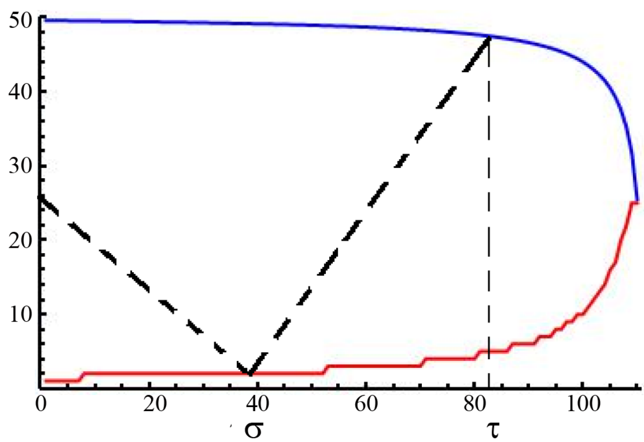

Рис. 1. Оптимальные правила остановки для независимых случайных величин

чая $N = 120$, $m = 50$. Нижняя кривая определяет момент покупки σ (если цена актива оказалась меньше, чем значение функции, задающей график нижней кривой, то наступает момент покупки). Аналогично верхняя кривая определяет момент продажи τ. Жирная штриховая линия условно изображает изменение цены актива.

На рис. 2 приведена зависимость средней доходности операции «покупка—продажа» на момент времени $N - l = 10$, $m = 20$ от состояния марковской цепи в этот момент времени.

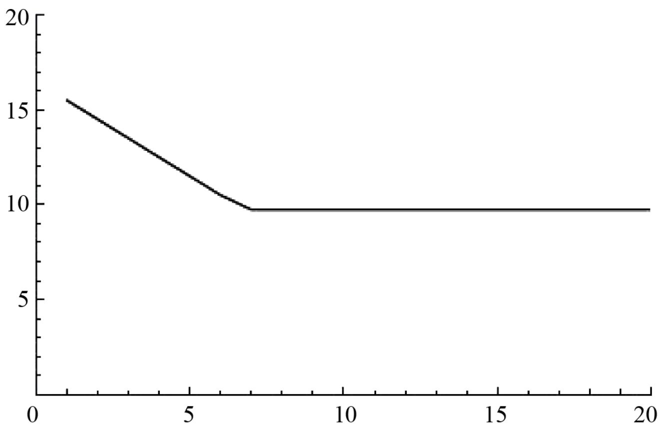

Рис. 2. Зависимость средней доходности от состояния марковской цепи

Видно, что если в данный момент цена выше границы покупки, то средняя доходность от нее не зависит. Если предлагаемая цена ниже границы покупки, то доходность линейно возрастает с уменьшением цены покупки.

На рис. 3 дана зависимость средней доходности от временно́го интервала, на котором осуществляется процесс игры (начальное состояние $t = 25$). Следует отметить одну особенность: для последова-

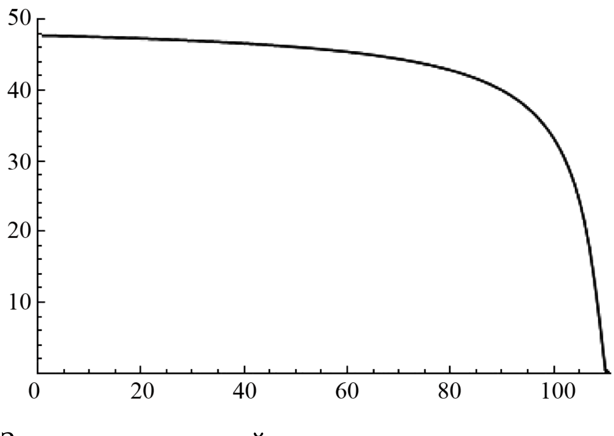

Рис. 3. Зависимость средней доходности от длительности игры

тельности независимых случайных величин за довольно короткое время доходность достигает значений, близких к максимально возможному.

2. Симметричное случайное блуждание с отражающими экранами. Матрица переходных вероятностей имеет вид $P_l(i, j) = 1/2$ при $j = i - 1$ или $j = i + 1$, если $i \neq 1$ и $i \neq m$, $P_l(1, 2) = P_l(m, m - 1) = 1$.

Рисунок 4 отражает стратегию поведения игрока, склонного к риску, а рисунок 5 — игрока, не склонного к риску. В первом случае расчеты проводились для $N = 120$, $m = 50$, во втором — для $N = 60$, $m = 50$.

