УДК 534.141

Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения

© А.А. Пожалостин, Д.А. Гончаров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На длительных пассивных участках полета разгонных блоков ракет-носителей реализуются условия микрогравитации. Чтобы исключить аварийные ситуации, необходимо бесперебойно подавать топливо в заборное устройство, например, с помощью полупроницаемых капиллярных фазоразделителей, обеспечивающих сплошность компонентов топлива. В статье проанализирована динамика непроницаемой мембраны, взаимодействующей с жидкостью. Рассматриваемую краевую задачу можно применять в качестве первого приближения для анализа динамики такого фазоразделителя. Изложено точное аналитическое решение краевой задачи о малых свободных осесимметричных колебаниях двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. Получено трансцендентное частотное уравнение, члены которого — быстро сходящиеся ряды.

Ключевые слова: *краевая задача, разделитель, уравнение Лапласа, интеграл Коши — Лагранжа.*

Введение. В настоящей работе описано точное аналитическое решение в рамках принятых допущений краевой задачи о малых свободных осесимметричных колебаниях двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. В качестве разделителя рассмотрена упругая тонкая непроницаемая мембрана. В ходе решения этой краевой задачи получено трансцендентное частотное уравнение, левая часть которого представляет собой мероморфную функцию.

Исследованию движения идеальной несжимаемой и нестратифицированной жидкости совместно с упругим днищем посвящена работа [1]. Постановка задачи с иным подходом к решению дифференциального уравнения движения пластины представлена в статье [2]. Исследование движения стратифицированной жидкости совместно с упругим днищем в виде пластины изложено в статье [3]. Схожая с рассматриваемой в статье задача решена с применением операторных методов, проводились также исследования свойств спектра, тем не менее было получено лишь приближенно-аналитическое решение, а не точное [4]. В работе [5] рассмотрены различные технические реализации фазоразделяющих экранов. Конструктивные исполнения, динамика и теплообмен в фазоразделяющих экранах изложены в монографии [6]. Вопросам теплообмена впористых элементах конструкций посвящена работа [7]. В работах [8, 9] получены приближенные аналитические решения задачи без учета и с учетом сил поверхностного натяжения. В работе [10] рассмотрена устойчивость малых колебаний свободной поверхности жидкости в жесткой цилиндрической оболочке. В работе [11] приведены исследования колебаний многослойных жидкостей совместно с разделяющими мембранами; получено приближенное решение, согласуемое с проведенным в [8].

Исследуемую краевую задачу можно рассматривать в качестве модельной для анализа динамики разгонного блока ракеты-носителя на пассивном участке траектории.

Постановка задачи. Для получения точного аналитического решения краевой задачи сделаем следующие допущения:

1) жидкость заполняет цилиндрический бак с плоским упругим разделителем, закрытый жестким плоским днищем;

2) материал мембраны однородный, изотропный и подчиняется закону Гука;

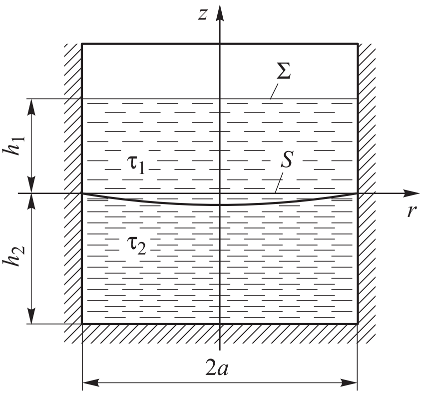

Рис. 1. Модель бака, заполненного жидкостью с разделителем

3) жидкость идеальная, несжимаемая, ее движение — потенциальное, с потенциалом скоростей Φ.

Рассмотрим нормальные колебания жидкости (рис. 1). Потенциал скоростей должен удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2\Phi = 0$ в области τ (τ — объем, занимаемый жидкостью). Слой *1* жидкости плотностью ρ_1 занимает полость объемом τ_1 и высотой h_1, а слой *2* плотностью ρ_2 — полость объемом τ_2 и высотой h_2. Невозмущенную поверхность жидкости обозначим как Σ, невозмущенную поверхность мембраны — как *S*. Уравнение движения упругого разделителя с граничным условием имеет вид

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \dot{w}}{\partial r} + \rho_0\delta\frac{\partial \ddot{w}}{\partial t}\right) = -\dot{p}(r,\, t),$$

$$w(r,\, t) = 0 \text{ при } r = R.$$

Здесь w — перемещение мембраны; $\dot{w} = \dfrac{\partial w}{\partial t}$; ρ_0, δ, T — плотность материала, толщина и натяжение мембраны соответственно; p – гидродинамическое давление жидкости на мембрану; R — радиус цилиндра. В дальнейшем инерцией мембраны пренебрегаем.

