УДК 519.718

Доверительное оценивание показателей надежности для модели системы с ненагруженным резервированием по результатам испытания ее элементов в переменном режиме работы

© П.А. Лёвин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача доверительного оценивания надежности для модели системы с ненагруженным резервированием внутри ее отдельных подсистем по результатам испытаний элементов системы в различных режимах. Предложен численный алгоритм решения данной проблемы, вычислительная трудоемкость которого возрастает линейно с увеличением размерности задачи.

Ключевые слова: *надежность сложных систем, безопасность сложных систем, доверительные оценки, прогноз надежности, испытания сложных систем, переменный режим, система с ненагруженным резервированием.*

Доверительное оценивание функции надежности модели системы. Рассмотрим систему, состоящую из m последовательно соединенных подсистем; каждая i-я подсистема состоит из n_i однотипных элементов, работающих в режиме ненагруженного (холодного) резервирования [1, 2]. Система отказывает в случае отказа любой из подсистем; i-я подсистема работает до того момента, когда последовательно откажут все составляющие ее элементы. Тем самым время безотказной работы системы

$$\eta_c = \min_{i=1,\ldots,n} \eta_i,$$

где $\eta_i = \sum_{j=1}^{n_i} \xi_{ij}$ — время безотказной работы i-й подсистемы; ξ_{ij} — время безотказной работы j-го элемента i-й подсистемы.

В процессе функционирования на интервале времени $t > 0$ система и ее элементы могут работать в одном из m различных режимов, соответствующих разным уровням действующей на систему переменной (кусочно-постоянной) нагрузки:

$$U(t) = U_l \text{ при } \tau_{l-1} \le t < \tau_l,$$

где $l = 1, ..., m$; $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{k-1} < \tau_k = \infty$ — моменты переключения режимов; U_l — значения нагрузки, действующей на систему на первом интервале времени $[\tau_{l-1}, \tau_l)$.

В большинстве случаев увеличение действующей на систему нагрузки U повышает опасность отказа элементов системы. Будем предполагать, что на j-м интервале времени $[\tau_{j-1}, \tau_j)$, на котором действующая на систему нагрузка постоянна и равна U_j, интенсивность отказов элемента i-го типа также постоянна:

$$\lambda_{ij} = \varphi_i(U_j),\ j = 1, ..., k;\ i = 1, ..., m, \tag{1}$$

где $\varphi_i(U)$ — функция, выражающая зависимость интенсивности отказов элемента i-го типа (i-й подсистемы) от значения действующей нагрузки U. Точный вид функций $\varphi_i(U)$, $i = 1, ..., m$, чаще всего неизвестен. Далее предполагаем, что каждая из функций $\varphi_i(U)$ (для всех типов элементов $i = 1, ..., m$) монотонно возрастает (не обязательно строго) по U. Это соответствует естественному с физической точки зрения допущению о возрастании интенсивности отказов любого из элементов системы при возрастании действующей на систему нагрузки [3–5].

В большинстве случаев неизвестны и точные значения параметра надежности элемента λ_{ij}, а известны лишь результаты испытания элементов системы на надежность (обычно в стационарном режиме, т. е. при постоянной нагрузке). По этим данным и требуется оценить функцию надежности (вероятности безотказной работы) системы к некоторому заданному моменту времени t. При этом основной интерес, как правило, представляет доверительное оценивание надежности системы снизу. Будем предполагать, что испытания элемента i-го типа в j-м режиме (с постоянной нагрузкой U_j) проводили по стандартным планам испытаний типа $[N_{ij}, R, T_{ij}]$, т. е. на испытания было поставлено N_{ij} элементов i-го типа. Испытания проходили в течение времени T_{ij} с восстановлением отказавших элементов, в результате чего наблюдалось d_{ij} отказов. Требуется, исходя из вектора $\vec{d} = \left\{d_{ij}, i = 1, .., m; j = 1, ..., k\right\}$ результатов испытаний по всем типам элементов системы, построить нижнюю доверительную границу для функции надежности системы для того или иного заданного момента времени $t > 0$.