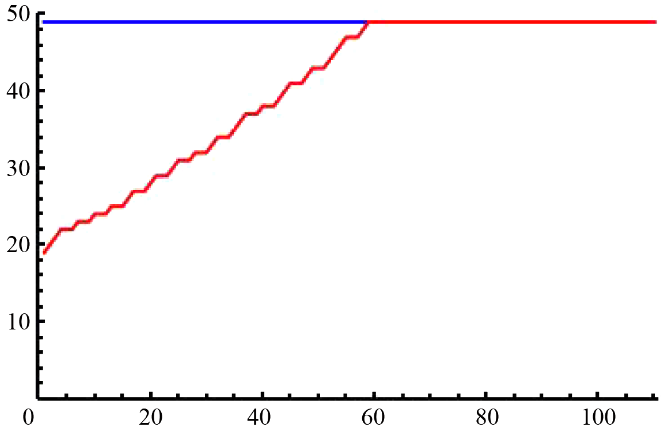

Рис. 4. Стратегия поведения игрока, склонного к риску

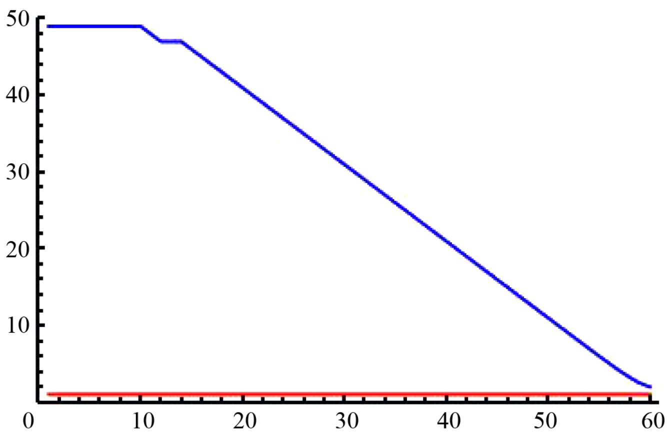

Рис. 5. Стратегия поведения игрока, не склонного к риску

Склонный к риску игрок на коротком промежутке времени готов покупать по любой цене, и его стратегия изменяется только в том случае, когда у случайного блуждания появляется возможность достичь верхней границы. Он готов продавать только по максимальной цене. Рисунок 5 показывает, что игрок, не склонный к риску, готов покупать только по самой низкой цене, а стратегию продажи определяет верхняя кривая (при продаже этот игрок готов ждать, если есть надежда достичь нижней границы).

Отметим существенное различие в стратегиях игроков, склонных и не склонных к риску. Более того, для симметричного случайного блуждания на всей прямой игрок, не склонный к риску, никогда не будет покупать актив, а склонный к риску игрок купит его сразу же и будет держать до последнего момента времени. Но при этом средний выигрыш у обоих игроков в любом случае будет одинаковым (нулевым).

3. Модель Эренфестов. Матрица переходных вероятностей имеет вид $\mathrm{P}_l(i,j)=0$, если $|i-j|\neq 1$, $\mathrm{P}_l(i,i+1)=(n-i)/(n-1)$, $\mathrm{P}_l(i,i-1)=$ $=(i-1)/(n-1)$. У этой модели есть разумная рыночная интерпретация: при стабильной ситуации на рынке цена актива стабилизируется и при отклонении цены актива от среднего значения спекулятивные операции с «короткими» деньгами «тянут» ее к среднему значению. Стратегии для определения σ и τ представлены на рис. 6.

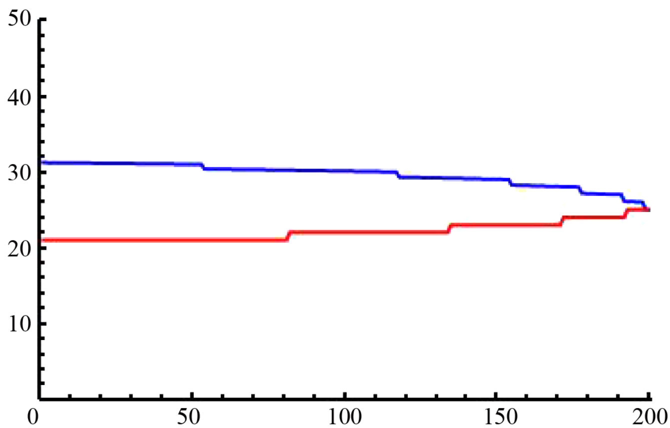

Рис. 6. Правила остановки в модели Эренфестов

На рис. 7 дана зависимость средней доходности операции «покупка—продажа» от t при условии, что $X_{100}=t$, $N=200$, $m=50$.

График на рис. 8 отражает зависимость средней доходности от временного интервала, на котором осуществляется процесс игры (начальное состояние $t=25$). Доходность операции «покупка—продажа» для модели Эренфестов существенно отличается от модели независимых случайных величин (см. рис. 3). Если для независимых случайных величин средняя доходность, равная 90 % максимальной, достигалась на временно́м отрезке $[0, 30]$, то для модели Эренфестов даже на отрезке $[0, 200]$ она едва достигает 14 % максимально возможной доходности.

