УДК 517.9

Динамическая игровая модель экономического сотрудничества

© Э.Р. Смольяков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Вероятно, впервые решена сложная существенно нелинейная по фазовым координатам и управляющим переменным дифференциальная игра, моделирующая экономические отношения между странами.

***Ключевые слова**: дифференциальные игры, экономические модели.*

Введение. В работах [1–3] разработана теория решения любых конфликтных (игровых) задач (антагонистических, некооперативных, кооперативных, статических и динамических), которая, в отличие от классической теории игр [4–6], позволила находить решения (и в большинстве случаев единственное) любых игровых задач, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. В предлагаемой работе на основе этой теории получено полное решение сложной динамической игровой задачи, сформулированной в [7], решить которую методами классической теории, по существу, невозможно.

Агрегированная динамическая модель экономического сотрудничества между странами. Пусть на некотором интервале времени $T = (t_0, t_1)$ на мировом рынке взаимодействуют между собой два региона: один является экономически высокоразвитым, но собственных энергоресурсов у него недостаточно; второй — сырьевой, поставляющий в экономически развитый регион энергопродукты, необходимые для экономики первого региона. Скорость изменения национального дохода первого региона в основном определяется его производственной функцией $h = h(z, x_1, t)$, зависящей от основных фондов $x_1(t)$, скорости использования в производстве некоторого существенного природного энергоресурса $z(t)$ и экзогенно заданного технического прогресса. Доходы второй экономики зависят от добычи и экспорта в первую экономику энергоресурса, недостающего первой экономике. Обе торгующие между собой экономики будем называть игроками.

В общем виде математическая модель этой задачи была сформулирована в [7], она включала в себя пять управляющих переменных, три фазовых координаты, удовлетворяющих нелинейным дифференциальным уравнениям, и два существенно нелинейных по управляющим переменным и фазовым координатам платежных функционала, определяющих доходы стран, которые конкурентно сотрудничают на внешнем рынке.

В этой общей модели 1-й игрок добывает и использует некоторые существенные для функционирования и развития своей экономики природные энергоресурсы, а 2-й игрок производит такие же или некоторые другие, замещающие их энергоресурсы. Причем динамика потребления этих ресурсов на производственные цели 1-м игроком и динамика развития его основных фондов описываются тремя дифференциальными уравнениями. Кроме того, функционально учитывается тот факт, что по мере истощения природных ресурсов затраты на их добычу возрастают.

Переменная z в указанной выше производственной функции учитывает как собственные энергоресурсы 1-го игрока, так и замещающие их энергоресурсы, а также то, в какой мере покупаемые на рынке у 2-го игрока энергоресурсы экономически предпочтительнее собственных.

В качестве функций (функционалов) полезности в этой игровой задаче рассматриваются чистые доходы регионов на некотором планируемом интервале времени $T = (t_0, t_1)$.

В этой игровой модели не существует равновесия по Нэшу, а следовательно, необходимы новые понятия равновесия, разработанные в [1–3]. Вследствие большого числа (равного пяти) управляющих переменных искать в этой дифференциальной игре аналитическое решение, по существу, нереально. Поэтому несколько упростим ее, стараясь не потерять существенных качественных результатов.

В постановке, допускающей аналитическое исследование, в качестве производственной функции h можно использовать функцию типа Кобба — Дугласа $h = A(t)x_1^q z^r$, где q, r — некоторые выбранные степени. Ограничимся случаем, когда высокоразвитый регион (например, Япония) не имеет собственных энергоресурсов и вынужден покупать их у другого региона (например, у арабских стран), живущего в основном за счет продажи своих энергоресурсов. В этом случае вместо пяти управляющих переменных удается ограничиться всего двумя. В такой упрощенной постановке оказывается, что 1-й игрок (экономически развитый регион) не имеет своих собственных энергоресурсов и его экономика зависит от скорости v получения (по импорту) энергоресурсов, поставляемых 2-м игроком, и от скорости u собственных инвестиций в свои фонды x_1.

Тогда производственная функция h может быть взята в следующем, достаточно реалистичном виде:

$$h = A(t)\sqrt{x_1 v},$$

где $A(t)$ — коэффициент, моделирующий экзогенно заданный технический прогресс.