Предполагаем, что элементы в различных подсистемах отказывают независимо друг от друга. Тогда функция надежности имеет вид

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t),$$

где

$$P_i(t) = \mathrm{P}\left\{\sum_{j=1}^{n_i} \xi_{ij} > t\right\} \tag{2}$$

— функция надежности i-й подсистемы. Обозначим через $\lambda_i(t)$ кусочно-постоянную функцию интенсивности элемента i-го типа (i-й подсистемы) в момент времени t:

$$\lambda_i(t) = \lambda_{ij} \quad \text{при} \quad \tau_{j-1} \le t < \tau_j; \quad j = 1, ..., m-1. \tag{3}$$

Приведенная далее теорема дает аналитическое выражение для функции интенсивности отказов i-й подсистемы из n_i резервных элементов, работающих в режиме ненагруженного резервирования для случая переменной функции интенсивности отказов вида (3).

Обозначим через $\vec{\lambda}_i = (\lambda_{i1}, ..., \lambda_{in_i})$ вектор параметров надежности интенсивности отказов элемента i-го типа i-й подсистемы в различных режимах.

Теорема 1. Функция надежности вероятности безотказной работы i-й подсистемы (2) имеет вид

$$P_i(t, \vec{\lambda}_i) = e^{-g_i(t, \vec{\lambda}_i)} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \frac{\left[g_i(t, \vec{\lambda}_i)\right]^l}{l!}, \tag{4}$$

где

$$g_i(t, \vec{\lambda}_i) = \int_0^t \lambda_i(u)du = \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}(t)\lambda_{ij}.$$

Здесь $c_{ij}(t) = [\min(t, \tau_j) - \tau_{j-1}]^+$ — длина интервала, образуемого пересечением интервалов $(0, t)$ и (τ_{j-1}, τ_j); $z^+ = \max(0, z)$ — положительная часть величины z.

Доказательство. Обозначим через $P_i(n_i, u, t)$ вероятность безотказной работы i-й подсистемы на интервале (u, t) при условии, что она начинает работать в момент времени $u < t$ (или, другими словами, при условии, что на интервале $(0, t)$ не отказал ни один из ее элементов). При $n_i = 1$ (т. е. для одного элемента) эту функцию можем записать как

$$P_i(1, u, t) = e^{-g_i(u,t)}, \tag{5}$$

где $g_i(u, t) = \int_u^t \lambda_i(z)dz$ — функция ресурса [6–8]. Функция (4) является функцией надежности по времени $t > u$ одного элемента i-й подсистемы, «включающегося» в работу в момент u. Соответствующая плотность распределения на интервале $u < t < \infty$ имеет вид $f_i(u,t) = \lambda_i(t)\exp[-g_i(u,t)]$. Исходя из определения указанной функции, получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$P_i(n_i + 1, u, t) = P_i(1, u, t) + \int_u^t \lambda_i(z) e^{-g_i(u,z)} P_i(n_i, z, t)dz, \tag{6}$$

где функция $P_i(1, u, t)$ определена формулой (5). Из (5), (6) находим

$$P_i(n_i, u, t) = e^{-g_i(u,t)} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \frac{\left[g_i(t, \vec{\lambda}_i)\right]^l}{l!},$$

откуда при $u = 0$ следует (4). Теорема доказана.

В частном случае, если функция $\lambda_i(t) \equiv \lambda$, теорема 1 дает известное распределение Эрланга порядка n_i [6, 8–11].

Покажем что функция $L_i(t, \vec{\lambda}_i) = -\ln P_i(t, \vec{\lambda}_i)$, имеющая смысл функции ресурса для i-й подсистемы, выпукла вниз по вектору $\vec{\lambda}_i = (\lambda_{i1}, ..., \lambda_{in_i})$. Для этого рассмотрим подсистему с ненагруженным резервированием, работающую в постоянном режиме $\lambda_i(t) \equiv \lambda$. Функция надежности вероятности безотказной работы i-й подсистемы, работающей в постоянном режиме, согласно (4), имеет вид

$$R_i(t, \lambda) = e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^{n_i - 1} \frac{(\lambda t)^l}{l!} = e^{-\lambda t} \left[1 + \lambda t + ... + \frac{(\lambda t)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!}\right]. \tag{7}$$

