

Моделирование закономерностей проявления масштабного эффекта при динамическом нагружении образцов простейших конфигураций

© А.А. Сиделёв, В.Н. Белов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Проанализированы результаты лабораторных испытаний образцов медной проволоки и хлопчатобумажной нити на одноосное растяжение, проведенных авторами в целях изучения влияния длины образца на его динамическую прочность. Отмечено устойчивое изменение средней прочности и характеристик разброса при увеличении длины образцов. Полученные данные сопоставлены с результатами полномасштабного имитационного эксперимента. Результаты работы могут использоваться для построения стохастических прочностных моделей плоских и объемных образцов при других типах нагружения (циклическом, статическом).

Ключевые слова: масштабный эффект, прочность, разрушение, одноосное растяжение, эксперименты по динамическому нагружению, математическая модель.

Введение. При конструировании деталей механизмов и машин, зданий и сооружений инженеры неизбежно сталкиваются с проблемой прочности, которая предполагает поиск компромисса между силовыми воздействиями на объект, его физико-механическими свойствами, размерами, назначением. При исследовании закономерностей необратимого процесса накопления повреждений в испытуемом твердом теле представляют большой теоретический и практический интерес причины масштабного (размерного) эффекта, который на макроуровне заключается в уменьшении удельной прочности образцов с увеличением их размеров (при сохранении вида напряженного состояния образца). Особенно сильно масштабный эффект проявляется в том случае, если материал изучаемого объекта является структурно неоднородным [1–3].

Сложность и дискуссионность проблемы масштабного эффекта проявилась, начиная с работ Леонардо да Винчи (1500-е гг.), установившего увеличение разрывающей силы с уменьшением длины испытываемой проволоки. Этот вывод не поддержал Г. Галилей (1638): при испытаниях на растяжение сила, разрывающая стержень, пропорциональна площади его поперечного сечения и не зависит от длины.

Одна из первых гипотез, объясняющих природу масштабного эффекта, принадлежит А.П. Александрову и С.Н. Журкову (1933), экспериментировавших подобно А. Гриффитсу (1921) с образцами из

стекла в виде нитей. Было показано, что с увеличением диаметра средняя удельная прочность 18 нитей уменьшается с одновременным уменьшением разброса данных.

В реальных твердых телах всегда имеются внутренние дефекты в виде вакансий, дислокаций, трещин, включений микрообъемов разной прочности, распределенных по объему случайным образом. Чем больше объем тела, тем больше в нем дефектов и тем ниже его прочность. Гипотезы, объясняющие масштабный эффект с позиций наиболее слабого звена, получили название статистических. Согласно статистической гипотезе, всегда существует закономерный разброс экспериментально определяемых значений прочности, при этом чаще всего чем мельче образцы, тем меньше вариация значений прочности. Особенно отчетливо статистическая природа прочности твердых тел отражена в работе В. Вейбулла (1939). В целом результаты испытаний других материалов, выполненных различными авторами на геометрически подобных образцах, далеко не столь однозначны [1, 4–7]. Выделены четыре группы материалов [1, 8, 9]:

1) с увеличением размеров образцов их относительная прочность снижается;

2) с увеличением размеров образцов их относительная прочность возрастает (каменная соль);

3) с увеличением размеров образцов до определенного предела их относительная прочность возрастает, а затем асимптотически снижается до некоторого постоянного значения;

4) с изменением размеров образцов их относительная прочность остается постоянной.

Последние три случая сравнительно редки, техника проведения и результаты экспериментов требуют отдельного анализа [1].