В этом случае игровая задача сводится к следующей: 1-й игрок, выбирая управление $u(t)$, стремится максимизировать функционал J_1, а 2-й игрок, выбирая управление $v(t)$, заинтересован в максимизации своего функционала J_2, причем эти функционалы принимают вид

$$J_1 = \int\limits_{\text{T}} \left[A(t)\sqrt{x_1(t)v(t)} - u(t) - v(t) \right] dt; \tag{1}$$

$$J_2 = \int\limits_{T} \left[1 - \frac{1}{e^{\alpha x_2 - 1}} \right] v(t)dt, \tag{2}$$

где $\dfrac{1}{e^{\alpha x_2} - 1}$ — коэффициент, учитывающий затраты на производство энергопродуктов x_2 и их удорожание по мере их истощения, причем в начальный момент t_0 имеет место неравенство $e^{\alpha x_2} \gg 1$.

Динамика фондов x_1 1-го игрока в этой упрощенной модели описывается уравнением

$$\dot{x}_1 = u - x_1\delta; \quad x_1(t_0) = x_1^0, \tag{3}$$

где δ — коэффициент амортизации фондов; скорость v импортируемых энергоресурсов (в стоимостном выражении), которой управляет 2-й игрок, определяется уравнением

$$x_2 = -v; \quad x_2(t_0) = x_2^0 \tag{4}$$

при следующих ограничениях на управляющие переменные:

$$0 \le u \le u^0; \; 0 \le v \le v^0. \tag{5}$$

Общая методика поиска решений в дифференциальных играх [1–3]. Основополагающую роль в теории [1–3] играет понятие A-равновесия, которое в дифференциальных играх целесообразно заменить несколько более сильным понятием A^c-равновесия [1, с. 202].

Определение 1. Ситуацию $q^* \in G$ назовем согласованной A_i^c-экстремальной, если любой стратегии $q_i \in G(q^{i*})\backslash q_i^*$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}^i \in G(q_i)$ остальных игроков так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\hat{q}^i, q_i) \le J_i(q^*) \tag{6}$$

при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\hat{q}^i(t) \ne q^{i*}(t)$, является подмножеством множества из T, на котором $q_i(t) \ne q_i^*$, $i = 1, 2, \ldots$ Ситуацию q^* назовем ситуацией согласованного A^c-равновесия, если неравенства (6) удовлетворяют потребности всех игроков, т.е. если $q^* \in A_1^c \cap \ldots \cap A_N^c = A^c$.

Для поиска A^c-равновесия в дифференциальных играх весьма эффективна следующая теорема [3, с. 189–190].

Теорема 1. Пусть q^*—A^c-равновесие в задаче с N участниками. Тогда найдется N ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций $p^i(t) = (p_0^i, p_1^i(t), \ldots, p_n^i(t))$; $p_0^i \ge 0$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих почти всюду в T уравнениям

$$p_k^i = -\iint\limits_{W(t)} p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k} dq^*, \; k = 1, \ldots, n, \; i = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \ldots, f_n)$,
и краевым условиям

$$p_k^i(t_1) = 0, \quad k \notin K; \tag{8}$$

гамильтонианы $H^i = \int\limits_{W(t)} p^i f^i dq^*$ непрерывны в T; A^c-равновесная ситуация q^* удовлетворяет отношениям

$$H^i(\hat{q}^i, q_i) \le H^i(q^*); \; q_i \in G(q^{i*}); \; \hat{q}^i \in G(q_i), \, i = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

В отношении всех базовых равновесий, более сильных, чем A^c-равновесие, справедливы некоторые аналоги уравнений (7), (8) и условий (9) [1–3].

Для решения рассматриваемой задачи потребуются еще два понятия равновесия, последовательно усиливающих A^c-равновесие, которое далее будем называть A-равновесием.

