УДК 519.248

Перколяция в конечной полосе для непрерывных гиббсовских полей

© П.В. Храпов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Решена задача о перколяции случайного поля в конечной полосе для непрерывных гиббсовских полей. Центры дефектов задаются гиббсовским точечным полем с некоторым потенциалом (относительно стандартной пуассоновской меры с параметром интенсивности z *в конечном объеме). На множестве форм дефектов (с центром в точках гиббсовского поля) задано распределение вероятностей. Распределение вероятностей на множестве дефектов такое, что порождаемое им распределение на точечных конфигурациях центров дефектов совпадает с гиббсовским распределением, а условные распределения для форм дефектов независимы при условии, что конфигурация центров дефектов фиксирована. Протекание означает, что в конфигурации дефектов нашелся связный контур из дефектов, соединяющий верхнее и нижнее основания цилиндра. Для достаточно малых параметров интенсивности пуассоновской меры в работе исследованы вероятность того, что конфигурация не допускает протекания, а также асимптотика вероятностей наличия в конфигурации* l *контуров протекания при некоторых соотношениях между* S *и* z. *Доказана предельная теорема пуассоновского типа. Показано, что при некоторых условиях мультипликативного характера, налагаемых на форму цилиндра и параметр интенсивности* z, *распределение вероятностей количества дефектных контуров сходится к пуассоновскому распределению.*

Ключевые слова: *перколяция, гиббсовское поле, дефект, контур протекания, предельные теоремы пуассоновского типа.*

Обозначим через C_Λ совокупность конечных подмножеств точек $C=\{x_i\}_{i=1}^{k}$, $x_i\in\Lambda\subset\mathbb{R}^\nu$, $i=1,...,k$, $k\geq 0$ области Λ. В пространстве C_Λ естественно вводится топология, борелевская σ-алгебра и стандартная мера μ_0^Λ (пуассоновская мера в конечном объеме), определяемая параметром z. Пусть μ^Λ — гиббсовская мера в пространстве C_Λ, определяемая плотностью

$$\frac{d\mu^\Lambda}{d\mu_0^\Lambda}=Z_\Lambda^{-1}\exp\{-\beta H(c)\}, \tag{1}$$

где $H(c)=\sum\limits_{x,y\in c,x\neq y}U(x,y)$; $Z_\Lambda=\int\limits_{C_\Lambda}\exp\{-\beta H(c)\}d\mu_0^\Lambda$.

Рассмотрим некоторое конечно-параметрическое семейство $S_0 = \{\theta(y), y \in D, O \in \theta(y)\}$ ограниченных областей, где параметр y пробегает некоторую область $D \subset \mathbb{R}^m$ и $\theta(y)$ гладко зависит от y. Возьмем $S_x = \{\theta(y) + x, y \in D\}$ в качестве пространства дефектов с центром в точке x.

Предположим, что на S_x или, что одно и то же, на множестве параметров D, задано распределение вероятностей ω. Определим маркированное точечное поле, т. е. вероятностную меру на совокупности маркированных подмножеств $\{\hat{c}\} = C_\Lambda^D$, где $\hat{c} = \{\theta_x(y), x \in c, y \in D\}$ — функция на c, отображающая каждую точку $x \in c$ на соответствующую область $\theta \in S_x$. Распределение вероятностей на множестве $\{\hat{c}\}$ такое, что порождаемое им распределение на точечных конфигурациях c совпадает с гиббсовским распределением (1), а условные распределения для значений $\theta_x(y)$, $x \in c$ (при условии, что c фиксировано) независимы и каждое имеет распределение ω. Например, пусть $\theta(y)$ — шар радиусом y с центром в нуле, $y \le \bar{D}/2$. Тогда

а) $d\omega(y) = \dfrac{2}{\bar{D}} dy$, если $y \le \bar{D}/2$, и нуль, если $y > \bar{D}/2$;

б) $d\omega(y) = \delta(y - \bar{D}/2)dy$, dy — мера Лебега.

Будем считать, что подмножество $\hat{g} \subset \hat{c}$ конфигурации $\hat{c}$, $\hat{g} = \{(x_1, \theta_{x_1}), ..., (x_n, \theta_{x_n})\} \subset \hat{c}$, является контуром, если набор дефектов $\{\theta_{x_i}\}$ из $\hat{g}$ является связным. Протекание означает, что в конфигурации $\hat{c}$ нашелся контур, соединяющий верхнее и нижнее основания цилиндра $\Lambda = S \times h \subset \mathbb{R}^\nu$, $S \subset \mathbb{R}^{\nu-1}$, $h \subset \mathbb{R}$. Такие контуры назовем контурами протекания. Множество контуров протекания в C_Λ^D обозначим через $\tilde{R}$, а число контуров протекания в конфигурации $\hat{c}$ через $\zeta(\hat{c})$.

В работе для достаточно малых $z = z(\beta)$ исследуется вероятность $H_0(S, h, z, \beta)$ того, что конфигурация не допускает протекания (кратко — вероятность непротекания), а также асимптотика вероятностей $H_l(S, h, z, \beta) = \Pr\{\hat{c} : \zeta(\hat{c}) = l\}$ при некоторых соотношениях между S и z. Необходимость в исследовании задач такого типа обоснована в [1]. Случай, когда $H(c) \equiv 0$ и дефекты представляют собой шары фиксированного радиуса, подробно рассмотрен в работе [2], обобщение проведено в [3], решеточные модели описаны в [4], математический аппарат кластерных разложений приведен в [5–7].

Для получения содержательных результатов, а также и для того чтобы за общностью построений не потерять идею решения, введем следующие ограничения на рассматриваемый потенциал и плотность распределения формы дефектов:

1) трансляционная инвариантность $U(x_1, x_2) = \tilde{U}(x_1 - x_2)$, где $\tilde{U}(x)$, $x \in R^{\nu}$, $x \neq 0$ — четная функция на $R^{\nu} \setminus \{0\}$;
2) $\sum_{i=1}^{n} \tilde{U}(x_i) \geq -2B$, из чего следует условие устойчивости. Примеры таких потенциалов приведены в [8];
3) $\tilde{U}(x) = 0$ при $|x| > \bar{R}$, т. е. потенциал финитный;
4) $\omega_x(\theta_x) = 0$, если $\operatorname{diam}\{\theta_x\} > \bar{D}$.

