УДК 531.8/534

Моделирование колебаний с инерционным возмущением

© В.В. Дубинин, В.В. Витушкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Представлен метод моделирования колебаний различных механических систем с инерционным возмущением с использованием разработанной экспериментальной установки. Приведено описание конструкции этой установки, теоретических основ ее работы, методики проведения исследований колебаний и построения расчетных и экспериментальных амплитудно-частотных (АЧХ) и фазочастотных (ФЧХ) характеристик. Показано, что в силу подобия дифференциальных уравнений движения различных реальных промышленных объектов и рассматриваемой экспериментальной установки возможно ее применение для моделирования процессов колебаний указанных объектов. Приведены параметры подобия, позволяющие осуществлять такое моделирование и получать АЧХ и ФЧХ различных промышленных объектов, описан пример построения АЧХ некоторой системы с использованием экспериментов, проведенных на лабораторной установке.

Ключевые слова: *механические системы, инерционное возмущение, колебания систем, частотные характеристики, лабораторная установка, моделирование колебаний, параметры подобия.*

Введение. Развитие информационных технологий в различных областях науки и высшем образовании позволяет осуществлять математическое моделирование физических процессов и реализовывать органичное соединение такого моделирования с физическим экспериментом. Это направление в течение ряда лет успешно развивается на кафедре теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана путем создания исследовательских комплексов различного типа механических систем для научной работы и учебного процесса [1–4].

Физический эксперимент в таких комплексах играет принципиально новую роль, прочно связан с моделированием и позволяет сразу же его проверить и предложить новые идеи для моделирования. Модельные установки, не требующие больших финансовых затрат, создают для основных процессов того или иного большого промышленного комплекса. Их можно дополнять простыми устройствами обратной связи, нелинейностями и другими устройствами, а также соединять одни с другими по принципам построения основного комплекса.

Реально на практике часто встречаются процессы, в которых возникают колебания систем с инерционным возмущением. Авторами настоящей работы создана физическая установка, на которой моделируется такой процесс. Эта установка позволяет проводить научные исследования данного реального физического процесса по различным параметрам, а также моделировать его с помощью разработанных программ расчетов, записи и обработки экспериментов. Она входит в лабораторный исследовательский комплекс, который можно использовать также и в учебном процессе для исследований линейной модели вынужденных колебаний механической системы с инерционным возмущением.

Лабораторный исследовательский комплекс. Лабораторный исследовательский комплекс включает в себя собственно электромеханическую установку с блоком управления, аналого-цифровой преобразователь (АЦП), ПЭВМ и программно-методическое обеспечение (рис. 1).

Рис. 1. Общий вид лабораторного комплекса

Электромеханическая лабораторная установка (рис. 2, *а*) представляет собой механическую систему, состоящую из основания *1* с направляющими *2*, в которых с возможностью продольного перемещения установлена каретка *4* с колесами *3*. На каретке смонтирован механизм возбуждения ее колебаний, состоящий из электродвигателя *5*, редуктора *6*, маятника *12* и шарнирного механизма, включающего в себя закрепленный на выходном валу редуктора кривошип *7* с регулируемым эксцентриситетом и шток *8*. Маятник шарнирно установлен на стойке *11*, закрепленной на каретке, и снабжен грузом *13* и рычагом *9*, шарнирно соединенным со штоком *8*, при этом груз можно закреплять на стержне маятника на различных расстояниях от его оси вращения. Маятник совершает вынужденные колебания в соответствии с законом, близким к синусоидальному. Эти колебания обеспечивают формирование возмущающего воздействия на каретку. Каретка соединена с основанием пружинами *15* и на ней установлены также дополнительные грузы *14*. Устройство снабжено потенциометрическим датчиком *10* угла поворота маятника и индуктивным датчиком *18* продольных перемещений каретки, блоком *16* электропитания электродвигателя и датчиков и ПЭВМ *17*. При этом датчик *18* выполнен в виде катушки, установленной на основании *1*, и ферромагнитного стержня *19*, закрепленного на каретке.

