УДК 519.718

Построение нижней доверительной границы для надежности системы с нагруженным резервированием, составленной из стареющих элементов

© И.В. Павлов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен метод доверительного оценивания функции надежности для модели системы с нагруженным резервированием по результатам испытаний ее отдельных компонент (элементов, подсистем). Предполагается, что система составлена из элементов с монотонно возрастающей функцией интенсивности отказов.

Ключевые слова: *надежность, резервирование, интенсивность отказов, подсистемы.*

Методы построения доверительных границ для показателей надежности сложных систем в настоящее время разработаны в основном для частного случая биномиальных испытаний, а также для случая, когда элементы системы имеют экспоненциальные распределения времени безотказной работы [1–12]. В то же время предположение об экспоненциальных распределениях для элементов системы далеко не всегда можно считать оправданным. В значительно меньшей степени разработаны соответствующие методы для более общих законов распределений времени безотказной работы элементов системы.

Рассмотрим решение для случая, когда элементы системы являются стареющими, т. е. имеют ВФИ-распределения (с возрастающей функцией интенсивности отказов) времени безотказной работы. Класс ВФИ-распределений включает в себя целый ряд часто используемых в инженерной практике параметрических семейств распределений, таких как экспоненциальное, Вейбулла, нормальное, распределение Эрланга, гамма-распределение и др. С физической точки зрения предположение о старении элементов системы довольно естественно, его часто используют в инженерной практике в задачах надежности [2, 13, 14]. В этом смысле соответствующие статистические выводы, основанные на предположении о старении элементов системы, являются значительно корректнее.

Исследуем систему, составленную из m последовательно соединенных подсистем типа l_i из n_i: i-я подсистема состоит из n_i однотипных элементов, работающих в режиме нагруженного резервирования, i-я подсистема исправна, если исправны по крайней мере l_i ее элементов, $i = 1,\ldots,m.$ Часто возникающая в инженерной практике задача состоит в том, что требуется оценить или подтвердить надежность системы по результатам испытаний ее компонент (элементов, подсистем). При этом основной практический интерес чаще всего представляет доверительное оценивание надежности системы снизу.

Будем предполагать, что испытания элементов системы проводили по стандартным планам типа $\left[N_i U r_i\right]$, т. е. на испытания были поставлены N_i элементов i-го типа. Испытания проводились без восстановления отказавших элементов до наблюдения $r_i \le N_i$ отказов, $i = 1, \ldots, m.$ В результате чего отмечены последовательные моменты отказов $x_{i1} \le x_{i2} < \ldots < x_{ir_i}$. Обозначим

$$S_i = \sum_{j=1}^{r_i} x_{ij} + \left(N_i - r_i\right) x_{ir_i}$$

— суммарное время работы (наработку) элементов i-го типа на испытаниях, $i = 1, \ldots, m.$ Требуется на основе вектора $\vec{S} = \left(S_1, \ldots, S_m\right)$ результатов испытаний элементов системы построить нижнюю доверительную границу для функции надежности системы

$$P\left(t\right) = \prod_{i=1}^{m} h_i\left[P_i(t)\right], \tag{1}$$

где $P_i\left(t\right) = \exp\left[-R_i(t)\right]$ — функция надежности элемента i-го типа; $h_i\left(p_i\right) = \sum_{j=l_i}^{n_i} C_{n_i}^j p_i^j (1 - p_i)^{n_i - j}$ — вероятность безотказной работы (надежность) i-й подсистемы, если надежность одного ее элемента равна p_i. В частном случае при $l_i = 1, i = 1, \ldots, m,$ данная модель содержит классическую схему последовательно-параллельных структур, когда $h_i\left(p_i\right) = 1 - (1 - p_i)^{n_i}, i = 1, \ldots, m$.