Анализируя результаты своих и известных в литературе экспериментов, М.И. Койфман (1959) и М.М. Протодяконов предложили различать масштабные эффекты первого и второго рода. Масштабный эффект первого рода, или объемный, связан со структурной неоднородностью испытываемого материала, наличием случайно распределенных по объему дефектов. Его предложено называть главным. Масштабный эффект второго рода, или поверхностный, обусловлен качеством обработки поверхности образцов и степенью разрушения (деструкции) приповерхностного слоя. Он существенно сказывается при испытаниях образцов малых размеров. С увеличением объема их прочность под действием объемного масштабного эффекта уменьшается, а под действием поверхностного — возрастает. Поскольку при испытании образцов эти масштабные эффекты проявляются одновременно, то в зависимости от того, какой из них будет преобладающим, такой вид и примет суммарная кривая изменения прочности ма-

териала при изменении размеров образца. Помимо упомянутых существует множество иных интерпретаций масштабного эффекта (энергетический, технологический и т. д.).

Анализ многочисленных публикаций, посвященных количественной оценке масштабного эффекта [1], показывает, что сегодня нет общепризнанной интерпретации всех особенностей его проявления, в основе которой лежала бы адекватная физическая модель, учитывающая основные ослабляющие микро- и макродефекты, а также особенности их нагружения. Ни одна из существующих моделей, в том числе и широко известная модель Вейбулла, не позволяет оценить степень разброса характеристик динамической прочности σ образцов с увеличением их длины (для образцов стандартной конфигурации) [1–3, 5], либо прогноз оставляет желать много лучшего. В частности, в рамках модели Вейбулла [1–3] и в моделях, построенных с использованием гауссовских случайных процессов [3], не удастся точно описать динамику уменьшения прочности объекта с ростом размеров. При этом экспериментаторы столкнулись с тем фактом, что при констатации устойчивого уменьшения средней прочности объектов (математического ожидания MX) с увеличением их длины характеристика разброса (коэффициент вариации Cv) в большинстве случаев весьма нестабильна. Особенно это проявляется в тех случаях, когда объекты для исследований в целях обеспечения чистоты эксперимента отбирались случайным образом (принцип рандомизации) [1–4]. При этом в одних работах отмечается возрастание Cv , а в других — убывание по мере увеличения длины образца [1]. Все указанное поддерживает скептицизм в отношении перспектив развития стохастических моделей применительно к описанию прочности макрообразцов.

Авторы настоящей работы, оценивая сложность обсуждаемой проблемы, сосредоточили свое внимание на исследовании случая, когда испытаниям подвергаются образцы, размер которых изменяется в одном направлении – по длине (проволока, нить, пруток, полоса, цепь и т. п.) [1]. При этом легче исследовать конкуренцию поверхностного и объемного эффектов. Кроме того, для создания имитационной прочностной модели достаточно использовать дискретную реализацию стационарного случайного процесса при минимальном числе определяемых параметров, что сделает общедоступной процедуру контроля достоверности предлагаемого авторами имитационного эксперимента. Помимо этого по специальной программе был проведен обширный натурный эксперимент с определением динамической прочности образцов из медной проволоки (структурный элемент — зерно, конгломерат зерен) и хлопчатобумажной нити (структурные элементы — хлопковые волокна).

Постановка и решение задачи. В рамках исследования было необходимо: 1) разработать стохастическую прочностную модель для образцов сравнительно простой конфигурации, которая позволит при увеличении длины образца адекватно прогнозировать не только уменьшение средней динамической прочности, но и изменение меры ее разброса (C_v); 2) провести контрольные натурные эксперименты для проверки адекватности разработанной имитационной модели.

Предлагаемая структурно-стохастическая модель базируется на специально разработанной процедуре моделирования дискретной реализации стационарного негауссовского процесса с автокорреляционной функции (АКФ) специального вида.

В ней заложены два важнейших предположения: 1) разрыв образца происходит в том месте, где прочность минимальна (модель слабейшего звена); 2) между прочностными характеристиками соседних участков (микроучастков) существует связь.

Изменение динамической прочности σ по длине объекта предлагается рассматривать как реализацию некоторого случайного процесса (СП) $\eta(t)$, где вместо обычного времени t используется координата соответствующей точки объекта ($t \in [0, l]$, l — длина образца).