Определение 2. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию $\max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q^*)$. Назовем ситуацию $q^* \in G$ B-равновесием, если

$$q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} B_i = B,$$

где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Определение 3. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем $\overline{D_i}$ -экстремальной, если она удовлетворяет условию $\max_{q \in B_i} J_i(q^*)$, или (что то же самое, но только в развернутом виде) условию $\max_{q_i \in \Pr_{Q_i} A_i} J_i(\operatorname{Arg}\max_{q^i \in A_i(q_i)} J_i(q_i, q^i)) = J_i(q^*)$ и назовем ее $\overline{D}$ - равновесием, если

$$q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} \overline{D_i} = \overline{D}.$$

Если рассматривать гамильтонианы в необходимых условиях (7)–(9) в качестве платежных функций в локальной статической игре, определенной в момент t, то можно в каждый момент t решить локальную статическую конфликтную задачу о наисильнейшем равновесии. Причем число таких локальных задач, подлежащих решению, оказывается не только не бесконечным (хотя время t и принимает бесконечное множество значений), но, как правило, сводится всего к одной или нескольким локальным задачам. Эти несколько статических локальных задач позволяют найти решение исходной дифференциальной игры.

Решение поставленной дифференциальной игры. Согласно теореме 1, вводим в рассмотрение гамильтонианы

$$H^1 = p_0^1(A\sqrt{x_1 v} - u - v) + p_1^1(u - x_1\delta) - p_2^1 v; \tag{10}$$

$$H^2 = p_0^2\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha x_2} - 1}\right)v + p_1^2(u - x_1\delta) - p_2^2 v,$$

где $p_0^1 = p_0^2 = 1$; $p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2$ — множители Лагранжа, удовлетворяющие уравнениям (7), (8), которые принимают вид

$$\dot{p}_1^1 = -\frac{\partial H^1}{\partial x_1} = -p_0^1 A\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{x_1}} + p_1^1\delta, \quad p_1^1(t_1) = 0; \tag{11}$$

$$\dot{p}_2^2 = -\frac{\partial H^2}{\partial x_2} = -p_0^2\frac{\alpha v e^{\alpha x_2}}{(e^{\alpha x_2} - 1)^2}, \quad p_2^2(t_1) = 0; \tag{12}$$

$$\dot{p}_2^1 = \frac{\partial H^1}{\partial x_2} = 0, \quad p_2^1(t_1) = 0; \tag{13}$$

$$\dot{p}_1^2 = -\frac{\partial H^2}{\partial x_1} = -p_1^2\delta, \quad p_1^2(t_1) = 0. \tag{14}$$

Система уравнений (11)–(14) имеет следующее решение:

$$p_1^1(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\delta t}\int_t^{t_1} A(t)e^{-\delta\tau}\sqrt{vx_1}\,d\tau \geq 0; \tag{15}$$

$$p_2^2(t) = \alpha\int_t^{t_1} \frac{v(\tau)e^{\alpha x_2}}{(e^{\alpha x_2}-1)^2}\,d\tau \geq 0; \tag{16}$$

$$p_2^1(t) \equiv 0; \tag{17}$$

$$p_1^2(t) \equiv 0. \tag{18}$$

С учетом решений (15)–(18) гамильтонианы H^1 и H^2 принимают вид

$$H^1 = (A\sqrt{x_1 v} - v) + (p_1^1 - 1)u - p_1^1 x_1\delta = K_1\sqrt{v} - v + K_2 u - K_3; \tag{19}$$

$$H^2 = \left[\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha x_2}-1}\right) - p_2^2\right]v = K(t)v, \tag{20}$$

где в гамильтонианах введены новые обозначения с целью более удобной ссылки на них в дальнейшем.

Найдем наисильнейшие игровые равновесия в этой дифференциальной игре, воспользовавшись тем, что A^c-равновесие совместно с теоремой 1 позволяет сводить задачу поиска решения дифференциальной игры к одной или нескольким простым локальным статическим задачам, в которых платежными функциями являются гамильтонианы H^1 и H^2 в каждый момент t на траектории дифференциальной игры. На тех участках траектории, на которых оба гамильтониана, рассматриваемые как функции только управляющих переменных, имеют неизменный вид, локальную игровую задачу рассматриваем, как если бы она была статической.