Далее предполагаем, что для каждого типа элементов $i = 1, \ldots, m$ функция ресурса [1, 2] (ведущая функция в терминологии [13])

$$R_i\left(t\right) = \int_0^t r_i\left(u\right) du$$

выпукла вниз. Тем самым соответствующая функция интенсивности отказов $r_i\left(t\right)$ монотонно возрастает (не убывает) по времени $t \ge 0,$ что является естественным допущением для большинства технических систем.

Задача сводится к построению верхней доверительной границы для функции ресурса (ведущей функции) системы

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i\left[R_i(t)\right], \tag{2}$$

где $f_i(z_i) = -\ln h_i\left(e^{-z_i}\right)$.

При этом функция $f_i\left[R_i(t)\right] = -\ln h_i\left[e^{-R_i(t)}\right]$ имеет смысл функции ресурса для i-й подсистемы.

В частном случае, когда элементы системы имеют экспоненциальные распределения времени безотказной работы, т. е. когда $P_i(t) = \exp\left[-\lambda_i t\right]$, функция (2) имеет вид

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i\left(\lambda_i t\right). \tag{3}$$

Нетрудно показать непосредственным дифференцированием, что определенные выше функции $f_i(z_i)$ выпуклы вниз по $z_i \geq 0$, откуда следует выпуклость правой части (3) по вектору параметров $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Тем самым верхняя γ-доверительная граница для функции ресурса системы (3) может быть вычислена (при $\gamma \geq 1 - e^{-3/2} = 0,778$) методом подстановки [2, 3, 5]:

$$\overline{f} = \overline{f}\left(\vec{S}, t\right) = \sum f_i\left(\overline{\lambda}_i t\right),$$

где $\overline{\lambda}_i = \dfrac{\Delta_\gamma\left(2r_i\right)}{2S_i}$ — стандартная верхняя γ-доверительная граница для параметра экспоненциального распределения λ_i; $\Delta_\gamma\left(2r_i\right)$ — квантиль уровня γ для распределения хи-квадрат с $2r_i$ степенями свободы. Соответствующая нижняя γ-доверительная граница для функции надежности системы имеет вид

$$\underline{P}\left(\vec{S}, t\right) = \prod_{i=1}^{m} h_i\left[\underline{P}_i(S_i, t)\right],$$

где

$$\underline{P}_i\left(S_i, t\right) = \exp\left[-\frac{\Delta_\gamma\left(2r_i\right)t}{2S_i}\right] \tag{4}$$

— нижняя γ-доверительная граница для функции надежности одного отдельно взятого элемента i-го типа, $i = 1, \ldots, m$. Другими словами, в экспоненциальном случае нижняя γ-доверительная граница надежности для данной модели системы может быть построена путем простой подстановки частных γ-доверительных границ для параметров надежности отдельных элементов (при $\gamma \ge 1 - e^{-3/2} = 0,778$) в функцию надежности системы. Далее этот результат распространяется (при некоторых дополнительных условиях) на более общий случай, когда система составлена из стареющих элементов (с монотонно возрастающей функцией интенсивности отказов).

Для каждого типа элементов $i = 1, \ldots, m$ введем усеченную доверительную границу

$$A_i\left(S_i, t\right) = \exp\left[-\frac{\Delta_\gamma\left(2r_i\right)t}{2S_i}\right], \text{при } t \le \frac{S_i}{N_i}; \tag{5}$$

$A_i\left(S_i, t\right) = 0$, при $t > \dfrac{S_i}{N_i}$, которая совпадает с (4) на начальном интервале времени $0 \le t \le S_i / N_i$.

Пусть $\gamma \ge 1 - e^{-3/2}$. Покажем, что тогда нижняя γ-доверительная граница для функции надежности системы (1) может быть вычислена как

$$\underline{P}\left(\vec{S}, t\right) = \prod_{i=1}^{m} h_i\left[A_i(S_i, t)\right]. \tag{6}$$

Другими словами, если система составлена из ВФИ-элементов, то нижняя γ-доверительная граница для надежности системы может быть вычислена (при $\gamma \ge 1 - e^{-3/2}$) аналогично экспоненциальному случаю путем прямой подстановки усеченных доверительных границ (5) для отдельных элементов в функцию надежности системы.