Потенциал скоростей в объеме τ_1 обозначим через Φ_1, в объеме τ_2 — через Φ_2. Функции Φ_1 и Φ_2 должны удовлетворять граничным условиям

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial r} = 0, \; k = 1, 2, \; r = R, \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} = 0, \; x_2 = 0. \tag{2}$$

Запишем граничные условия на свободной поверхности [9]:

$$-\frac{\rho_1}{\sigma_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{\rho_1}{\sigma_1}\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} u - \Delta u = 0 \text{ при } x_1 = h_1,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \dot{w} \text{ при } x_1 = h_1,$$

Здесь σ_1 — коэффициент поверхностного натяжения; u — смещение свободной поверхности; $\Pi = g x_1$ — потенциал массовых сил (g — ускорение свободного падения); Δ — оператор Лапласа — Бельтрами, который в случае плоской свободной поверхности имеет вид оператора Лапласа.

Кроме того, функции Φ_1 и Φ_2 должны удовлетворять граничным условиям на поверхности мембраны S:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \dot{w}, \; x_1 = 0. \tag{3}$$

Теперь найдем явные выражения для потенциалов скоростей частиц жидкости Φ_1 и Φ_2. Согласно методу Фурье

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x_k) R_i(r) S(t). \tag{4}$$

Далее временной множитель $S(t)$ опущен. Подставляя соотношение (4) в уравнение Лапласа и разделяя переменные, для i-го члена ряда получаем

$$\frac{X_i''}{X_i} = -\frac{\frac{1}{r}R_i' + R_i''}{R_i} = \frac{\mu_i^2}{R^2}, \; i = 1, 2,$$

где

$$X_i^{"}=\frac{d^2X_i}{dx_k^{\ 2}},\quad R_i'=\frac{dR_i}{dr},\quad R^{"}=\frac{d^2R}{dr^2}.$$

Таким образом,

$$X_i^{"}-\frac{\mu_i^2}{R^2}X_i=0,\quad R''+\frac{1}{r}R_i'+\frac{\mu_i^2}{R^2}R_i=0. \tag{5}$$

Частные решения уравнений (5) представим в виде

$$X_i(x_k)=C_{1i}\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_i x_k}{R}\right)+C_{2i}\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_i x_k}{R}\right), \tag{6}$$

$$R_i(r)=A_{1i}J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)+A_{2i}N_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right), \tag{7}$$

где C_{1i}, C_{2i}, A_{1i}, A_{2i} — константы, определяемые из граничных условий; J_0, N_0 — бесселевы функции первого и второго рода соответственно. Ввиду ограниченности функций Φ_i при $r=0$ имеем $A_{2i}=0$.

С учетом соотношений (6) и (7) запишем следующие выражения для потенциалов скоростей жидкости:

$$\Phi_1=C_{20}+C_{10}\frac{x_1}{h_1}+\sum_{i=1}^{\infty}A_{1i}J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\left[C_{1i}\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_i x_1}{R}\right)+C_{2i}\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_i x_1}{R}\right)\right], \tag{8}$$

$$\Phi_2=C_{21}+C_{22}\frac{x_2}{R}+\sum_{i=1}^{\infty}A_{2i}J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\left[C_{3i}\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_i x_2}{R}\right)+C_{4i}\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_i x_2}{R}\right)\right]. \tag{9}$$

Здесь μ_i — i-й корень бесселевой функции первого рода. Временной множитель в соотношениях (8) и (9) опущен.

Дифференциальное уравнение движения мембраны имеет вид

$$\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\dot{w}}{\partial r}=\frac{1}{T}\left[-\rho_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}\bigg|_{x_1=0}+\rho_2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}\bigg|_{x_2=h_2}\right], \tag{10}$$

где $p_k=\rho_k\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial t}$ — гидродинамическое давление жидкости на мембрану. Отметим, что однородное уравнение (10) удобно записывать для функции $\dot{w}=\dfrac{\partial w(r,\,t)}{\partial t}$. Его решение можно представить как $\dot{w}=C_1+C_2\ln r$.