Сложность решаемой задачи проявилась в том, что оба предположения отнюдь не новы [3], и только тщательный статистический анализ обширных экспериментальных данных из более чем 400 источников [1] позволил выделить новые, достаточно тонкие закономерности (например, в поведении коэффициента вариации при увеличении длины образца), которые дали возможность усовершенствовать алгоритм моделирования.

Принципиальным моментом исследования явилось взаимообогащение проводимых параллельно натурных и имитационных экспериментов. При этом фон для проведения имитационного эксперимента не был вдохновляющим, поскольку попытки предшественников заканчивались не вполне удачно (см., например, [3]), поэтому перед постановкой имитационного эксперимента авторы провели большую работу по созданию алгоритма моделирования на основе анализа результатов испытаний на динамическое растяжение образцов медной проволоки и хлопчатобумажной нити при различных скоростях линейного нагружения. Воспользоваться результатами опубликованных экспериментов было невозможно по той причине, что, по предположению авторов, именно процедура случайного отбора образцов обуславливает нестабильность параметра C_v . Помимо этого было необходимо уточнить вид АКФ и дополнительно оценить влияние зажимной длины (части образца с обоих концов для его фиксации в зажимном устройстве) образца и объема выборок.

На рис. 1 и 2 представлены выборочные АКФ и их аппроксимации по модели $R(\tau)$. Отметим, что в работе [3] при моделировании прочности полос из бумаги использовали АКФ экспоненциального вида.

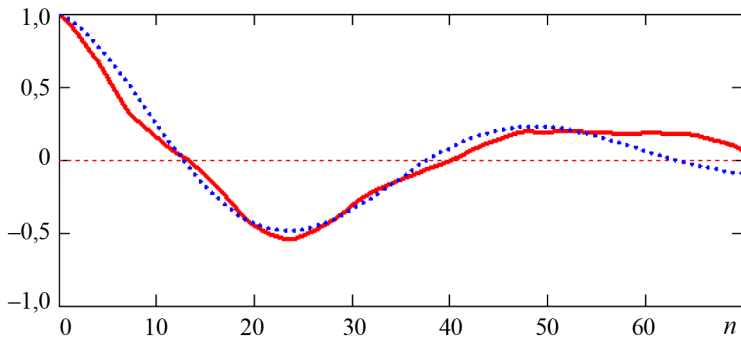


Рис. 1. Выборочная АКФ (сплошная линия) и аппроксимация (пунктирная линия). Образцы медной проволоки длиной 5 см (n — порядковый номер образца)

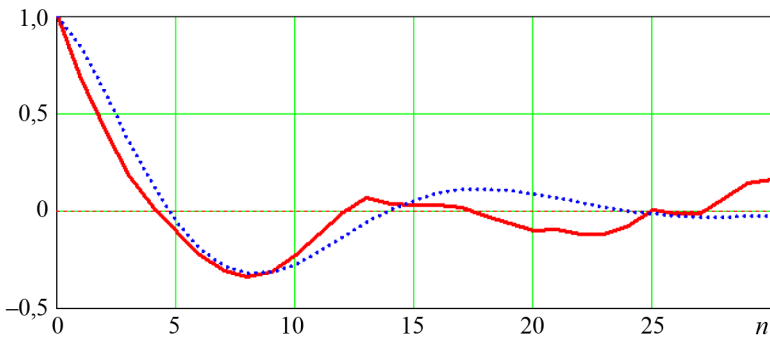


Рис. 2. Выборочная АКФ (сплошная линия) и аппроксимация (пунктирная линия). Образцы хлопчатобумажной нити длиной 3 см

В итоге выкристаллизовался следующий алгоритм моделирования случайного процесса $\eta(t)$.

1. По результатам эксперимента была построена эмпирическая АКФ и выбран класс АКФ для алгоритма моделирования.

2. По методу наименьших квадратов оценивались параметры α и ω АКФ:

$$R(\tau) = \sigma_1^2 \exp(-\alpha |\tau|) \cos(\omega\tau).$$

3. Моделировался гауссовский СП (однородный стационарный эргодический) $\xi(t)$ с указанной АКФ.