Будем также считать, что и дефекты, и потенциал удовлетворяют условиям, при которых имеют смысл написанные в настоящей работе формулы.

Пример 1. Дефекты имеют шаровую (эллипсоидную) форму с фиксированным радиусом $r_0 = r/2$ (соответственно с фиксированными полуосями a и b), и выполняется равенство

$$P_{\Lambda, z, \beta}(c) = z^{N(c)} e^{-\beta H(c)} \Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)$$

относительно меры dc:

$$dc\Big|_{N(c)=k} = \frac{dx_1 \ldots dx_k}{k!},$$

где dx — обычная мера Лебега.

Пример 2. $H(c) \equiv 0$, т. е. поле является пуассоновским с параметром z. В этом случае

$$P_{\Lambda, z}(\hat{c}) = z^{N(\hat{c})} \Xi^{-1}(\Lambda, z)$$

относительно меры $d\hat{c}$:

$$d\hat{c}\Big|_{N(\hat{c})=k} = \frac{dx_1 \ldots dx_k}{k!} d\omega_{x_1} \ldots d\omega_{x_k}.$$

В общем случае можно записать

$$P_{\Lambda, z, \beta}(\hat{c}) = z^{N(\hat{c})} e^{-\beta H(\hat{c})} \Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta) \qquad (2)$$

относительно меры $d\hat{c}$.

Прежде чем сформулировать результаты, введем необходимые определения.

Пусть $\mathcal{B}_\Lambda$ — совокупность всех контуров $g=\{(x_1,\theta_{x_1}),\dots,(x_n,\theta_{x_n})\}$, $n=0,1,\dots$; $\tilde{R}$ — совокупность контуров протекания. Введем на $\mathcal{B}_\Lambda$ такую меру dg, что ее ограничение на n-дефектных контурах $g=\{(x_1,\theta_{x_1}),\dots,(x_n,\theta_{x_n})\}$ равно $dg\Big|_{N(g)=n}=\dfrac{dx_1\dots dx_n}{n!}d\theta_{x_1}\dots d\theta_{x_n}$.

Обозначим через $\Gamma_{\Lambda,k}$ совокупность наборов любых контуров $\mathcal{G}=\{g_1,\dots,g_k\}$, $g_i\in\mathcal{B}_\Lambda$, $i=1,\dots,k$, $k\ge 0$. На $\Gamma_\Lambda=\bigcup\limits_{k\ge 0}\Gamma_{\Lambda,k}$ определим меру $d\kappa$, сужение которой на $\Gamma_{\Lambda,k}$ составляет $d\kappa\Big|_{\Gamma_{\Lambda,k}}=\dfrac{dg_1\dots dg_k}{k!}$.

Распределение (2) в пространстве C_Λ^D порождает распределение в пространстве Γ_Λ, плотность которого относительно меры $d\kappa$

$$P_{\Lambda,z,\beta}(\mathcal{G})=\prod_{g\in\mathcal{G}}z^{n(g)}e^{-\beta H(\mathcal{G})}\prod_{g,h\in\mathcal{G}}\chi_{g,h}\Xi^{-1}(\Lambda,z,\beta). \tag{3}$$

Здесь

$$H(\mathcal{G})=H_1(\mathcal{G})+H_2(\mathcal{G})=\sum_{g,h\in\mathcal{G}}V_1(g,h)+\sum_{g\in\mathcal{G}}V_2(g);$$

$$V_1(g,h)=\sum_{x\in g,y\in h}U(x,y);\quad H_1(\mathcal{G})=\sum_{g,h\in\mathcal{G}}V_1(g,h);$$

$$V_2(g)=\sum_{x,y\in g}U(x,y);\quad H_2(\mathcal{G})=\sum_{g\in\mathcal{G}}V_2(g);$$

$\chi_{g,h}=1$, если $g\cap h=\varnothing$, и $\chi_{g,h}=0$ — в остальных случаях.

Перепишем плотность распределения (3) в следующем виде:

$$P_{\Lambda,z,\beta}(\mathcal{G})=\prod_{g\in\mathcal{G}}[z^{n(g)}e^{-\beta V_2(\mathcal{G})}]\prod_{g,h\in\mathcal{G}}\chi_{g,h}e^{-\beta V_1(g,h)}\Xi^{-1}(\Lambda,z,\beta).$$

Рассмотрим распределение вероятностей в пространстве Γ_Λ с плотностью относительно $d\kappa$:

$$P_{\Lambda,z,\beta}(\mathcal{G},\zeta)=\prod_{g\in\mathcal{G}}[z^{n(g)}e^{-\beta V_2(g)}\zeta(g)]\prod_{g,h\in\mathcal{G}}\chi_{g,h}e^{-\beta V_1(g,h)}\Xi^{-1}(\Lambda,z,\beta,\zeta), \tag{4}$$

где $\zeta(g)$ — произвольная измеримая положительная функция для определенности $0\le\zeta(g)\le 1$.

Как видим, вероятность непротекания

$$H_0(S,h,z,\beta)=\Xi(\Lambda,z,\beta,\zeta_1)/\Xi(\Lambda,z,\beta,1), \tag{5}$$

где $\zeta_1(g)=1$, если $g\notin\tilde{R}$, и $\zeta_1(g)=0$, если $g\in\tilde{R}$.