Если в некоторый момент t один из гамильтонианов изменяет свой вид, то с этого момента до некоторого следующего момента t'' на траектории решаем вторую локальную задачу и т. д. Найденное в результате управление вдоль всей траектории (слагающееся из последовательно состыкованных управлений на каждом из участков) определяет стратегии поведения участников в исходной дифференциальной игре. Например, момент t', когда коэффициент $(p_1^1 - 1)$ перед управляющей переменной u в гамильтониане H^1 изменяет знак, является моментом стыковки двух примыкающих к этому моменту локальных игр. Другим моментом может стать, например, момент t'' изменения знака коэффициента перед v в гамильтониане H^2. Момент t' определяется как момент прохождения коэффициента $p_1^1(t)$ (всегда неотрицательного и описываемого формулой (15)) через значение 1, а момент t'' определяется как момент изменения знака коэффициента $K(t)$ перед управлением v в гамильтониане H^2.

Покажем, что $p_1^1(t) > 1$ при $t < t'$ и $p_1(t) < 1$ при $t > t'$, причем интервал (t, t') значительно превосходит интервал (t', t_1).

Согласно формуле (15), $p_1^1(t) > 0$ и $p_1^1(t_1) = 0$, причем функция $p_1^1(t)$ быстро возрастает (назад во времени) от момента t_1 до момента t_0. Отсюда следует, что коэффициент $K_2(t)$ в гамильтониане H^1 положителен почти на всей траектории при $t \in (t_0, t')$ за исключением малого интервала (t', t_1) перед конечным моментом t_1. Существование момента t' порождает по меньшей мере две «локальные» игровые задачи на траектории.

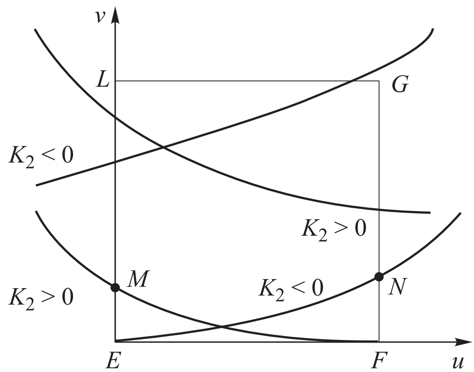
В гамильтониане H^2 неравенство $e^{\alpha x_2} \gg 1$ может сохраняться на довольно большом интервале (соизмеримом со временем истощения природных ресурсов), а следовательно, на разумном интервале планирования $T = (t_0, t_1)$ величина $1/(e^{\alpha x_2})$ тем более остается очень малой. Коэффициент $p_2^2(t)$ также остается малым $(p_2^2 < 1)$ на этом интервале, что видно из формулы (16). Отсюда следует, что существует разумный горизонт планирования T, на котором коэффициент $K(t)$ в формуле (20) остается положительным.

Если горизонт планирования T достаточно велик, то помимо указанного выше момента t' возможен еще второй критический момент t'', в который коэффициент $K(t)$ изменит знак на отрицательный. Это приведет к тому, что появится и третья локальная задача. Однако в прикладных задачах математически моделировать динамику экономики на большом интервале времени не имеет смысла, поскольку до сих пор не получено удовлетворительно точных математических формулировок законов экономического развития. Вследствие этого рассматривать случай больших горизонтов планирования T в случае использования в модели любых производственных функций лишено смысла, а следовательно, отсутствует необходимости изучать и случай появления в модели критического момента t''.

Итак, принимаем, что только критический момент t' изменения знака коэффициента $K_2(t)$ возможен в рассматриваемой дифференциальной игре двух экономических объектов. Выясним поведение уровней функции $H^1 = \text{const}$ на плоскости (u, v). С этой целью продифференцируем равенство (19) по u, считая $v = v(u)$:

$$dv / du = -\frac{K_2}{(K_1 / (2\sqrt{v}\} - 1)}. \tag{21}$$

Поскольку в любой экономической системе $K_1 \gg 2\sqrt{v}$, то при $K_2 > 0$ получаем $dv / du < 0$. Следовательно, в квадрате $EFGL$ (рисунок) при $K_2 > 0$ уровни функции H_1 имеют отрицательный наклон, а при $K_2 < 0$ — положительный, причем все эти уровни подходят к оси u по касательной. Как видно на рисунке, чем выше уровень $H_1 = \text{const}$, тем большее значение принимает гамильтониан H_1 и тем он предпочтительнее для 1-го игрока. Уровни функции $H_2 = \text{const}$, очевидно, горизонтальны, причем для 2-го игрока предпочтительнее (см. рисунок) более высокие уровни (для случая $K(t) > 0$).