4. Безынерционным преобразованием $\eta(t) = \psi(\xi(t))$ строился негауссовский СП $\eta(t)$. В качестве функции преобразования $\psi(\xi)$ до-

статочно использовать четырехпараметрическую степенную зависимость вида $\psi(\xi) = A(\xi + D)^K + B$. Параметры A, B, D, K оцениваются по экспериментальным данным. Именно такой вид функции $\psi(\xi)$ — результат обработки многочисленных экспериментальных данных по динамической, циклической и статической прочности различных типов образцов из разных материалов [1].

Обсуждение результатов. С помощью описанной имитационной модели на основании данных о прочности образцов хлопчатобумажной нити малой длины (3 см) получены достаточно точные результаты для образцов большей длины — 6, 9, 18, 30 и 51 см. Максимальная погрешность прогноза по среднему значению динамической прочности MX составила 1,5 %, по Cv — 9 %. Опыт работы с предложенной имитационной моделью показал, что хорошее качество прогноза достигается уже в том случае, когда значения четырех характеристик — MX (среднее ожидаемое значение), Cv (коэффициент вариации), As (коэффициент асимметрии), Ex (эксцесс) — экспериментальной и расчетной выборки для образцов длиной 3 см совпадают.

При обработке данных по динамической прочности медной проволоки (в работе использовали результаты собственных экспериментов по испытанию образцов длиной 5, 10, 20 и 40 см) качество прогноза оказалось еще лучше: расхождение экспериментальных и расчетных значений MX и Cv не превышало 1 %. На графике (рис. 3) результаты экспериментов и моделирования практически сливаются в единую кривую.

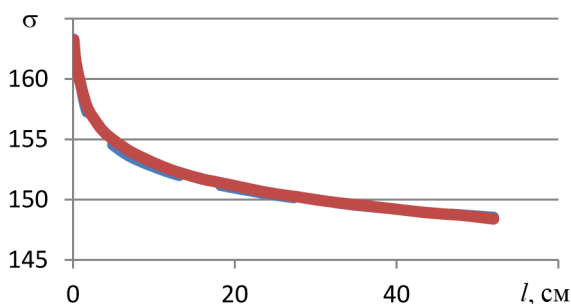


Рис. 3. Изменение средней прочности медной проволоки с увеличением ее длины

Помимо этого, используя данные о прочности образцов оптоволоконной нити длиной 10 м [5], по разработанному алгоритму удалось получить не только хороший прогноз MX и Cv для длин 20, 30, 40, 50 м, но и достаточно точный прогноз нагрузки, при которой происходит разрыв 10 % стеклонитей длиной 1 100 м (погрешность составила менее 15 %) [5].

В рамках предложенной стохастической модели выявлено, что значение C_v возрастает до достижения определенной длины образцов хлопчатобумажной нити, а затем начинает убывать (рис. 4). Такое же поведение C_v впервые обнаружено авторами в собственных экспериментах. Ясно, что именно такой, несколько неожиданный характер изменения коэффициента вариации и явился причиной недоразумений при интерпретации другими авторами результатов сходных экспериментов [7].