В силу граничных условий (1)–(3) выражения для потенциалов скоростей принимают вид

$$\Phi_1 = -C_{10}\frac{h_1}{R} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i} J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\Lambda_i, \qquad (11)$$

$$\Phi_2 = -C_{22} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{3i} J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_i h_2}{R}\right), \qquad (12)$$

где

$$\Lambda_i = \frac{\left[\frac{\rho_1 g}{\sigma_1} + \left(\frac{\mu_i}{R}\right)^2\right]\left(\frac{\mu_i}{R}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_i h_1}{R}\right) - \frac{\rho_1}{\sigma_1}\omega^2 \mathrm{sh}\left(\frac{\mu_i h_1}{R}\right)}{\frac{\rho_1}{\sigma_1}\omega^2 \mathrm{ch}\left(\frac{\mu_i h_1}{R}\right) - \left[\frac{\rho_1 g}{\sigma_1} + \left(\frac{\mu_i}{R}\right)^2\right]\left(\frac{\mu_i}{R}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\mu_i h_1}{R}\right)}\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_i z}{R}\right) + s\mathrm{h}\left(\frac{\mu_i z}{R}\right).$$

Окончательно, с учетом соотношений (4), (11), (12) и дифференциальное уравнение движения запишем следующим образом:

$$\nabla^2 \dot{w} = \rho_1\omega^2\left[-C_{10}\frac{h_1}{R} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i} J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\Lambda_i\right] -$$

$$-\rho_2\omega^2\left[-C_{22} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{3i} J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_i h_2}{R}\right)\right], \qquad (13)$$

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr},$$

где ω — собственная частота колебаний механической системы. Решение уравнения (13) имеет вид

$$\dot{w} = C_1 + \rho_1\omega^2\left[-C_{10}\frac{h_1}{R}\frac{r^2}{4} - \sum_{i=1}^{\infty} C_{1i}\left(\frac{R}{\mu_i}\right)^2 J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\Lambda_i\right] -$$

$$-\rho_2\omega^2\left[-C_{22}\frac{r^2}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{2i} J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)\left(\frac{R}{\mu_i}\right)^2 \mathrm{ch}\left(\frac{\mu_i H_2}{R}\right)\right].$$

Здесь полагаем $C_2 = 0$, поскольку прогиб мембраны ограничен при $r = 0$.

Для определения соответствующих постоянных разложим член $\frac{r^2}{4}$ в ряд по функциям $J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right)$:

$$\frac{r^2}{4} = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) + \beta_0,$$

где $\beta_0 = \dfrac{R^2}{8}$; $\gamma_i = \dfrac{4}{J_0(\mu_i)} \dfrac{R^2}{\mu_i^2}$.

Вводя обозначения:

$$\alpha_{0i} = \frac{\gamma_i}{\beta_0}, \quad \alpha_{2i} = \frac{\mu_i H_2}{R},$$

$$\alpha_{11}^{(i)} = \frac{\mu_i}{R} - \rho_1 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}, \quad \alpha_{12}^{(i)} = \rho_2 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2} \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_i H_2}{R}\right),$$

$$b_{1i} = \left(\frac{\mu_i}{R}\right) \operatorname{th}\alpha_{2i} + \rho_2 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2}, \quad b_{2i} = \alpha_{11}^{(i)} + \frac{\alpha_{12}^{(i)}}{\operatorname{ch}\alpha_{2i}} \frac{\rho_1 \omega^2 \dfrac{R^2}{\mu_i^2}}{\left(\dfrac{\mu_i}{R}\right) \operatorname{th}\alpha_{2i} - \rho_2 \omega^2 \dfrac{R^2}{\mu_i^2}},$$

$$\beta_{1i} = \alpha_{0i} \left[1 - \frac{\alpha_{12}^{(i)}}{\operatorname{ch}\alpha_{2i} b_{2i}}\right], \quad \beta_{2i} = \frac{\alpha_{0i}}{\operatorname{ch}\alpha_{2i} b_{2i}} \left[1 + \frac{1}{b_{2i}} \rho_1 \omega^2 \frac{R^2}{\mu_i^2} \left[1 - \frac{\alpha_{12}^{(i)}}{\operatorname{ch}\alpha_{2i} b_{2i}}\right]\right],$$

представим частотное уравнение в виде

$$\omega^2 \left[\rho_2 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{2i} \frac{R^2}{\mu_i^2} J_0(\mu_i) \operatorname{ch}\alpha_{2i} - \rho_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{1i} \frac{R^2}{\mu_i^2} J_0(\mu_i) \Lambda_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_i J_0(\mu_i)}{\beta_0}. \quad (14)$$

Ограничим сумму ряда (14) пятью членами и получим зависимость квадрата собственной частоты первого тона колебаний ω^2 от числа Бонда Bo (рис. 2). При построении зависимостей принимали: $m_S = 30$ кг, $\rho_2 = 70$ кг/м^3, $\rho_1 = 0{,}9\rho_2$, $R = 1$ м, $h_1 = 1$ м, $h_2 = 1$ м. Из условия Bo = 0 находим значение критической частоты, которая свидетельствует об отсутствии нарушения односвязности объема жидкости.