Функция плотности вероятности безотказной работы представляет собой известное распределение Эрланга порядка n:

$$f(t) = \frac{\lambda^{n_i}}{(n_i - 1)!} t^{n_i - 1} e^{-\lambda t}.$$

Покажем, что это распределение относится к семейству распределений с возрастающей функцией интенсивности (ВФИ) отказов $\lambda(t)$:

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{P(t)}=\frac{\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}\left[1+\lambda t+\ldots+\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]}=\lambda\frac{\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}{1+\lambda t+\ldots+\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}=$$

$$=\frac{\lambda}{1+\dfrac{n-1}{\lambda t}+\dfrac{(n-1)(n-2)}{(\lambda t)^2}\ldots+\dfrac{(n-1)!}{(\lambda t)^{n-1}}}.$$

Отсюда видно, что с увеличением времени t возрастает и функция интенсивности отказов $\lambda(t)$. Это доказывает принадлежность распределения к семейству ВФИ-распределений. Используя известные результаты для функции ресурса ВФИ-распределений [6–9], находим, что функция

$$\Lambda_i(t,\lambda_i)=-\ln R_i(t,\lambda_i)=\lambda t-\ln\left[1+\lambda t+\ldots+\frac{(\lambda t)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\right]. \tag{8}$$

выпукла вниз по аргументу t. Поскольку аргумент λ входит в функцию линейно относительно t, то функция $\Lambda_i(t,\lambda_i)$ также выпукла вниз по λ.

Рассмотрим функцию вида

$$\varphi(x)=e^{-x}\left[1+x+\ldots+\frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!}\right].$$

Очевидно, что функция $-\ln\varphi(x)$ выпукла вниз по аргументу x: это легко увидеть, сделав замену $x=\lambda t$ в (8). Тогда функцию (7) можно записать как

$$R_i(t,\lambda)=\varphi(\lambda t). \tag{9}$$

Представим теперь функцию надежности для i-й подсистемы, работающую в режиме ненагруженного резервирования (4), в виде

$$P_i(t,\vec{\lambda}_i)=\exp\left[-g_i(t,\vec{\lambda}_i)\right]\sum_{l=0}^{n_i-1}\frac{\left[g_i(t,\vec{\lambda}_i)\right]^l}{l!}=\varphi\left[g_i(t,\vec{\lambda}_i)\right],$$

т. е. функция $-\ln P_i(t,\vec{\lambda}_i)$ выпукла вниз по аргументу $g_i(t,\vec{\lambda}_i)$. Поскольку аргументы $t,\vec{\lambda}_i$ входят в функцию $g_i(t,\vec{\lambda}_i)$ линейно, то функция $-\ln P_i(t,\vec{\lambda}_i)$ выпукла вниз по $\vec{\lambda}_i$.

Функцию надежности системы для данной модели можем записать следующим образом:

$$P_i(t,\vec{\lambda}_i) = \exp\left[-f(t,\vec{\lambda}_i)\right], \tag{10}$$

где

$$f(t,\vec{\lambda}_i) = \sum_{i=1}^{m} f_i[L_i(t,\vec{\lambda}_i)]; \tag{11}$$

$$f_i(z_i) = -\ln H_i(z_i); \tag{12}$$

$$H_i(z_i) = \exp(-z_i)\sum_{l=0}^{n_i-1}\frac{z_i^l}{l!}; \tag{13}$$

$L_i(t,\vec{\lambda}_i)$ — функция ресурса одного элемента i-го типа, которая определяется выражением $L_i(t,\vec{\lambda}_i) = \int_0^t \lambda_i(z)dz$ [3–5].

Таким образом, отличие от модели с нагруженным резервированием [5] с формальной точки зрения сводится к тому, что функции $f_i(z_i)$, определяющие функцию надежности в (10) и (11), в данной модели с ненагруженным резервированием имеют вид (12) и (13).