Найдем все игровые равновесия в квадрате $EFGL$ (см. рисунок) для первой статической локальной игры, отвечающей случаю $K_2 > 0$, т. е. на интервале времени (t_0, t').

Прежде всего для первой локальной игры с платежными функциями $H_1(u, v)$ и $H_2(u, v)$ найдем наиболее слабые A-равновесия в прямоугольнике $EFGL$ (см. рисунок), под которыми на самом деле в этой игре понимаем A^c-равновесия. A_i-экстремальные ситуации и A-равновесие задаем следующими фигурами и отрезками:

$$A_1 = [FGLMF]; \quad A_2 = [GL]; \; A = [GL].$$

Более сильные B- и $\overline{D}$-равновесия на множестве A имеют вид

$$B_1 = [GL], \; B_2 = G, \; B = G; \; \overline{D_1} = \overline{D_2} = \overline{D} = G.$$

Таким образом, на первом подынтервале (t_0, t') исходной дифференциальной игры равновесную пару управлений $(u(t), v(t))$ задаем точкой G (см. рисунок), определяющей независимое от времени постоянное управление обоих игроков на интервале (t_0, t'): $u(t) = u^0$; $v(t) = v^0$. Аналогичным образом ищем конфликтное равновесие в исходной дифференциальной игре на оставшемся участке траектории при (t', t_1), которому теперь уже соответствует вторая локальная игра с теми же платежными функциями H^1 и H^2, но теперь при $K_2 < 0$. Для второй локальной игры получаем следующие равновесия:

$$A_1 = [GLENG],\ A_2 = [GL],\ A = [GL];$$

$$B_1 = [GL],\ B_2 = B = L,\ \overline{D_1} = \overline{D_2} = \overline{D} = L.$$

Следовательно, на заключительном участке траектории (t', t_1) конфликтное равновесное управление игроков, отвечающее равновесию во второй локальной игровой задаче, имеет вид $u(t) = 0$, $v(t) = v^0$. Смысл этого управления на заключительном участке траектории состоит в том, что поскольку (согласно постановке задачи) интервал (t_0, t_1) зафиксирован, то 1-му игроку невыгодно после некоторого момента t' инвестировать средства $u(t)$ в развитие своего производства и для восстановления после амортизации фондов, так как постановка задачи предполагает, что экономика после момента t_1 как бы перестает существовать. В то же время второму игроку выгодно добывать и продавать ресурсы по максимуму до последнего момента t_1.

Работа поддержана Программой фундаментальных исследований ОНИТ РАН и РФФИ № 12-01-00961-а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Смольяков Э.Р. *Теория конфликтных равновесий*. Москва, Едиториал УРСС, 2005, 304 с.

[2] Смольяков Э.Р. *Методы решения конфликтных задач*. Москва, МГУ, 2010, 244 с.

[3] Смольяков Э.Р. *Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи*. Москва, МГУ, 2010, 232 с.

[4] Нейман Дж., Моргенштерн О. *Теория игр и экономические поведение*. Москва, Наука, 1970, 708 с.

[5] Воробьев Н.Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры*. Москва, Наука, 1984, 496 с.

[6] Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения*. Москва, Сов. радио, 1980, 304 с.
[7] Смольяков Э.Р. Оптимальный дележ в кооперативных играх и динамическая игровая модель мировой энергетики. *Тр. ИСА РАН*, 2008, т. 33, вып. 12, с. 35–48.

Статья поступила в редакцию 05.07.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Смольяков Э.Р. Динамическая игровая модель экономического сотрудничества. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12.
URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1152.html

Смольяков Эдуард Римович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: ser-math@rambler.ru.