Для формулировки вспомогательной леммы введем величины $\varepsilon(g)=e^{-\beta V_2(g)}\zeta(g)$, $\hat{\chi}_{g,h}=e^{-\beta V_1(g,h)}\chi_{g,h}$, а также $T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})$, определяемые рекуррентной системой уравнений

$$T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})=z^{n(\pi(\mathcal{G}))}\times\prod_{g'\in\mathcal{G}'}\hat{\chi}_{\pi(\mathcal{G}),g'}[T_{z,\beta}(\mathcal{G}',\tilde{\mathcal{G}})+$$

$$+\sum_{\mathcal{G}_1\subset\tilde{\mathcal{G}}}K(\pi(\mathcal{G}),\mathcal{G}_1)T_{z,\beta}(\mathcal{G}'\cup\mathcal{G}_1,\tilde{\mathcal{G}}\setminus\mathcal{G}_1)];$$

$$T_{z,\beta}(g,\tilde{\mathcal{G}})=z^{n(g)}[T_{z,\beta}(\varnothing,\tilde{\mathcal{G}})+\sum_{\mathcal{G}_1\subset\tilde{\mathcal{G}}}K(g,\mathcal{G}_1)T_{z,\beta}(\mathcal{G}_1,\tilde{\mathcal{G}}\setminus\mathcal{G}_1)],\qquad(6)$$

где $T_{z,\beta}(\varnothing,\varnothing)=1$, $T_{z,\beta}(\varnothing,\tilde{\mathcal{G}})=0$ при $\tilde{\mathcal{G}}\neq\varnothing$.

В системе уравнений (6) $\pi(\mathcal{G})$ — выделенный фиксированный контур в $\mathcal{G}=\{g_1,...,g_k\}$, $\mathcal{G}'=\mathcal{G}\setminus\pi(\mathcal{G})$; $K(g,\mathcal{G}_1)=\prod_{g_1\in\mathcal{G}_1}(\hat{\chi}_{g,g_1}-1)$, $K(g,\varnothing)=1$.

Лемма 1 (основная). При достаточно малых z, таких, что

$$e\sum_{n=1}^{\infty}(e^{3\beta B+1}\pi\hat{R}^2z)^n<1,\ \hat{R}=\max\{\overline{R},\overline{D}\},\qquad(7)$$

и ограничениях 1–4

$$\ln\Xi(\Lambda,z,\beta,\zeta)=\int_{\Gamma_\Lambda}\psi_z(\mathcal{G})\prod_{g\in\mathcal{G}}\varepsilon(g)d\kappa(\mathcal{G}),$$

где

$$\psi_z(\mathcal{G})=\int_0^z t^{-1}(\sum_{g\in\mathcal{G}}n(g)T_t(g,\mathcal{G}\setminus g))dt.$$

Из леммы 1 и формулы (5) сразу вытекает следующая теорема.

Теорема 1. При достаточно малых z, удовлетворяющих соотношению (7), вероятность непротекания

$$H_0(S,h,z,\beta)=\exp\{\int_{\Gamma_\Lambda}\psi_z(\mathcal{G})\prod_{g\in\mathcal{G}}e^{-\beta V_2(g)}[\prod_{g\in\mathcal{G}}\zeta_1(g)-1]d\kappa(\mathcal{G})\}.$$

Из теоремы 1 ясно, что при достаточно малых $z=z(\beta)$ можно $H_0(S,h,z,\beta)$ представить в виде

$$H_0(S,h,z,\beta)=\exp\{-a_0(S,h,\beta)z^n-a_1(S,h,\beta)z^{n+1}-...\}.\qquad(8)$$

Пользуясь представлением (8), легко вывести следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $S = L \subset R^1$, h фиксировано, λ — произвольное положительное число, при $L_k \to \infty$, $z_k \to 0$ выполнено равенство

$$a_0(L_k, h, \beta) z_k^n = \lambda ,$$

где n — минимальная степень z, входящая в разложение (8). Тогда

$$H_l(L_k, h, z_k, \beta) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!} .$$

Теорема 2 доказывается точно так же, как и аналогичная теорема в [3].

Доказательство леммы 1. Перепишем формулы (4) в следующем виде:

$$P_{\Lambda,z,\beta}(\mathcal{G},\zeta) = \prod_{g\in\mathcal{G}} [z^{n(g)}\varepsilon(g)] \prod_{g,h\in\mathcal{G}} \hat{\chi}_{g,h} \Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta, \zeta) .$$

Определим корреляционные функции

$$r(\mathcal{G}) \equiv r_{\Lambda,\zeta}(\mathcal{G}) = \int_{\Gamma_\Lambda} p_{\Lambda,z,\beta}(\mathcal{G} \cup \bar{\mathcal{G}}, \zeta) d\kappa(\bar{\mathcal{G}}) .$$

Лемма 2. Имеют место следующие корреляционные уравнения:

$$\begin{aligned} r(\mathcal{G}) = z^{n(\pi(\mathcal{G}))}\varepsilon(\pi(\mathcal{G})) \prod_{g'\in\mathcal{G}'} \hat{\chi}_{\pi(\mathcal{G}),g'} [r(\mathcal{G}') + \\ + \int_{\bigcup_{p\geq 1}\Gamma_{\Lambda,p}} K(\pi(\mathcal{G}), \tilde{\mathcal{G}}) r(\mathcal{G}' \cup \tilde{\mathcal{G}}) d\kappa(\tilde{\mathcal{G}})]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$r(g) = z^{n(g)}\varepsilon(g)[1 + \int_{\bigcup_{p\geq 1}\Gamma_{\Lambda,p}} K(g, \tilde{\mathcal{G}}) r(g \cup \tilde{\mathcal{G}}) d\kappa(\tilde{\mathcal{G}})] .$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{G}_m = \{g_1, ..., g_m\}$ наборы из m контуров. Тогда

$$r(\mathcal{G}_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma_{\Lambda,n}} p_{\Lambda,z,\beta}(\mathcal{G}_m \cup \bar{\mathcal{G}}, \zeta) d\kappa(\bar{\mathcal{G}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma_{\Lambda,n}} p_{\Lambda,z,\beta}(\mathcal{G}_m \cup \bar{\mathcal{G}}_n, \zeta) g \frac{d\bar{g}_1 ... d\bar{g}_n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma_{\Lambda,n}} \prod_{g\in\mathcal{G}_m\cup\mathcal{G}_n} [z^{n(g)}\varepsilon(g)] \prod_{g,h\in\mathcal{G}_m\cup\bar{\mathcal{G}}_n} \hat{\chi}_{g,h} \Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta, \zeta) \frac{d\bar{g}_1 ... d\bar{g}_n}{n!},$$

где $\mathcal{G}'_{m-1} = \mathcal{G}_m \setminus \pi(\mathcal{G}_m)$.