Сменные пружины *15* и грузы *14* позволяют изменять жесткостные и инерционные свойства системы, получать и исследовать различные амплитудно-частотные (АЧХ) и фазочастотные (ФЧХ) характеристики вынужденных колебаний каретки.

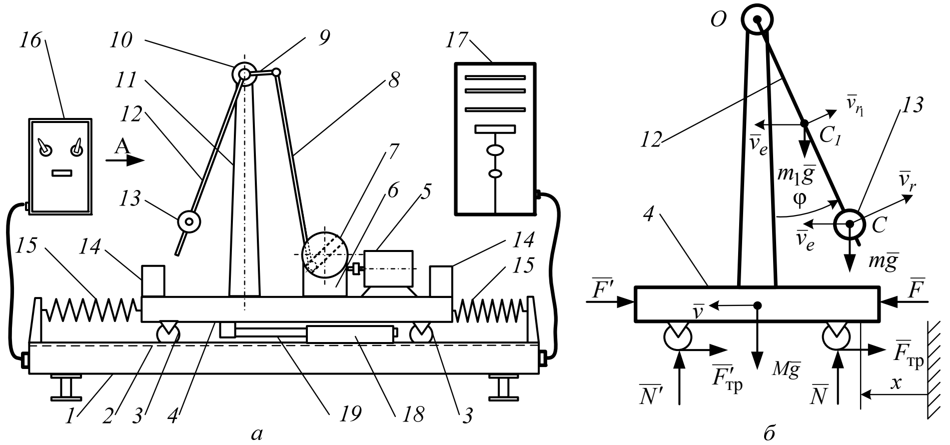

Рис. 2. Конструктивная (*а*) и расчетная (*б*) схемы электромеханической установки

Установка может быть использована для исследований в различных вариантах. В настоящей работе представлен ее вариант, в котором каретка соединена с неподвижным основанием двумя пружинами, а маятнику сообщается от электродвигателя принудительное колебательное движение. В этом случае изучают установившееся колебательное движение каретки. Исследования проводят на основании принципа сравнения экспериментальных и теоретических данных. Для вынужденных колебаний каретки, вызванных возмущением инерционного типа, при изменении частоты вынужденных колебаний строят теоретические кривые АЧХ и ФЧХ. Вычисление амплитуды и разности фаз осуществляется на основе анализа сигналов, снимаемых с датчиков угла отклонения маятника и линейного перемещения каретки, т. е. сигналов возмущения и вынужденных колебаний. Запись сигналов и их обработку, получение параметров вынужденных колебаний тележки проводят с помощью аппаратно-программного комплекса ПЭВМ. Пары измерений частота — амплитуда, частота — разность фаз отображаются в виде точек на экране дисплея, и при постепенном изменении частоты возмущения они сливаются в размытые линии, которые соответствуют реальным АЧХ и ФЧХ. Программное обеспечение рассматриваемого комплекса реализовано как в оригинальном исполнении, так и в среде системы LabView 7.0 в виде виртуального прибора, на экран которого выводятся экспериментальные данные и указанные теоретические зависимости.

Теоретические основы исследований. Рассмотрим линеаризованную математическую модель движения каретки без учета сопротивления. На расчетной схеме установки (рис. 2, *б*) электродвигатель и механизм привода маятника не показаны. Масса каретки равна M. Массу маятника m считаем сосредоточенной в точке C. Длина маятника $OC = l$. Колеса *3* совершают плоское движение, но в силу их малой массы будем учитывать ее в общей массе каретки M при прямолинейном поступательном движении последней (т. е. вращение колес не учитывается). Система имеет две степени свободы, введены две обобщенные координаты: x — линейное перемещение тележки и φ – угловое отклонение маятника. Изменение координаты φ задано, а уравнение $x = x(t)$ необходимо определить. Примем, что колеса катятся без скольжения, поэтому работа на перемещениях точек приложения сил $\bar{N}, \bar{N}', \bar{F}_{\text{тр}}, \bar{F}'_{\text{тр}}$ равна нулю.