Задача построения нижней доверительной границы для функции надежности системы снова сводится к нахождению максимума:

$$\overline{f}(t,\vec{d}) = \max_{\vec{\lambda}\in H(\vec{d})} f(t,\vec{\lambda}) \tag{14}$$

при ограничениях на параметры $\vec{\lambda}$ надежности элементов системы

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} N_{ij}T_{ij}\lambda_{ij} \le \overline{\Lambda}_\gamma(D);$$

$$\lambda_{ij} \ge 0 \text{ при всех } j = 1, ..., k;\ i = 1, ..., m; \tag{15}$$

$$\lambda_{i1} \le \lambda_{i2} \le ... \le \lambda_{ik} \text{ при всех } i = 1, ..., m,$$

после чего искомая нижняя γ-доверительная граница для значения функции надежности системы в точке $t \ge 0$ определяется по формуле

$$\underline{P}(t,\vec{d}) = \exp[-\overline{f}(t,\vec{d})]. \tag{16}$$

Для вычисления максимума в (14) используем вспомогательную задачу. Находим функцию

$$g_i(t,z_i)=\max L_i(t,\vec{\lambda}_i)=\max\sum_{j=1}^{k}c_{ij}(t)\lambda_{ij} \qquad (17)$$

по всем значениям вектора параметров $\vec{\lambda}_i=(\lambda_{i1},\lambda_{i2},...,\lambda_{ik})$ *i*-й подсистемы, удовлетворяющей ограничениям

$$\sum_{j=1}^{k}N_{ij}T_{ij}\lambda_{ij}=z_i; \qquad (18)$$

$$\lambda_{ij}\geq 0,\ \text{при всех}\ j=1,...,k; \qquad (19)$$

$$\lambda_{i1}\leq\lambda_{i2}\leq...\leq\lambda_{ik}. \qquad (20)$$

Решение задачи (17) – (20) фактически уже было найдено в [3] (для случая одного элемента) на основе соответствующего численного алгоритма, после чего решение исходной основной задачи (14), (15) для функции надежности системы в целом задается следующей теоремой.

Теорема 2. Нижняя доверительная граница (16) для функции надежности системы (10) имеет вид

$$\underline{P}(t,\vec{d})=\min_{i=1,...,m}H_i\left\{g_i[t,\overline{\Lambda}_\gamma(D)]\right\}. \qquad (21)$$

Доказательство. Непосредственно из выражений (12), (13) следует, что первая производная

$$f_i'(z_i)=\frac{z_i^{n_i-1}\big/(n_i-1)!}{1+\dfrac{z_i^2}{2!}+...+\dfrac{z_i^{n_i-1}}{(n_i-1)!}}=\frac{1}{1+\dfrac{n_i-1}{z_i}+...+\dfrac{(n_i-1)!}{z_i^{n_i-1}}} \qquad (22)$$

монотонно возрастает по z_i. Тогда функции $f_i(z_i)$ выпуклы вниз по z_i при всех $n_i=1,2,...,$ $i=1,...,m$, т. е. для всех подсистем. Исходя из этого, максимум (14) можем записать следующим образом:

$$\overline{f}(t,\vec{d})=\max_{i=1,...,m}f_i\left\{g_i[t,\overline{\Lambda}_\gamma(D)]\right\},$$

откуда, согласно (12), (13) и (16), следует (21). Теорема доказана.

В соответствии с приведенной выше теоремой 1 функция надежности отдельно взятой *i*-й подсистемы имеет вид

$$P_i(t,\vec{\lambda}_i)=H_i[L_i(t,\vec{\lambda}_i)]. \qquad (23)$$

Таким образом, построение доверительной границы (21) для надежности системы проводим следующим образом. Сначала для каждой отдельно взятой i-й подсистемы строим свою нижнюю γ-доверительную границу надежности, предполагая, что на испытаниях элементов этой подсистемы было получено D отказов. После чего минимальную из этих доверительных границ для отдельных подсистем берем в качестве нижней доверительной границы (с тем же коэффициентом доверия γ) для надежности всей системы в целом. В этом смысле данная процедура аналогична методу, полученному в [5] для модели с нагруженным резервированием внутри подсистем. В частном случае при $k = 1$ (работа в одном режиме) данный результат содержит известные результаты [2, 8, 9] для систем с ненагруженным резервированием. В другом частном случае при $n_1 = n_2 = ... = n_m = 1$(т. е. при отсутствии резерва) выражение (21) совпадает с аналогичным выражением из [5] для модели системы с нагруженным резервированием.