Однако

$$\prod_{g,h\in\mathcal{G}_m\cup\overline{\mathcal{G}}_n}\hat{\chi}_{g,h}=\prod_{h\in\mathcal{G}'_{m-1}}\hat{\chi}_{\pi(\mathcal{G}_m),h}\prod_{g_1,g_2\in\mathcal{G}'_{m-1}\cup\overline{\mathcal{G}}_n}\hat{\chi}_{g_1,g_2}\prod_{g\in\mathcal{G}_n}[(\hat{\chi}_{\pi(\mathcal{G}_m),g}-1)+1].$$

Следовательно,

$$r(\mathcal{G}_m)=z^{n(\pi(\mathcal{G}_m))}\varepsilon(\pi(\mathcal{G}_m))\prod_{h\in\mathcal{G}'_{m-1}}\hat{\chi}_{\pi(\mathcal{G}_m),h}\Xi^{-1}(\Lambda,z,\beta,\zeta)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_{\Lambda,n}}\prod_{g\in\mathcal{G}'_m\cup\overline{\mathcal{G}}_n}[z^{n(g)}\varepsilon(g)][\sum_{\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k\subset\overline{\mathcal{G}}_n}K(\pi(\mathcal{G}_m),\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k)]\prod_{g_1,g_2\in\mathcal{G}'_{m-1}\cup\overline{\mathcal{G}}_n}\hat{\chi}_{g_1,g_2}\frac{d\overline{g}_1\ldots d\overline{g}_n}{n!}.$$

Отсюда

$$r(\mathcal{G}_m)=z^{n(\pi(\mathcal{G}_m))}\varepsilon(\pi(\mathcal{G}_m))\prod_{h\in\mathcal{G}'_{m-1}}\hat{\chi}_{\pi(\mathcal{G}_m),h}\Bigg[r(\mathcal{G}'_{m-1})+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Gamma_{\Lambda,k}}\sum_{n=k}^{\infty}K(\pi(\mathcal{G}_m),\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k)\int_{\Gamma_{\Lambda,n-k}}\prod_{g\in\mathcal{G}'_{m-1}\cup\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k\cup(\overline{\mathcal{G}}_n\setminus\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k)}[z^{n(g)}\varepsilon(g)]\times \tag{10}$$

$$\times\prod_{g_1,g_2\in\mathcal{G}'_{m-1}\cup\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k\cup(\overline{\mathcal{G}}_n\setminus\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k)}\hat{\chi}_{g_1,g_2}\Xi^{-1}(\Lambda,z,\beta,\zeta)C_n^k\frac{d\tilde{g}_1\ldots d\tilde{g}_{n-k}}{n!}d\tilde{g}_{n-k+1}\ldots d\tilde{g}_n\Bigg],$$

где C_n^k — количество способов выбрать k членов $\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k$ из $\overline{\mathcal{G}}_n$, $\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k\subset\overline{\mathcal{G}}_n$. Поэтому

$$r(\mathcal{G}_m)=z^{n(\pi(\mathcal{G}_m))}\varepsilon(\pi(\mathcal{G}_m))\prod_{h\in\mathcal{G}'_{m-1}}\hat{\chi}_{\pi(\mathcal{G}_m),h}\Bigg[r(\mathcal{G}'_{m-1})+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Gamma_{\Lambda,k}}K\left(\pi(\mathcal{G}_m),\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k\right)r\left(\mathcal{G}'_{m-1}\cup\overline{\overline{\mathcal{G}}}_k\right)\frac{d\overline{\overline{g}}_1\ldots d\overline{\overline{g}}_k}{k!}\Bigg].$$

Из условий, накладываемых на потенциал и дефекты, можно изменять порядок суммирования и интегрирования в (10). Точно такие же уравнения получаются и для предельных корреляционных функций в R^{ν}.

Будем искать решение уравнений (9) в виде

$$r(\mathcal{G})=\prod_{g\in\mathcal{G}}\varepsilon(g)\int_{\Gamma_\Lambda}T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})\prod_{h\in\tilde{\mathcal{G}}}\varepsilon(h)d\kappa(\tilde{\mathcal{G}}), \tag{11}$$

где $T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})$ — измеримая функция на пространстве $\Gamma_\Lambda\times\Gamma_\Lambda$, суммируемая по переменной $\tilde{\mathcal{G}}$. Функцию $T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})$ будем называть вириальным ядром (или ядром Урселла), а разложение (11) — вириальным разложением корреляционной функции. Далее воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3. Пусть $\varphi(\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2)$, $f(\mathcal{G})$ — ограниченные суммируемые на пространстве $\Gamma_\Lambda\times\Gamma_\Lambda$ и Γ_Λ соответственно функции. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_\Lambda}\Big(\sum_{\mathcal{G}^{(1)}\subset\mathcal{G}}\varphi(\mathcal{G}^{(1)},\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}^{(1)})\Big)f(\mathcal{G})d\kappa(\mathcal{G})=$$
$$=\int\limits_{\Gamma_\Lambda}\int\limits_{\Gamma_\Lambda}\varphi(\mathcal{G}^{(1)},\mathcal{G}^{(2)})f(\mathcal{G}^{(1)}\cup\mathcal{G}^{(2)})d\kappa(\mathcal{G}^{(1)})d\kappa(\mathcal{G}^{(2)}).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Gamma_\Lambda}\Big(\sum_{\mathcal{G}^{(1)}\subset\mathcal{G}}\varphi(\mathcal{G}^{(1)},\mathcal{G}\setminus\mathcal{G}^{(1)})\Big)f(\mathcal{G})d\kappa(\mathcal{G})=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{\Gamma_{\Lambda,n}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\mathcal{G}_k^{(1)}\subset\mathcal{G}_{\mathcal{G}}}\varphi(\mathcal{G}_k^{(1)},\mathcal{G}_n\setminus\mathcal{G}_k^{(1)})f(\mathcal{G}_n)d\kappa(\mathcal{G}_n)=\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Gamma_{\Lambda,k}}\sum_{n=k}^{\infty}\int\limits_{\Gamma_{\Lambda,n-k}}C_n^k\varphi(\mathcal{G}_k^{(1)},\mathcal{G}_{n-k}^{(2)})f(\mathcal{G}_k^{(1)}\cup\mathcal{G}_{n-k}^{(2)})\times\\&\times\frac{dg_1^{(1)}\ldots dg_k^{(1)}}{n!}dg_1^{(2)}\ldots dg_{n-k}^{(2)}.\end{aligned}\tag{12}$$