Для составления дифференциального уравнения движения каретки используем уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \tag{1}$$

Здесь $T = \dfrac{Mv^2}{2} + \dfrac{mv_C^2}{2} = \dfrac{(M+m)\dot{x}^2}{2} - m\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\varphi + \dfrac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$ — кинетическая энергия системы; $v = |\bar{v}| = \dot{x}$ — скорость каретки; $\bar{v}_C = \bar{v}_r + \bar{v}_e$ — скорость точки C, $v_r = OC\dot{\varphi} = l\dot{\varphi}$, $\bar{v}_e = \bar{v}$, $v_C^2 = (\bar{v}_e + \bar{v}_r)^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + {}$ $+\, 2\dot{x}\,l\dot{\varphi}\cos(\pi - \varphi) = \dot{x}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}\,l\dot{\varphi}\cos\varphi.$

Обобщенная сила

$$Q_x = \frac{\left[-c(x_0 + x) - c(x - x_0)\right]\delta x}{\delta x} = -2cx,$$

где x_0 — начальная деформация пружин; c — жесткость пружин.

С учетом выражений для T и Q_x уравнение Лагранжа 2-го рода принимает вид дифференциального уравнения для вынужденных движений

$$(M+m)\ddot{x} + 2cx = ml\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).$$

В правой части уравнения находится нелинейная обобщенная возмущающая сила. При малых значениях φ правая часть уравнения приближенно равна $\approx ml\left(\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2\varphi\right)$ (слагаемое $\dot{\varphi}^2\varphi$ — величина третьего порядка малости).

Угол φ задан принудительно: $\varphi=\varphi_0\sin\left(\omega t+\delta\right)$, где φ_0, ω — амплитуда и частота кинематического параметра возмущения φ. Определим первую и вторую производные по времени параметра φ:

$$\dot{\varphi}=\varphi_0\omega\cos\left(\omega t+\delta\right),\quad \ddot{\varphi}=-\varphi_0\omega^2\sin\left(\omega t+\delta\right).$$

В силу сделанного ранее предположения о том, что φ — малая величина, линейное дифференциальное уравнение движения системы можно записать как

$$\left(M+m\right)\ddot{x}+2cx=ml\ddot{\varphi}=-ml\varphi_0\omega^2\sin\left(\omega t+\delta\right)$$

или

$$\ddot{x}+K^2x=-h\sin\left(\omega t+\delta\right), \tag{2}$$

где

$$K=\sqrt{\frac{2c}{M+m}},\quad h=\frac{ml\varphi_0\omega^2}{M+m}.$$

Здесь K — частота свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления (по координате x).

Интерес представляют вынужденные колебания каретки (системы). Найдем решение уравнения (2) в виде $x_\text{в}=a_\text{в}\sin\left(\omega t+\delta\right)$, где амплитуда вынужденных колебаний определяется соотношением $-a_\text{в}\omega^2+a_\text{в}K^2=-h$ и, следовательно,

$$x_\text{в}=\frac{h}{\omega^2-K^2}\sin\left(\omega t+\delta\right)$$

и

$$a_\text{в}=\frac{ml\varphi_0\omega^2}{\left(M+m\right)\left(\omega^2-K^2\right)}=\frac{ml\varphi_0Z^2}{\left(M+m\right)\left(Z^2-1\right)}$$

($Z=\omega/K$ — коэффициент расстройки, ω — круговая частота вынужденных колебаний, равная частоте возмущения).

Если не учитывать сопротивление, то разность фаз ε вынужденных колебаний и возмущения составит 0, π/2, π в зависимости от соотношения ω и K.

При проведении экспериментов устанавливают (задают) частоту возмущающего воздействия ω и определяют величины φ_0, $a_\text{в}=\left|x_m\right|$ и K.