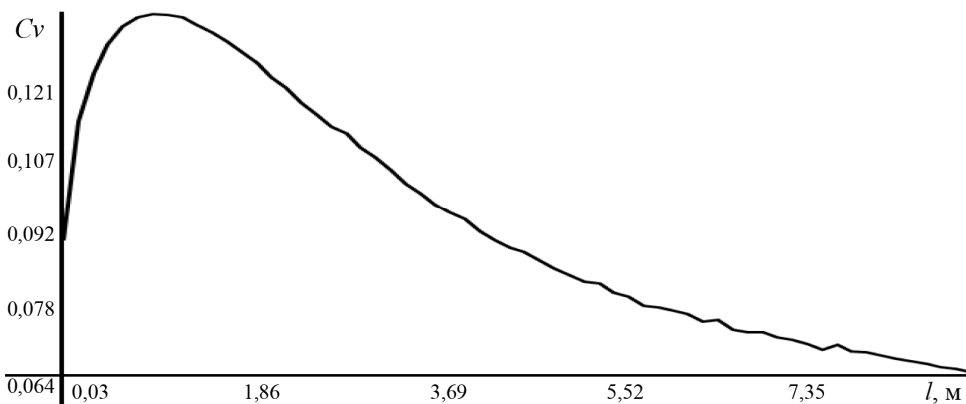


Рис. 4. Зависимость C_v от длины l образца

Разработанная модель была также использована для оценки влияния на достоверность экспериментальных значений зажимной длины образца. Показано, что если зажимная длина с каждой стороны образца составляет не более $1/15$ длины образца, то ее влиянием на параметры АКФ можно пренебречь. Установлено, что при наличии зажимной длины реальные значения параметров АКФ (α и ω) оказываются немного меньше наблюдаемых. Отношения их расчетных значений к экспериментальным приведены ниже (принято, что на зажим с каждой стороны образца — отрезка нити — использовано по 1 единице его длины):

Длина отрезка, ед.	1	2	4	6	8
Отношение:					
α	2,89	1,96	1,48	1,32	1,23
ω	2,91	1,91	1,47	1,32	1,21

В то же время однозначного влияния зажимной длины на характеристики M_X , C_v , A_s , E_x не выявлено.

В рамках обсуждаемой модели с увеличением длины образца в 2 раза значение параметра ω возрастает во столько же раз (что и следовало ожидать!), параметр α в среднем также увеличивается примерно в 2 раза. Важно отметить, что работа с моделью требует внимательности и успех во многом зависит от грамотного использования

редко употребляемых в этих случаях характеристик типа As и Ex . Несовпадение между расчетными (смоделированными) и экспериментальными значениями As и Ex для опорной длины образца существенно влияет на качество прогноза MX и Cv для образцов большей длины. Если совпадения добиться не удастся, предлагаем учесть следующие рекомендации.

В случае $As < 0$ необходимо, чтобы расчетное значение As было меньше экспериментального, а Ex — больше, и наоборот. Если $Ex < 0$, то при подборе параметров следует обеспечить, чтобы ошибка при определении значения Ex не превышала $0,6\Delta As$, а если $Ex > 0$, то ошибка при определении значения As не должна превышать $0,7\Delta Ex$;

В случае $As > 0$ необходимо обеспечить, чтобы ошибка при определении значения As не превышала $0,4\Delta Ex$.

Объем каждой из экспериментальных выборок в экспериментах с хлопчатобумажной нитью и медной проволокой изначально равнялся 200 образцам. Для того чтобы оценить минимальный объем выборки, необходимый для получения стабильных экспериментальных результатов, были проведены дополнительные исследования, в том числе на имитационной модели. Рисунок 5 отражает характер изменения исследуемых характеристик — MX , Cv , As , Ex — для хлопчатобумажной нити длиной 3 см при увеличении числа испытываемых образцов (по оси абсцисс откладывается объем выборки).