Порядок суммирования и интегрирования в (12) можно изменять благодаря ограничениям на рассматриваемые функции. Лемма 3 доказана.

Используя лемму 3, получим лемму 4.

Лемма 4. При достаточно малых $z=z(\beta)$, $|\zeta|\le 1$, таких, что $e\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^{3\beta B+1}\pi\hat{R}^2z)^n<1$, где $\hat{R}=\max\{\overline{R},\overline{D}\}$; B — величина из условия 2, верны уравнения (6) на $T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})$.

Уравнения (6) имеют единственное решение в силу их рекуррентной структуры, состоящей в том, что значение виртуального ядра $T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})$ выражается через его значения $T_{z,\beta}(\overline{\mathcal{G}},\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})$ от аргументов $(\overline{\mathcal{G}},\tilde{\mathcal{G}})$, таких, что $M(\overline{\mathcal{G}})+M(\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})=M(\mathcal{G})+M(\tilde{\mathcal{G}})-1$, где $M(\mathcal{G})$ — число контуров в наборе $\mathcal{G}$.

Доказательство. Подставим предположение (11) в уравнение (9):

$$\prod_{g\in\mathcal{G}}\varepsilon(g)\int_{\Gamma_\Lambda}T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})\prod_{h\in\tilde{\mathcal{G}}}\varepsilon(h)d\kappa(\tilde{\mathcal{G}})=z^{n(\pi(\mathcal{G}))}\varepsilon(\pi(\mathcal{G}))\times$$
$$\times\prod_{g'\in\mathcal{G}'}\hat{\chi}_{\pi(\mathcal{G}),g'}\left[\prod_{g''\in\mathcal{G}'}\varepsilon(g'')\int_{\Gamma_\Lambda}T_{z,\beta}(\mathcal{G}',\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})\prod_{h'\in\tilde{\tilde{\mathcal{G}}}}\varepsilon(h')d\kappa(\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})+\right.$$
$$+\int_{\Gamma_\Lambda}K(\pi(\mathcal{G}),\tilde{\mathcal{G}})\prod_{\bar{g}\in\mathcal{G}'\cup\tilde{\mathcal{G}}}\varepsilon(\bar{g})\int_{\Gamma_\Lambda}T_{z,\beta}(\mathcal{G}'\cup\tilde{\mathcal{G}},\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})\times \tag{13}$$
$$\left.\times\prod_{f\in\tilde{\tilde{\mathcal{G}}}}\varepsilon(f)d\kappa(\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})d\kappa(\tilde{\mathcal{G}})\right].$$

Воспользовавшись леммой 3 и положив, что

$$\varphi(\tilde{\mathcal{G}},\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})=K(\pi(\mathcal{G}),\tilde{\mathcal{G}})T_z(\mathcal{G}'\cup\tilde{\mathcal{G}},\tilde{\tilde{\mathcal{G}}});$$

$$f(\tilde{\mathcal{G}}\cup\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})=\prod_{g\in\tilde{\mathcal{G}}\cup\tilde{\tilde{\mathcal{G}}}}\varepsilon(g),$$

определяем двойной интеграл в правой части (13):

$$\prod_{\bar{\bar{g}}\in\mathcal{G}'}\varepsilon(\bar{\bar{g}})\int_{\Gamma_\Lambda}K(\pi(\mathcal{G}),\tilde{\mathcal{G}})\prod_{\bar{g}\in\tilde{\mathcal{G}}}\varepsilon(\bar{g})\int_{\Gamma_\Lambda}T_{z,\beta}(\mathcal{G}'\cup\tilde{\mathcal{G}},\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})\times$$
$$\times\prod_{f\in\tilde{\tilde{\mathcal{G}}}}\varepsilon(f)d\kappa(\tilde{\tilde{\mathcal{G}}})d\kappa(\tilde{\mathcal{G}})=\prod_{\bar{\bar{g}}\in\mathcal{G}'}\varepsilon(\bar{\bar{g}})\times$$
$$\times\int_{\Gamma_\Lambda}\sum_{\mathcal{G}^{(1)}\subset\tilde{\mathcal{G}}}K(\pi(\mathcal{G}),\mathcal{G}^{(1)})T_{z,\beta}(\mathcal{G}'\cup\mathcal{G}^{(1)},\bar{\mathcal{G}}\setminus\mathcal{G}^{(1)})\prod_{f\in\bar{\mathcal{G}}}\varepsilon(f)d\kappa(\bar{\mathcal{G}}).$$