Доверительное оценивание основных показателей ресурса и остаточного ресурса. Для модели системы с ненагруженным резервированием внутри отдельных подсистем справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Построенная в теореме 2 функция вектора результатов испытаний $\underline{P}(\vec{d},t)$ при любом $\lambda \in L'$ удовлетворяет соотношению

$$P_{\vec{\lambda}}\left\{ \underline{P}(\vec{d},t) \le P(\vec{\lambda},t) \text{ при всех } t \ge 0 \right\} \ge \gamma. \tag{24}$$

Доказательство проводим аналогично доказательству теоремы 1 в [4] с учетом того, что доверительные множества $H(\vec{d})$ в (14) и ограничения в (15) не зависят от времени.

Таким образом, функция (21) в силу (24) дает соответствующую доверительную полосу для функции надежности системы $P(t,\vec{\lambda})$. После чего можем рассчитать нижнюю доверительную границу для среднего ресурса (математического ожидания времени безотказной работы системы):

$$\underline{\mu} = \underline{\mu}(\vec{d}) = \int_0^\infty \underline{P}(\vec{d},t)dt.$$

Нижнюю доверительную границу для γ-процентного ресурса находим на основе доверительной полосы $\underline{P}(\vec{d},t)$:

$$\underline{t}_q = \underline{t}_q(\vec{\lambda}) = \left\{ t : \underline{P}(\vec{d},t) = q \right\}.$$

Доверительное оценивание показателей остаточного ресурса. Пусть к моменту τ система еще работоспособна и $n_i(\tau)$ — количество элементов *i*-й подсистемы, исправных к моменту τ, $n_i(\tau) \geq 1$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда остаточная функция надежности системы к моменту τ имеет вид

$$P_{c\tau}(\vec{\lambda}, t) = \exp[-\varphi_\tau(\vec{\lambda}, t)], \tag{25}$$

где $\vec{\lambda} = (\lambda_{ij}, j = 1, \ldots, k;\ i = 1, \ldots, m)$ — вектор параметров надежности элементов системы;

$$\varphi_\tau(\vec{\lambda}, t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i[L_i(\vec{\lambda}_i, \tau, t), n_i(\tau)]. \tag{26}$$

Здесь $\overrightarrow{\lambda_i} = (\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ik})$ — вектор параметров элементов *i*-й подсистемы;

$$\varphi_i(z_i, n_i) = -\ln H_i(z_i, n_i); \tag{27}$$

$$H_i(z_i, n_i) = \exp(-z_i) \sum_{l=0}^{n_i - 1} \frac{z_i^l}{l!}; \tag{28}$$

$$L_i(\vec{\lambda}_i, \tau, t) = \Lambda_i(\vec{\lambda}_i, \tau + t) - \Lambda_i(\vec{\lambda}_i, \tau) = \int_{\tau}^{\tau+t} \lambda_i(u)du, \tag{29}$$

где $\Lambda_i(\vec{\lambda}_i, t)$ — функция ресурса элемента *i*-й подсистемы.

В соответствии с (25) остаточная функция надежности системы к моменту τ имеет вид

$$P_{c\tau}(\vec{\lambda}, t) = \prod_{i=1}^{m} H_i[L_i(\vec{\lambda}_i, \tau, t), n_i(\tau)]. \tag{30}$$

Нижнюю доверительную границу для остаточной функции надежности (30) при данном векторе результатов испытаний $\vec{d}$ находим как

$$\underline{P}_{c\tau}(\vec{d}, t) = \exp[-\overline{\varphi}_\tau(\vec{d}, t)], \tag{31}$$

где $\overline{\varphi}_\tau(\vec{d}, t)$ — соответствующая верхняя доверительная граница для функции (26),

$$\overline{\varphi}_\tau(\vec{d}, t) = \max_{\vec{\lambda} \in H(\vec{d})} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i[L_i(\vec{\lambda}_i, \tau, t), n_i(\tau)]. \tag{32}$$