Задача сводится к построению верхней доверительной границы для ведущей функции системы (2). Рассмотрим эту же задачу для функции более общего вида:

$$f\left(t\right) = \sum f_i\left[R_i\left(t_i\right)\right], \tag{7}$$

где моменты времени t_i разные. Ведущая функция системы (2) является частным случаем выражения (7) при $t_1 = t_2 = \ldots = t_m = t$.

Пусть $\vec{R} = \left[R_1\left(t\right), \ldots, R_m\left(t\right)\right]$ — вектор ведущих функций элементов и V — класс всех таких $\vec{R}$, что для каждого типа элементов $i = 1, \ldots, m$

ведущая функция $R_i(t)$ выпукла вниз по $t \geq 0$. Обозначим также V_1 — класс всех таких $\vec{R}$, что $R_i(t) = \lambda_i t$, где $\lambda_i > 0$; V_2 — класс всех таких $\vec{R}$, что $R_i(t) = \lambda_i (t - \tau_i)^+$, где $\lambda_i > 0; \tau_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$. (Здесь и далее используем обозначение $z^+ = \max(0, z)$ — положительная часть величины z.) Класс V_1, очевидно, соответствует случаю, когда элементы системы имеют экспоненциальные распределения времени безотказной работы, а класс V_2 — случаю, когда элементы имеют экспоненциальные распределения со сдвигом, $V_1 \subset V_2 \subset V$.

В экспоненциальном случае, т. е. когда $\vec{R} \in V_1$, получаем стандартную верхнюю γ-доверительную границу при

$$\overline{R_i}(S_i, t) = \frac{\Delta_\gamma (2r_i) t}{2S_i} \tag{8}$$

для $R_i(t) = \lambda_i t$ при любом $t \geq 0$.

Пусть $\gamma \geq 1 - e^{-3/2}$. Тогда, учитывая выпуклость вниз функций $f_i(z_i)$, верхняя γ-доверительная граница для ведущей функции системы (1) в экспоненциальном случае, т. е. в предположении, что $\vec{R} \in V_1$, может быть вычислена указанным выше методом подстановки. Иными словами, справедливо неравенство

$$P_{\vec{R}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} f_i \left[\overline{R}_i (S_i, t_i) \right] \geq \sum_{i=1}^{m} f_i \left[R_i (t_i) \right] \right\} \geq \gamma$$

при всех $\vec{R} \in V_1$, $t_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$.

Для каждого типа элементов $i = 1, \ldots, m$ введем усеченную доверительную границу

$$B_i(S_i, t) = \frac{\Delta_\gamma (2r_i) t}{2S_i}, \text{ при } t \leq \frac{S_i}{N_i}; \tag{9}$$

$$B_i(S_i, t) = \infty, \text{ при } t > \frac{S_i}{N_i}, \tag{10}$$

которая совпадает с (8) на начальном отрезке времени $0 \leq t \leq S_i / N_i$.

Покажем далее, что в случае ВФИ-элементов верхняя γ-доверительная граница для функции вида (7) может быть рассчитана указанным методом подстановки, исходя из усеченных доверительных границ (9), (10) для отдельных элементов. Другими словами, справедливо неравенство

$$P_{\vec{R}}\left\{\sum_{i=1}^{m} f_i\left[B_i\left(S_i,t_i\right)\right] \ge \sum_{i=1}^{m} f_i\left[R_i\left(t_i\right)\right]\right\} \ge \gamma \tag{11}$$

при всех $\vec{R} \in V$, $t_i \ge 0$, $i = 1,\ldots,m$.

Для этого понадобится приведенная далее теорема 1. Обозначим $x_i = \left\{x_{ij}, j = 1,\ldots,r_i\right\}$ — вектор результатов испытаний (моментов отказов) элементов i-го типа; $e_i = \left(1,\ldots,1\right)$ — единичный вектор размерности r_i, $i = 1,\ldots,m$.