Подставляя это выражение в формулу (13) и считая, что $\prod_{g\in\tilde{\tilde{\mathcal{G}}}}\varepsilon(g)\neq 0$, получим

$$\int_{\Gamma_\Lambda}T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})\prod_{h\in\tilde{\mathcal{G}}}\varepsilon(h)d\kappa(\tilde{\mathcal{G}})=z^{n(\pi(\mathcal{G}))}\times$$
$$\times\prod_{g'\in\mathcal{G}'}\hat{\chi}_{\pi(\mathcal{G}),g'}\int_{\Gamma_\Lambda}(T_{z,\beta}(\mathcal{G}',\tilde{\mathcal{G}})\prod_{h'\in\tilde{\mathcal{G}}}\varepsilon(h')d\kappa(\tilde{\mathcal{G}})+$$
$$+\sum_{\mathcal{G}^{(1)}\subset\tilde{\mathcal{G}},\mathcal{G}^{(1)}\neq\varnothing}K(\pi(\mathcal{G}),\mathcal{G}^{(1)})T_{z,\beta}(\mathcal{G}'\cup\mathcal{G}^{(1)},\tilde{\mathcal{G}}\setminus\mathcal{G}^{(1)})\times \tag{14}$$
$$\times\prod_{f\in\tilde{\mathcal{G}}}\varepsilon(f))d\kappa(\tilde{\mathcal{G}}).$$

Поскольку равенство (14) верно при любой ограниченной непрерывной функции $\varepsilon(g)$, то получаем утверждение леммы 4.

Замечание 1. При $T_{z,\beta}(\cdot,\cdot)$ для упрощения записи не ставится индекс Λ, означающий объем, в котором рассматривается система. Совершенно аналогичные системы уравнений получаются и для бесконечного объема R^{ν}.

Легко рассчитать первые несколько коэффициентов $T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})$:

$$T_{z,\beta}(\varnothing,\varnothing)=1;$$

$$T_{z,\beta}(g,\varnothing)=z^{n(g)};$$

$$T_{z,\beta}(g,g_1)=z^{n(g)+n(g_1)}K(g,g_1);$$

$$T_{z,\beta}(\{g_1,g_2\},\varnothing)=z^{n(g)+n(g_1)}\chi_{g_1,g_2}e^{-\beta V_1(g_1,g_2)}.$$

Посмотрим, в какой области существует решение системы (6), и оценим это решение. Из условия 2

$$\sum_{g'\in\mathcal{G}'}V_1(\pi(\mathcal{G}),g')\geq -n(\pi(\mathcal{G}))B.$$

Отсюда и из системы (6) вытекает неравенство

$$\left|T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})\right|\leq (ze^{\beta B})^{n(\pi(\mathcal{G}))}\sum_{\mathcal{G}^{(1)}\subset\tilde{\mathcal{G}}}\left|K(\pi(\mathcal{G}),\mathcal{G}^{(1)})\right|\times$$
$$\times\left|T_{z,\beta}(\mathcal{G}'\cup\mathcal{G}^{(1)},\tilde{\mathcal{G}}\setminus\mathcal{G}^{(1)})\right|.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$Q_{h_1,\nu_1}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})=h_1^{n(\pi(\mathcal{G}))}\sum_{\mathcal{G}^{(1)}\subset\tilde{\mathcal{G}}}\prod_{g_1\in\mathcal{G}^{(1)}}\nu_1(\pi(\mathcal{G}),g_1)\times$$
$$\times Q_{h_1,\nu_1}(\mathcal{G}'\cup\mathcal{G}^{(1)},\tilde{\mathcal{G}}\setminus\mathcal{G}^{(1)}) \qquad (15)$$

при $\mathcal{G}\neq\varnothing$;

$$Q_{h_1,\nu_1}(\varnothing,\varnothing)=1,\ Q_{h_1,\nu_1}(\varnothing,\tilde{\mathcal{G}})=0$$

при $\tilde{\mathcal{G}}\neq\varnothing$, $\nu_1(g,h)=\left|\hat{\chi}_{g,h}-1\right|$, $h_1=ze^{\beta B}$.

Тогда $\left|T_{z,\beta}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})\right|\leq Q_{h_1,\nu_1}(\mathcal{G},\hat{\mathcal{G}})$.

Доказательство проводится очевидным образом — индукцией по $M(\mathcal{G})+M(\tilde{\mathcal{G}})$, где $M(\mathcal{G})$ — число контуров в $\mathcal{G}$.

Решение $Q_{h_1,\nu_1}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})$ уравнения (15) может быть явно записано с помощью специальных графов [7].

Для каждой пары $\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}} \in \Gamma_\Lambda$ рассмотрим лес (неориентированный граф, связными компонентами которого являются деревья) с множеством вершин $\mathcal{G} \cup \tilde{\mathcal{G}}$, причем такой, что каждое дерево содержит одну и только одну вершину из множества $\mathcal{G}$ (иногда дерево может состоять лишь из этой вершины). Совокупность всех таких лесов обозначим через $S_{\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}}}$. Для каждого леса $\gamma \in S_{\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}}}$ обозначим через $E(\gamma)$ множество его ребер. Сопоставим каждому $\gamma \in S_{\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}}}$ величину $G(\gamma)$, которую назовем вкладом графа γ,

$$G(\gamma) = h_1^{N(\mathcal{G})+N(\tilde{\mathcal{G}})} \prod_{(g_1,g_2)\in E(\gamma)} \nu_1(g_1,g_2).$$

Лемма 5. Решение $Q_{h_1,\nu_1}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})$ при $\mathcal{G} \neq \varnothing$ уравнения (15) имеет вид

$$Q_{h_1,\nu_1}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}}) = \sum_{\gamma\in S_{\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}}}} G(\gamma)\,.$$

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 2 в [7].

Лемма 6. Пусть $\left|\zeta(g)\right| \le 1$. Тогда

$$\int Q_{h_1,\nu_1}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}}) \prod_{\tilde{g}\in\tilde{\mathcal{G}}} \left|\varepsilon(\tilde{g})\right| d\kappa(\tilde{\mathcal{G}}) \le h^{N(\mathcal{G})} n(g_1)\ldots n(g_p)\times$$

$$\times e\{\sum_{s=0}^{\infty} e^s [\sum_{n=1}^{\infty} (e^{2\beta B+1}\pi\hat{R}^2 h_1)^n]^s\}.$$

Доказательство. Обозначим через $F(s)$ число деревьев с $(s+1)$-й вершиной. Поскольку $\tilde{U}(x)=0$ при $|x| \ge \bar{R}$, следовательно, $\nu_1(g_1,g_2)=0$, если $\rho(g_1,g_2) \ge \hat{R}$.