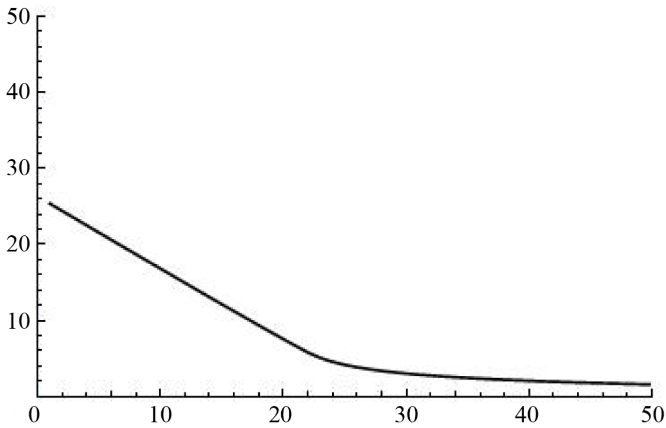

Рис. 7. Зависимость средней доходности от состояния марковской цепи

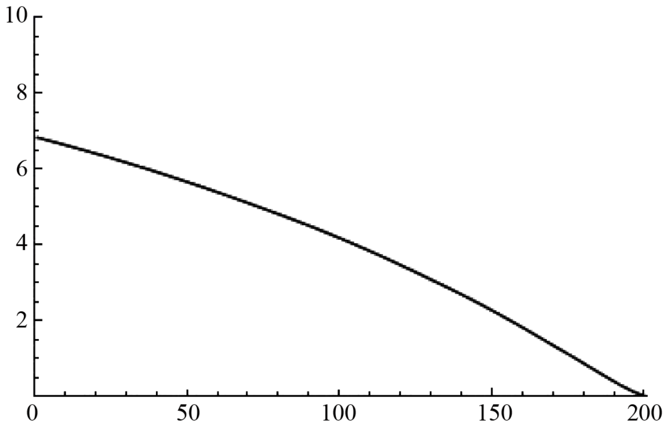

Рис. 8. Зависимость средней доходности от длительности игры

Непрерывные марковские цепи. Пусть множество состояний марковской цепи является непрерывным: $X_l \in (a, b)$, где a, b — конечные или бесконечные. В этом случае поведение марковской цепи описывается плотностью переходных вероятностей $p_l(x, y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \mathrm{P}\left(X_{l+1} \in [y, y + \Delta y] \middle\| X_l = x\right) / \Delta y$ (для однородной марковской цепи плотность переходных вероятностей от l не зависит).

Аналогично дискретному случаю сначала рассмотрим момент продажи τ уже имеющегося актива. Пусть $S_l(t)$ — средний доход от продажи актива при условии, что $X_l = t$, $t \in (a, b)$, $l = 1, 2, ..., N$. Ясно, что $S_N(t) = t$. Рассмотрим предыдущий момент времени $l = N - 1$. Пусть $X_{N-1} = t$. Решение о том, продавать актив в момент времени $l = N - 1$ или нет, зависит от того, какая цена на него в этот момент:

если ожидаемый доход на следующий момент $\int_a^b s\,p_{N-1}(t,s)\,ds$ больше, чем предлагаемая цена $X_{N-1}=t,$ то имеет смысл ждать еще один шаг; в противном случае $\tau = l.$ Таким образом,

$$\tau = \begin{cases} N, & t < \int_a^b u\,p_{N-1}(t,u)\,du; \\ N-1, & t \ge \int_a^b u\,p_{N-1}(t,u)\,du; \end{cases}$$

$$S_{N-1}(t) = \begin{cases} \int_a^b u\,p_{N-1}(t,u)\,du, & t < \int_a^b u\,p_{N-1}(t,u)\,du; \\ t, & t \ge \int_a^b u\,p_{N-1}(t,u)\,du. \end{cases}$$

Для непрерывной марковской цепи стратегия поведения игрока не зависит от склонности к риску, так как знак равенства в определении τ достигается с нулевой вероятностью.