Пусть имеется функция

$$g\left(x_1,\ldots,x_m, t_1,\ldots,t_m\right), \tag{12}$$

которая удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. Функция (12) монотонно убывает (не возрастает) по каждому аргументу $x_{ij}, j = 1,\ldots,r_i$, $i = 1,\ldots,m$ при всех $0 \le x_{i1} \le x_{i2} x_{ir_i}$, $0 \le x_{i1} \le x_{i2} \le \ldots \le x_{ir_i}$, $t_i \ge 0$, $i = 1,\ldots,m$.

Данное условие соответствует естественному физическому требованию о том, что оценка надежности должна улучшаться при улучшении (увеличении) наблюдаемых на испытаниях моментов отказов x_{ij}.

Условие 2. Функция

$$g\left(x_1 - \tau_1 e_1,\ldots,x_m - \tau_m e_m, t_1 - \tau_1,\ldots,t_m - \tau_m\right)$$

монотонно убывает (не возрастает) по каждому $\tau_i, i = 1,\ldots,m$ при всех $\tau_i \le x_{i1} \le x_{i2} \le \ldots \le x_{ir_i}$, $0 \le \tau_i \le t_i$, $i = 1,\ldots,m$.

Тогда для функции (12) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть неравенство

$$P_{\vec{R}}\left\{g\left(x_1,\ldots,x_m,t_1,\ldots,t_m\right) \ge \sum_{i=1}^{m} f_i\left[R_i\left(t_i\right)\right]\right\} \ge \gamma \tag{13}$$

выполняется при всех $\vec{R} \in V_1$, $t_i \ge 0$, $i = 1,\ldots,m$. Тогда это неравенство выполняется и при всех $\vec{R} \in V$, $t_i \ge 0$, $i = 1,\ldots,m$.

Доказательство. Пусть $\vec{R} \in V$. Тогда в силу выпуклости вниз функций $R_i\left(t\right)$ найдется такое $\vec{M} = \left[M_1\left(t\right),\ldots,M_m\left(t\right)\right] \in V_2$, что

$$M_i\left(t\right) = \lambda_i\left(t - \tau_i\right)^+; \tag{14}$$

$$M_i\left(t_i\right)=R_i\left(t_i\right), \tag{15}$$

где λ_i, τ_i — некоторые константы, причем

$$\lambda_i>0, 0 \leq \tau_i \leq t_i \tag{16}$$

при всех $i=1, \ldots, m$. При этом справедливо неравенство $M_i(t) \leq R_i(t)$ при всех значениях $t_i \geq 0, i=1, \ldots, m$. Откуда, учитывая также условие 1, следует неравенство

$$P_{\vec{R}}\left\{g\left(x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_m\right) \geq \sum_{i=1}^m f_i\left[R_i\left(t_i\right)\right]\right\} \geq$$

$$\geq P_{\vec{M}}\left\{g\left(x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_m\right) \geq \sum_{i=1}^m f_i\left[\lambda_i\left(t-\tau_i\right)\right]\right\}. \tag{17}$$

Обозначим $\vec{\Lambda}=\left[\Lambda_1(t), \ldots, \Lambda_m(t)\right] \in V_1$, где $\Lambda_i(t)=\lambda_i t,\ t \geq 0,\ i=1, \ldots, m$. В силу условия 2 справедливо следующее неравенство:

$$g\left(x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_m\right) \geq g\left(x_1-\tau_1 e_1, \ldots, x_m-\tau_m e_m, t_1-\tau_1, \ldots, t_m-\tau_m\right) \tag{18}$$