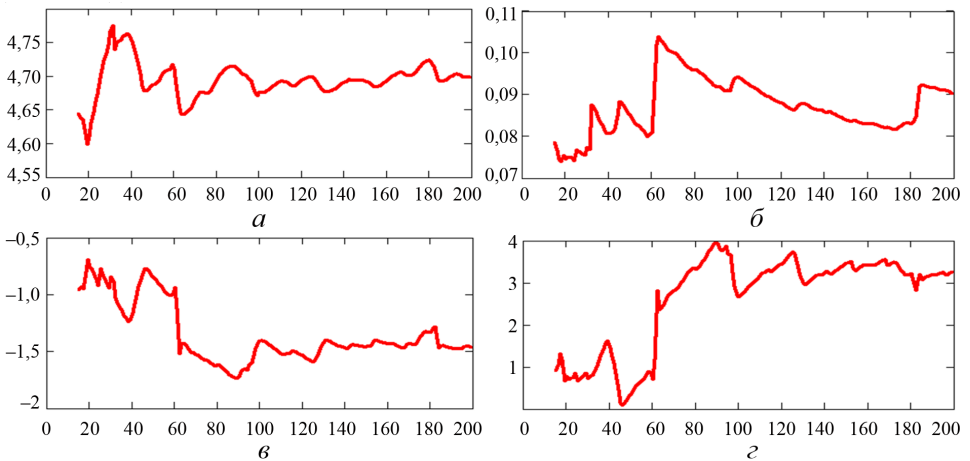


Рис. 5. Изменение оценки MX (а), Cv (б), As (в), Ex (г) с увеличением объема выборки

Аналогичные исследования, проведенные и для других материалов, показали, что объем выборок, необходимых для получения эффективного прогноза динамической прочности объектов большей длины, не должен быть менее 70 элементов.

Выводы. В работе впервые установлен характер изменения коэффициента вариации динамической прочности для образцов сравнительно простой конфигурации (вытянутых вдоль одной оси) по результатам многочисленных натуральных экспериментов на одноосное растяжение образцов из медной проволоки и хлопчатобумажных нитей по специально разработанным программам. Осуществлен сопоставительный анализ экспериментальных данных с результатами имитационного моделирования, реализованного по разработанному авторами алгоритму. Полное совпадение результатов позволяет сделать вывод о том, что их можно использовать для построения стохастических прочностных моделей плоских и объемных образцов, например, в рамках имитационных процедур, в том числе для других видов нагружения (циклическом, статическом). При этом развиваемый подход позволяет обойтись минимальным количеством исходных опытных данных, а проведенный анализ стохастической природы объекта и законов распределения прочности делает предлагаемые модели достаточно адекватными и надежными. Помимо этого результаты имитационных экспериментов открывают путь к аналитическому описанию выявляемых закономерностей изменения характеристик прочности при варьировании размеров объектов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белов В.Н. *Стохастические модели временных процессов в разных областях науки и техники*. Волгоград, Политехник, 2002, 216 с.
- [2] Taryal В.К., Kalish D. Mechanical Behavior of Optical Fiber. *Fracture Mechanics of Ceramics*, 1978, vol. 3, pp. 161–175.
- [3] Лидбетгер М., Ротсен Х., Линдгрэн Г. *Экстремумы случайных последовательностей и процессов*. Москва, Мир, 1989, 392 с.
- [4] Fengjun Shi, Jinlian Hu. The Effect of Test Length on Strength of Cotton Yarns. *Research Journal of Textile and Apparel*, 2001, vol. 5, no. 1, pp.18–25.
- [5] Шабуневич В.И. О масштабном эффекте исследуемых объектов. *Тр. НПП ВНИИЭМ (Вопросы электромеханики)*, 2010, т. 116, № 3, с. 13–16.
- [6] Bouten P.C.P. *Lifetime of Pristine Optical Fibres. Ph. Diss.Thesis*. Eindhoven: Technical University, 1987, 140 p.
- [7] Литвинский Г.Г. *Аналитическая теория прочности горных пород и массивов*. Донецк, Норд-Пресс, 2008. 207 с.
- [8] Шашенко А.Н., Сдвижкова Е.А., Кужель С.В. *Масштабный эффект в горных породах*. Донецк, Норд-Пресс, 2004, 126 с.
- [9] Bazant Z.P. *Scaling of Structural Strength*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013, 295 p.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сиделёв А.А., Белов В.Н. Моделирование закономерностей проявления масштабного эффекта при динамическом нагружении образцов простейших конфигураций. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1160.html>

Белов Владимир Николаевич, д-р техн. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 80 работ в области оценки надежности и прочности технических систем. e-mail: vbelov2000@mail.ru

Сидёлев Андрей Александрович, аспирант кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 работ в области оценки надежности и прочности технических систем.