Здесь максимум вычисляем при прежних ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} N_{ij} T_{ij} \lambda_{ij} \leq \overline{\Lambda}_\gamma(D);$$

$$\lambda_{ij} \ge 0,\ j = 1, ..., k;\ i = 1, ..., m;$$

$$\lambda_{i1} \le \lambda_{i2} \le ... \le \lambda_{ik},\ i = 1, ..., m.$$

Таким образом, с формальной точки зрения отличие от модели с нагруженным резервированием [5] сводится к тому, что функции $\varphi_i[L_i(\vec{\lambda}_i, \tau, t), n_i(\tau)]$ в (32) имеют вид, указанный в (27)–(29).

Решение задачи вычисления доверительной границы (31) для остаточной функции надежности системы дает следующая теорема.

Теорема 4. Доверительная граница (31) при данном векторе результатов испытаний $\vec{d}$ вычисляется по формуле

$$\underline{P}_{c\tau}(\vec{d}, t) = \exp[-\overline{\varphi}_\tau(\vec{d}, t)], \tag{33}$$

где

$$\overline{\varphi}_\tau(\vec{d}, t) = \max_{i=1,...,m} \varphi_i[g_i(t, \overline{\Lambda}_\gamma(D), \tau), n_i(\tau)]; \tag{34}$$

функции $g_i(t, z_i, \tau)$ определяются выражениями

$$g_i(t, z_i, \tau) = \max \sum_{j=1}^{k} b_{ij}(\tau, t)\lambda_{ij}.$$

Доказательство теоремы 4 опирается на следующие факты: линейность функции ресурса элементов i-го типа

$$L_i(\vec{\lambda}_i, \tau, t) = \int_{\tau}^{\tau+t} \lambda_i(u)du = \sum_{j=1}^{k} b_j(\tau, t)\lambda_{ij}$$

по вектору $\vec{\lambda}_i$, $i = 1, ..., m$,
где

$$b_j(\tau, t) = [\min(V_j, \tau + t) - \max(V_{j-1}, \tau)]^+,$$

а также выпуклость вниз функций $\varphi_i(z_i, n_i)$ по параметру z_i.

Функция $\overline{\varphi}_\tau(\vec{d}, t)$, определенная в (32), может быть представлена в виде

$$\overline{\varphi}_\tau(\vec{d}, t) = \max_{i=1,...,m} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i[g_i(t, z_i, \tau), n_i(\tau)],$$

где максимум берем по вектору $\vec{z} = (z_1, ..., z_m)$ при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \le \overline{\Lambda}_\gamma(D);$$

$$z_i \geq 0, \quad i = 1, ..., m.$$

Исходя непосредственно из определения функции $g_i(t, z_i, \tau)$, нетрудно показать, что функция удовлетворяет равенству

$$g_i(t, z_i, \tau) = z_i g_i(t, 1, \tau) \ ,$$

с учетом которого

$$\overline{\varphi}_\tau(\vec{d}, t) = \max_{i=1,...,m} \sum_{i=1}^{m} z_i \varphi_i [g_i(t, 1, \tau), n_i(\tau)],$$

после чего доказательство следует из выпуклости вниз функций $\varphi_i(z_i, n_i)$ по z_i, 1, …, m. Теорема доказана.

Функцию $\underline{P}_{c\tau}(\vec{d}, t)$ можно представить также в следующем виде:

$$\underline{P}_{c\tau}(\vec{d}, t) = \min_{i=1,...,m} H_i \left\{ g_i(t, \overline{\Lambda}_\gamma(D), \tau), n_i(\tau) \right\}. \tag{35}$$

Теорема 5. Функция (35) удовлетворяет неравенству

$$P_{\vec{\lambda}} \left\{ \underline{P}_{c\tau}(\vec{d}, t) \leq P_{c\tau}(\vec{\lambda}, t) \text{ при всех } t \geq 0 \right\} \geq \gamma, \quad \lambda \in L'. \tag{36}$$

Доказательство неравенства (36) также проводим аналогично доказательству теоремы 1 в [4] с тем отличием, что целевая функция

$$\varphi_\tau(\vec{\lambda}, t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i [L_i(\vec{\lambda}_i, \tau, t), n_i(\tau)],$$

для которой вычисляем максимум в (32), соответствует рассматриваемой модели с ненагруженным резервированием.