при всех $\tau_i \leq x_{i1} \leq \ldots \leq x_{ir_i}$, $i=1, \ldots, m$. Следовательно,

$$P_{\vec{M}}\left\{g\left(x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_m\right) \geq \sum_{i=1}^m f_i\left[\lambda_i\left(t_i-\tau_i\right)\right]\right\} \geq$$

$$\geq P_{\vec{M}}\left\{g\left(x_1-\tau_1 e_1, \ldots, x_m-\tau_m e_m, t_1-\tau_1, \ldots, t_m-\tau_m\right) \geq \sum_{i=1}^m f_i\left[\lambda_i\left(t_i-\tau_i\right)\right]\right\}=$$

$$=P_{\vec{\Lambda}}\left\{g\left(x_1, \ldots, x_m, t_1-\tau_1, \ldots, t_m-\tau_m\right) \geq \sum_{i=1}^m f_i\left[\lambda_i\left(t_i-\tau_i\right)\right]\right\} \geq \gamma,$$

что доказывает теорему.

Обозначим

$$S_i\left(x_i\right)=\sum_{j=1}^{r_i} x_{ij}+\left(N_i-r_i\right) x_{ir_i} \tag{19}$$

— суммарное время работы (наработку) элементов i-го типа на испытаниях. Рассмотрим функцию

$$g\left(x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_m\right)=\sum_{i=1}^m f_i\left\{B_i\left[S_i\left(x_i\right), t_i\right]\right\}, \tag{20}$$

где

$$B_i\left[S_i\left(x_i\right),t_i\right]=\frac{\Delta_\gamma\left(2r_i\right)t_i}{2S_i\left(x_i\right)},\ \text{при}\ t_i\le\frac{S_i\left(x_i\right)}{N_i};$$

$$B_i\left[S_i\left(x_i\right),t_i\right]=\infty,\ \text{при}\ t_i>\frac{S_i\left(x_i\right)}{N_i}\ .$$

Достаточно показать, что функция (20) удовлетворяет указанным выше условиям монотонности 1 и 2. Справедливость условия 1 очевидна. Покажем справедливость условия 2. Из (19) следует, что

$$S_i\left(x_i-\tau_i e_i\right)=S_i\left(x_i\right)-N_i\tau_i,$$

откуда

$$B_i\left[S_i\left(x_i-\tau_i e_i\right),t_i-\tau_i\right]=\frac{\Delta_\gamma\left(2r_i\right)\left(t_i-\tau_i\right)}{2(S_i-N_i\tau_i)},\ \text{при}\ t_i\le\frac{S_i}{N_i};\qquad(21)$$

$$B_i\left[S_i\left(x_i-\tau_i e_i\right),t_i-\tau_i\right]=\infty,\ \text{при}\ t_i>\frac{S_i}{N_i},\qquad(22)$$

где используем сокращенное обозначение $S_i=S_i\left(x_i\right)$. Отсюда видно, что функция (21), (22) монотонно убывает по τ_i при всех $\tau_i\le x_{i1}\le x_{i2}\le\ \dots\ \le x_{ir_i},0\le\tau_i\le t_i,i=1,\dots,m.$ Следовательно, функция (20) удовлетворяет условию 2. (Собственно, для того чтобы выполнялось это условие, и приходится использовать усечение в доверительной границе (9), (10) на уровне $t=S_i/N_i$.)

Таким образом, при $\gamma\ge1-e^{-3/2}$ справедливо неравенство (13). Полагая в этом неравенстве $t_1=t_2=\ldots=t_m=t,$ получаем

$$P_{\vec{R}}\left\{\sum_{i=1}^m f_i\left[B_i\left(S_i,t\right)\right]\ge\sum_{i=1}^m f_i\left[R_i\left(t\right)\right]\right\}\ge\gamma\qquad(23)$$

при всех $\vec{R}\in V$. Из неравенства (23), учитывая, что $A_i\left(S_i,t\right)=$ $=\exp\left[-B_i\left(S_i,t\right)\right]$, следует аналогичное неравенство для функции надежности системы

$$P_{\vec{R}}\left\{\prod_{i=1}^m h_i\left[A_i\left(S_i,t\right)\right]\le\prod_{i=1}^m h_i\left[P_i\left(t\right)\right]\right\}\ge\gamma$$

при всех $\vec{R} \in V$. Тогда справедлива формула (6) для нижней доверительной границы надежности системы для случая, когда ее элементы имеют ВФИ-распределения времени безотказной работы.