Построим на $\mathcal{G} \cup \tilde{\mathcal{G}}$ граф $\gamma \in S_{\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}}}$ из синих ребер (g_i,g_j). Из графа γ построим граф на множестве точек $x_i \in \mathcal{G} \cup \tilde{\mathcal{G}}$. Рассмотрим произвольное синее ребро (g_1,g_2) графа γ. Проведем зеленое ребро (x_i,x_j), $x_i \in g_1$, $x_j \in g_2$, если $\rho(x_i,x_j) \le \hat{R}$. Оранжевые ребра проведем в $g \in \mathcal{G} \cup \tilde{\mathcal{G}}$, если дефекты θ_{x_i} и θ_{x_j} связны, $x_i \in g$, $x_j \in g$. Получили граф из разноцветных ребер. Сотрем все зеленые ребра, которые соединяют $(g_i,g_j) \in \gamma$, кроме одного для каждого синего ребра. После этого сотрем оранжевые ребра на $g_i \in \tilde{\mathcal{G}}$ так, чтобы оставшиеся ребра образовывали на g_i дерево, вершина которого — в оставшейся зеленой точке (т.е. точке, в которую идет зеленое ребро с нижнего g_j). Из [9] известно, что $F(s)=(s+1)^{s-1}$.

Теперь ясно, что число графов γ с синими ребрами не превосходит $2^{F(\mathcal{G})}(F(\tilde{\mathcal{G}})+1)^{F(\tilde{\mathcal{G}})-1}$, а число деревьев, построенных на $g\in\tilde{\mathcal{G}}$, не превосходит $n(g)(n(g)+1)^{n(g)-1}$. Здесь $n(g)$ — число способов, чтобы выбрать нулевую вершину.

Следовательно,

$$R(\mathcal{G})=\int\limits_{\Gamma_\Lambda} Q_{h_1,\nu_1}(\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}})\prod_{\tilde{g}\in\tilde{\mathcal{G}}}\left|\varepsilon(\tilde{g})\right|d\kappa(\tilde{\mathcal{G}})\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Gamma_{\Lambda,k}} e^{\beta BN(\tilde{\mathcal{G}}_k)}\sum_{\gamma\in S_{\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}}_k}}\mathcal{G}(\gamma)d\kappa(\tilde{\mathcal{G}}_k)\le$$

$$\le\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}2^{F(\mathcal{G})}(F(\tilde{\mathcal{G}})+1)^{F(\tilde{\mathcal{G}})-1}\sum_{n(\tilde{g}_1),\dots,n(\tilde{g}_s)} e^{2\beta B\sum n(\tilde{g}_i)}\frac{(n(\tilde{g}_1)+1)^{n(\tilde{g}_1)-1}}{n(\tilde{g}_1)!}\cdot\ldots\times \tag{16}$$

$$\times\ldots\frac{(n(\tilde{g}_s)+1)^{n(\tilde{g}_s)-1}}{n(\tilde{g}_s)!}[\pi\hat{R}^2]^{n(\tilde{g}_1)+\ldots+n(\tilde{g}_s)}h_1^{N(\mathcal{G})+N(\tilde{\mathcal{G}})}n(g_1)\ldots n(g_p),$$

$$\mathcal{G}=\{g_1,\dots,g_p\}\,.$$

При решении использованы условия 2 и 3, из которых

$$\left|\chi_{g,h}e^{-\beta V_1(g,h)}-1\right|\le e^{\beta Bn(g)},\ \text{если}\ \rho(g,h)\le\hat{R},$$

и

$$\left|\chi_{g,h}e^{-\beta V_1(g,h)}-1\right|=0,\ \text{если}\ \rho(g,h)>\hat{R}.$$

Из (16) следует, что

$$R(\mathcal{G})\le(2h)^{N(\mathcal{G})}n(g_1)\ldots n(g_p)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)^{s+1}e^{s+1}}{(s+1)^{s+1}}\times$$

$$\times\sum_{n(\tilde{g}_1),\dots,n(\tilde{g}_s)}\frac{e^{n(g_1)+1}(n(\tilde{g}_1)+1)^{n(\tilde{g}_1)}}{(n(\tilde{g}_1)+1)^{n(\tilde{g}_1)+1}}\times$$

$$\times\ldots\cdot\frac{e^{n(\tilde{g}_s)+1}}{(n(\tilde{g}_s)+1)}[\pi\hat{R}^2]^{n(\tilde{g}_1)+\ldots+n(\tilde{g}_s)}h_1^{N(\tilde{\mathcal{G}})}e^{2\beta BN(\tilde{\mathcal{G}})}\le$$

$$\le(2h_1)^{N(\mathcal{G})}n(g_1)\ldots n(g_p)\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{\infty}e^{s+1}\Big(\sum_{n(\tilde{g})=1}^{\infty}e^{(2\beta B+1)n(\tilde{g})}[\pi\hat{R}^2]^{n(\tilde{g})}h_1^{n(\tilde{g})}\Big)^s.$$

Для сходимости ряда необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$e\sum_{n=1}^{\infty}(e^{(2\beta B+1)}\pi\hat{R}^2 h_1)^n < 1. \qquad (17)$$

Нетрудно подобрать такое малое h_1, чтобы выполнялось соотношение (17).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству леммы 1. Запишем статистическую сумму

$$\Xi(S,h,z,\beta,\zeta) = \int_{\Gamma_\Lambda}\prod_{g\in\mathcal{G}}[z^{n(g)}\varepsilon(g)]\prod_{g,h\in\mathcal{G}}\hat{\chi}_{g,h}d\kappa(\mathcal{G}). \qquad (18)$$

Из (18)

$$\frac{d}{dz}\ln\Xi(\Lambda,z,\beta,\zeta) = \int_{\Gamma_{\Lambda,1}} n(g)r_{z,\beta,\zeta}(g)d\kappa(g).$$