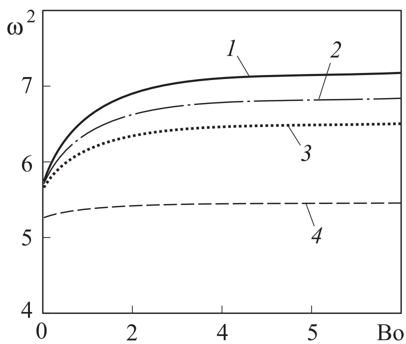

Рис. 2. Зависимость квадрата собственной частоты ω^2 от числа Бонда Bo при τ = 2 000 Н/м, $\omega_{кр} = 2{,}39$ с$^{-1}$ (*1*), τ = 1500 Н/м, $\omega_{кр} = 2{,}26$ с$^{-1}$ (*2*), τ = 1800 Н/м, $\omega_{кр} = 2{,}37$ с$^{-1}$ (*3*), τ = 1900 Н/м, $\omega_{кр} = 2{,}38$ с$^{-1}$ (*4*)

Заключение. Таким образом, получено точное аналитическое решение модельной задачи о малых движениях жидкости, совместно с фазоразделяющим устройством. Частотное уравнение (14) позволяет контролировать результаты численного моделирования и при исследовании зависимости собственной частоты от влияния соотношения массовых сил и сил поверхностного натяжения (характеризуемых числом Бонда), выявлять опасные режимы на пассивном участке траектории полета, где движение жидкости может быть неустойчивым.

Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ № НШ.4748.2012.8

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пожалостин А.А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном. *Известия высших учебных заведений. Сер. «Авиационная техника»*, № 4, 1963, с. 25–32.

[2] Петренко М.П. Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости. *Прикладная механика*, Киев, 1969, т. V, вып. 6, с. 44–50.

[3] Андронов А.В. "Колебания идеальной стратифицированной жидкости в контейнере с упругим днищем. *Вопросы волновых движений жидкости*, Краснодар, 1987, с. 7–15.

[4] Нго Зуй Кан. О движении идеальной жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, заполняющей сосуд с плоским днищем. *Механика твердого тела*, 1980, № 3, с. 143–153.

[5] Сапожников В.Б., Меньшиков В.А., Партола И.С., Корольков А.В. Развитие идей профессора В.М. Поляева по применению пористо-сетчатых материалов для внутрибаковых устройств, обеспечивающих многократный запуск жидкостных ракетных двигателей. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*. Москва, 2006, вып. 2, с. 42–57.

[6] *Капиллярные системы отбора жидкости из баков космических аппаратов*. Поляев В.М., ред. Москва, УНПЦ «Энергомаш», 1997, 328 с.

[7] Пелевин В.Ф., Авраамов Н.И., Орлин С.А., Синцов А.Л. Эффективность теплообмена в пористых элементах конструкций жидкостных ракетных двигателей. *Инженерный журнал: наука и инновации*, № 4, 2013, с. 32.

[8] Гончаров Д.А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана*. Электрон. журн. 2012. № 4. Режим доступа: http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html (дата обращения 26.09.2013)

[9] Гончаров Д.А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения. *Наука и образование*. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. №11.DOI: 10.7463/1113.0619258

[10] Шунгаров Э.Х., Гончаров Д.А. Об устойчивости малых колебаний свободной поверхности. *Молодежный научно-технический вестник*, № 4, 2013, с. 24.

[11] Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном. *Динамические системы*, 2006, вып. 21, с. 7–13.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1147.html

Пожалостин Алексей Алексеевич родился в 1940 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1963 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 печатных работ в области гидроупругости: e-mail: a.pozhalostin@mail.ru

Гончаров Дмитрий Александрович родился в 1988 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2011 г. Аспирант кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: гидродинамика и динамика космических аппаратов. e-mail: goncharov@bmstu.ru