Из равенства (6) далее следует, что

$$\underline{P}\left(\vec{S},t\right)=\prod_{i=1}^{m} h_i\left\{\exp\left[-\frac{\Delta_\gamma\left(2r_i\right)t}{2S_i}\right]\right\},\ \text{при}\ t\le T^*; \tag{24}$$

$$\underline{P}\left(\vec{S},t\right)=0,\ \text{при}\ t>T^*,$$

где $T^* = \min\limits_i\left(S_i / N_i\right)$. Таким образом, полученное выражение (24) дает эффективную нижнюю доверительную границу для надежности системы со стареющими элементами на начальном интервале времени $0 \le t \le T^*$.

На практике часто требуется подтвердить требуемый высокий уровень надежности системы по результатам испытаний ее элементов на основе нижней доверительной границы надежности. Поэтому наиболее интересным является построение нижней доверительной границы надежности системы именно на указанном начальном интервале, на котором надежность системы еще достаточно высока. Отметим также, что существенный интерес с точки зрения приложений представляет дальнейшее обобщение полученных результатов на более общие модели сложных систем, в том числе систем с более общей сложной структурой, систем с восстановлением и др.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. *Математические методы в теории надежности*. Москва, Наука, 1965, 524 с.

[2] Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. *Statistical reliability engineering.* New York, John Wiley & Sons, 1999, 517 p.

[3] Павлов И.В. Интервальное оценивание квазивыпуклых функций в задачах надежности. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 1979, № 3, с. 69–79.

[4] Павлов И.В. Фидуциальный подход при оценке характеристик сложных систем по результатам испытаний. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 1979, № 4, с. 102–109.

[5] Павлов И.В. Доверительные границы для выпуклых функций многих неизвестных параметров. *Теория вероятностей и ее применения*, 1980, т. 253, № 2, с. 394–398.

[6] Павлов И.В. О фидуциальном подходе при вычислении доверительных границ для функций многих неизвестных параметров. *Доклады Российской академии наук*, 1981, т. 258, № 6, с. 1314–1317.

[7] Павлов И.В. О корректности фидуциального подхода при построении доверительных границ для показателей надежности сложных систем. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 1981, № 5, с. 46–52.

[8] Павлов И.В. Приближенно оптимальные доверительные границы для показателей надежности систем с восстановлением. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 1988, № 3, с.109–116.

[9] Павлов И. В., Ушаков И. А. Вычисление показателей надежности для сложных систем с восстанавливаемыми элементами. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 1989, № 6, с. 170–176.

[10] Левин П.А., Павлов И.В. Оценка показателей ресурса технических систем в переменном режиме функционирования. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009, № 2, с. 28–37.

[11] Левин П.А., Павлов И.В. Оценка надежности системы с нагруженным резервированием по результатам испытаний ее элементов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, № 3, с. 59–70.

[12] Павлов И.В. Расчет и оптимизация некоторых характеристик для модели вычислительного комплекса. *Информатика и ее применения*, 2012, т. 6, вып. 2, с. 59–62.

[13] Барлоу Р., Прошан Ф. *Математическая теория надежности*. Москва, Радио и связь, 1969, 488 с.

[14] Павлов И.В. Доверительные границы в классе распределений с возрастающей функцией интенсивности отказов. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 1977, № 6, с. 72–84.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Павлов И.В. Построение нижней доверительной границы для надежности системы с нагруженным резервированием, составленной из стареющих элементов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12.

URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1153.html

Павлов Игорь Валерианович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 100 научных трудов в области математической теории надежности, теории вероятностей и математической статистики. e-mail: ipavlov@bmstu.ru