Аналогично дискретному случаю для момента продажи τ, если $X_l = t,\ \tau \ge l,$ то

$$\tau = \begin{cases} > l, & t < \int_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du; \\ l, & t \ge \int_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du; \end{cases}$$

$$S_l(t) = \begin{cases} \int_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du, & t < \int_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du; \\ t, & t \ge \int_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du. \end{cases}$$

Для момента покупки актива в момент времени $t = N-1$

$$\sigma = \begin{cases} -, & t > \int_a^b u\ p_{N-1}(t,u)\,du; \\ N-1, & t \le \int_a^b u\ p_{N-1}(t,u)\,du. \end{cases}$$

При этом доходность операции «покупка—продажа»

$$G_{N-1}(t)=\begin{cases}0, & t>\int\limits_a^b u\ p_{N-1}(t,u)\,du;\\ \int\limits_a^b u\ p_{N-1}(t,u)\,du-t, & t\le\int\limits_a^b u\ p_{N-1}(t,u)\,du.\end{cases}$$

В произвольный момент времени, если $X_l=t$, $\sigma\ge l$, получаем

$$\sigma=\begin{cases}>l, & t>\int\limits_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du;\\ l, & t\le\int\limits_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du.\end{cases}$$

При этом средняя доходность

$$G_l(t)=\begin{cases}\int\limits_a^b G_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du, & t>\int\limits_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du;\\ \int\limits_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du-t, & t\le\int\limits_a^b S_{l+1}(u)\,p_l(t,u)\,du.\end{cases}$$

Рассмотрим пример модели, которая в некотором смысле является аналогом модели Эренфестов для дискретного случая. Плотность переходных вероятностей имеет вид $p_l(x,y)=\dfrac{e^{-(y-x/2)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, т. е. если цена вышла на уровень x, то ее «тянет» к середине отрезка [0, x]

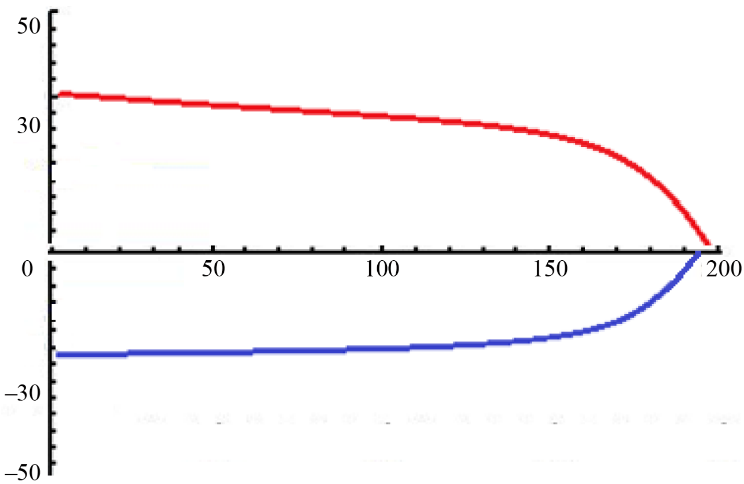

Рис. 9. Правила остановки для непрерывной марковской цепи

(к началу координат). Графики на рис. 9 описывают стратегию покупки и продажи актива при условии, что характер изменения его цены описывается данной моделью марковской цепи. Расчет проводился для $N = 200$.

Стратегии в данной модели и в модели Эренфестов сходны с тем лишь различием, что в модели Эренфестов точкой притяжения является середина отрезка $[1, m]$, а в данной модели — начало координат. Зависимости доходности от исходного состояния марковской цепи на фиксированном промежутке времени и от длительности игры для фиксированного состояния аналогичны зависимостям, изображенным на рис. 7 и 8 для модели Эренфестов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ширяев А.Н. *Статистический последовательный анализ*. Москва, Наука, 1976.

[2] Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики*. Т. 1, 2. Москва, Фазис, 1998.

[3] Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. *Теория оптимальных правил остановки*. Москва, Наука, 1977.

[4] Николаев М.Л. Об одном способе отыскания цены в задаче многократной остановки. *Сб. «Всерос. школа-коллоквиум по стохастическим методам». Тез. докл.* Москва, ТВП, 1995, с. 108–110.

[5] Березовский Б.А., Гендин А.В. *Задача наилучшего выбора*. Москва, Наука, 1981.

[6] Розов А.К. *Оптимальные правила остановки и их применения*. Санкт-Петербург, Политехника, 2012.

[7] Wilson J. Optimal Choice and Assignment of the Best *m* of *n* Randomly Arriving Items. *Stoch. Proc. and Appl*, 1991, vol. 39, pp. 325–343.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Анферова А.В., Ветров Л.Г., Сунчалина А.Л. Об одной задаче оптимальной остановки марковских цепей. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1161.html

Анферова Анна Валерьевна родилась в 1993 г. Студентка четвертого курса кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: прикладная математика. e-mail: anna_anferova@mail.ru

Ветров Леонид Георгиевич родился в 1954 г. Окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1976 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в теории вероятностей, случайных процессов и теории надежности. e-mail: lvetrov@mail.ru

Сунчалина Анна Леонидовна родилась в 1981 г. Окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в теории вероятностей, математической статистики, страховой математики и теории надежности. e-mail: sunchalina@mail.ru