Таким образом, доверительная граница $\underline{P}_{c\tau}(\vec{d}, t)$ в (35) фактически дает доверительную полосу для остаточной функции надежности системы.

Нижнюю доверительную границу остаточного среднего ресурса системы для данной модели находим по формуле

$$\underline{\mu}_{c\tau} = \underline{\mu}_{c\tau}(\vec{d}) = \int_0^\infty \underline{P}_{c\tau}(\vec{d}, t) dt.$$

Аналогично нижняя доверительная граница для остаточного γ-процентного ресурса

$$\underline{t}_q(\tau) = \underline{t}_q(\vec{d}, \tau) = \left\{ t : \underline{P}_{c\tau}(\vec{d}, t) = q \right\}.$$

В соответствии с (36) эти границы удовлетворяют неравенствам

$$P_{\vec{\lambda}}\left\{ \underline{\mu}_{\tau}(\vec{d}) \le \mu_{\tau}(\vec{\lambda}) \right\} \ge \gamma;$$

$$P_{\vec{\lambda}}\left\{ \underline{t}_q(\tau,\vec{d}) \le t_q(\tau,\vec{\lambda}) \right\} \ge \gamma \text{ при всех } \lambda \in L',$$

где

$$\mu_{\tau}(\vec{\lambda}) = \int_0^{\infty} P_{c\tau}(\vec{\lambda},t)dt;$$

$$\underline{t}_q(\vec{\lambda},\tau) = \left\{ t : P_{c\tau}(\vec{\lambda},t) = q \right\}.$$

Таким образом, получено выражение для нижней доверительной границы для функции системы, а также соответствующие выражения для основных показателей ресурса и остаточного ресурса для модели системы с ненагруженным резервированием элементов внутри подсистем. Построенная выше доверительная граница с учетом априорной информации о монотонном возрастании функции интенсивности отказов элемента системы от действующей на систему нагрузки дает значительный выигрыш по сравнению с обычной моделью.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. *Математические методы в теории надежности.* Москва, Наука, 1965, 524 с.

[2] Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. *Statistical Reliability Engineering*. New York, John Wiley, 1999, 517 p.

[3] Левин П.А., Павлов И.В. Интервальное оценивание надежности системы в переменном режиме функционирования. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008, № 3, с. 60–69.

[4] Левин П.А., Павлов И.В. Оценка показателей ресурса технических систем в переменном режиме функционирования. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009, № 2, с. 28–37.

[5] Левин П.А., Павлов И.В. Оценка надежности системы с нагруженным резервированием по результатам испытаний ее элементов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, № 3, с. 59–70.

[6] Павлов И.В. Доверительные границы в классе распределений с возрастающей функцией интенсивности отказов. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 1977, № 6, с. 72–84.

[7] Павлов И.В. Приближенно оптимальные доверительные границы для показателей надежности систем с восстановлением. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 1988, № 3, с.109–116.

[8] Павлов И. В., Ушаков И.А. Вычисление показателей надежности для сложных систем с восстанавливаемыми элементами. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 1989, № 6, с. 170–176.

[9] Павлов И.В. О корректности фидуциального подхода при построении доверительных границ для показателей надежности сложных систем. *Известия РАН. Теория и системы управления,* 1981, № 5, с. 46–52.

[10] Павлов И.В. Приближенно оптимальные доверительные границы для показателей надежности систем с восстановлением. *Известия РАН. Теория и системы управления,* 1988, № 3, с.109–116.
[11] Павлов И. В., Ушаков И.А. Вычисление показателей надежности для сложных систем с восстанавливаемыми элементами. *Известия РАН. Теория и системы управления,* 1989, № 6, с. 170–176.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Лёвин П.А. Доверительное оценивание показателей надежности для модели системы с ненагруженным резервированием по результатам испытания ее элементов в переменном режиме работы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12.

URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1154.html

Лёвин Петр Александрович родился в 1982 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2006 г. Аспирант кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: plyovin@hotmail.com