Интегрируя по z и подставляя выражение для $r_{z,\beta,\zeta}(g)$ из формулы (11), получаем

$$\ln\Xi(\Lambda,z,\beta,\zeta) = \int_0^z t^{-1}n(g)\varepsilon(g)\int_{\Gamma_\Lambda} T_t(g,\tilde{\mathcal{G}})\prod_{f\in\tilde{\mathcal{G}}}\varepsilon(f)d\kappa(\tilde{\mathcal{G}})d\kappa(g)dt.$$

Воспользовавшись леммой 3, нетрудно заметить, что

$$\ln\Xi(\Lambda,z,\beta,\zeta) = \int_{\Gamma_\Lambda}\psi_{z,\beta}(\mathcal{G})\prod_{g\in\mathcal{G}}\varepsilon(g)d\kappa(\mathcal{G}),$$

где $\psi_{z,\beta}(\mathcal{G}) = \int_0^z t^{-1}(\sum_{\hat{g}\in\mathcal{G}}n(\hat{g})T_t(g,\mathcal{G}\setminus g))dt$.

Лемма 1 доказана.

Пример 3. Пусть $\Lambda = L\times h$, где L — окружность; $h = 2b(n-1)+\varepsilon$; $H(c)\equiv 0$. Дефекты с центром в (x_0,y_0) имеют вид эллипса:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Для определенности будем считать, что $a<b$, $\varepsilon<2b$. В работах [2, 3] рассмотрен случай $r=2a=2b$. Численные методы расчета аналогичных примеров приведены в [10, 11]. Вычислим первый коэффициент $a_0(L,h,a,b)$ в формуле (8).

Рассмотрим в объеме Λ контур протекания из n точек с координатами $(x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$. Из того, что это — контур протекания, следует:

$$
\begin{aligned}
&0 \le y_1 \le b;\\
&-2b \le y_2 - y_1 \le 2b;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-2b \le y_n - y_{n-1} \le 2b;\\
&0 \le h - y_n \le b.
\end{aligned} \tag{19}
$$

При фиксированных переменных $y_1, ..., y_n$ переменные $x_1, ..., x_n$ могут принимать следующие значения:

$$
\begin{aligned}
&0 \le x_1 < L;\\
&\frac{(x_2 - x_1)^2}{4a^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{4b^2} \le 1;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{4a^2} + \frac{(y_n - y_{n-1})^2}{4b^2} \le 1.
\end{aligned}
$$

Перепишем (19) в виде

$$
\begin{aligned}
&0 \le x_1 < L;\\
&-\sqrt{4b^2 - (y_2 - y_1)^2} \le \frac{(x_2 - x_1)b}{a} \le \sqrt{4b^2 - (y_2 - y_1)^2};\\
&-\sqrt{4b^2 - (y_n - y_{n-1})^2} \le \frac{(x_n - x_{n-1})b}{a} \le \sqrt{4b^2 - (y_n - y_{n-1})^2}.
\end{aligned}
$$

Проведем замену координат:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{b - y_1}{2b};\\
w_2 &= \frac{2b + y_1 - y_2}{2b};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
w_n &= \frac{2b + y_{n-1} - y_n}{2b};\\
v_1 &= x_1;\\
v_2 &= -x_1 + x_2;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
v_n &= -x_{n-1} + x_n.
\end{aligned}
$$

Проинтегрируем по $v_1, ..., v_n$; $w_1, ..., w_n$ и получим

$$
a_0(L, h, a, b) = L 2^{3n-2} a^{n-1} b^n \int\limits_{U_w^{(0)}} \sqrt{2w_2 - w_2^2} \dots \sqrt{2w_n - w_n^2}\, dw_1 \dots dw_n,
$$

где $U_w^{(0)}$ выглядит следующим образом:

$$0 \le w_1 \le 0,5;$$
$$0 \le w_2 \le 2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$0 \le w_n \le 2;$$
$$0,5 - \tilde{\varepsilon} \le w_1 + w_2 + \ldots + w_n \le 1 - \tilde{\varepsilon},$$
$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2b}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Молчанов С.А. Математические модели старения полимерных изоляционных материалов. *Докл. АН СССР*, 1983, т. 286, № 2, с.281–284.

[2] Минлос Р.А., Храпов П.В. О протекании в конечной полосе для непрерывных систем. *Вестник МГУ*, 1985, № 1, с. 56–60.

[3] Храпов П.В. *О протекании в конечной полосе для дискретных и непрерывных систем*. Деп. в ВИНИТИ, Москва, 13.07.1984, № 5061-84.

[4] Храпов П.В. О протекании в конечной полосе. *Вестник МГУ. Мат. Мех.*, 1985. № 4, с. 10–13.

[5] Малышев В.А. Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля. *Усп. мат. наук*, 1980, т. 35(2), с. 3–53.

[6] Малышев В.А., Минлос Р.А. *Гиббсовские случайные поля*. Москва, Наука, 1985.

[7] Минлос Р.А., Погосян С.К. Оценка функций Урселла, групповых функций и их производных. *Теорет. и мат. физика*, 1977, т. 31, № 2, с. 199–213.

[8] Рюэль Д. *Статистическая механика. Строгие результаты*. Москва, Мир, 1971, 367 с.

[9] Риордан Дж. *Введение в комбинаторный анализ*. Москва, Иностр. лит-ра, 1963.

[10] Бузмакова М.М. Перколяция сфер в континууме. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2012, т. 12, вып. 2, с. 48–56.

[11] Бузмакова М.М. Моделирование континуальной перколяции сфер и эллипсоидов. *Естественные науки. Физика и математическое моделирование*, 2012, № 4 (41), с. 126–133.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Храпов П.В. Перколяция в конечной полосе для непрерывных гиббсовских полей. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12.

URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1155.html

Храпов Павел Васильевич родился в 1959 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1981 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области прикладной математики. Сфера научных интересов: модели статистической физики и квантовой теории поля, численные методы, функциональный анализ, анализ временных рядов, распознавание образов, финансовая математика. e-mail**:** Khrapov@bmstu.ru.