Введем коэффициент динамичности:

$$\lambda = \frac{a_{\text{в}}}{l\varphi_0} = \frac{m}{M+m}\,\frac{Z^2}{\left|Z^2-1\right|}. \tag{3}$$

Теоретическую кривую $\lambda = \lambda(Z)$ постоим по формуле (3). Экспериментальные точки, определяемые координатами x_{m_i} и ω_i, нанесем на график. Для этого найдем значения $Z_i = \omega_i / K$ и $\lambda_i = \left|x_{m_i}\right| / (l\varphi_0)$.

Возможен более точный учет распределения масс маятника, совершающего плоское движение. Например, если учитывать массу m_1 стержня маятника, считая его однородным стержнем длиной l_1, выражение для кинетической энергии можно записать в виде

$$T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv_C{}^2}{2} + \frac{J_{C_1z}\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_1 v_{C_1}^2}{2},$$

где

$$\overline{v}_{C_1} = \overline{v}_{e_1} + \overline{v}_{r_1},\ \overline{v}_{e_1} = \overline{v},\ v_{r_1\tau} = \frac{l_1}{2}\dot{\varphi},$$

$$v_{C_1}^2 = \left(\overline{v}_{e_1} + \overline{v}_{r_1}\right)^2 = \dot{x}^2 + \frac{l_1^2}{4}\dot{\varphi}^2 - 2\dot{x}\frac{l_1}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi .$$

Окончательно получим

$$T = \frac{\left(M+m+m_1\right)\dot{x}^2}{2} - \left(m + \frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right)\dot{x}l\dot{\varphi}\cos\phi + \left(ml^2 + J_{C_1z} + m_1\frac{l_1^2}{4}\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Если при этом учитывать сопротивление при колебаниях каретки с маятником, то обобщенную силу можно представить в виде:

$$Q_x = -2cx - \mu\dot{x},$$

где μ — коэффициент вязкого трения.

Тогда уравнение движения системы принимает вид

$$\left(M+m+m_1\right)\ddot{x} + \mu\,\dot{x} + 2cx = \left(m + \frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right)l\ddot{\varphi} =$$

$$= -\left(m + \frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right)l\varphi_0\omega^2\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + K^2x = -h\sin\left(\omega t + \delta\right). \tag{4}$$

Здесь

$$K=\sqrt{\frac{2c}{M+m+m_1}},\quad 2n=\frac{\mu}{M+m+m_1},\quad h=\frac{\left(m+\frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right)l\varphi_0\omega^2}{M+m+m_1}.$$

Таким образом, с учетом массы стержня получим

$$a_{\text{в}}=\frac{\left(m+\frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}\right)l\varphi_0\omega^2}{\left(M+m+m_1\right)\sqrt{\left(K^2-\omega^2\right)^2+4n^2\omega^2}},$$

$$\lambda=\frac{a_{\text{в}}}{l\varphi_0}=\frac{m+\frac{m_1}{2}\frac{l_1}{l}}{M+m+m_1}\,\frac{Z^2}{\sqrt{\left(1-Z^2\right)^2+Z^2/Q^2}}. \tag{5}$$

Для разности фаз ε имеем

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{Z}{Q\left(1-Z^2\right)},$$

откуда

$$\varepsilon=\operatorname{arctg}\left[\frac{Z}{Q\left(1-Z^2\right)}\right]. \tag{6}$$

Методика проведения экспериментов. Методику проведения в данном лабораторном комплексе экспериментов по изучению вынужденных колебаний механической системы с инерционным возмущением рассмотрим на конкретном примере. Пусть масса груза маятника m = 1,056 кг, масса тележки M = 5,557 кг (без дополнительных грузов 14 (см. рис. 2, *а*)). Приведенные ниже результаты испытаний получены без дополнительных грузов и при длине маятника l = 0,196 м. По результатам экспериментального замера жесткости пружин среднее значение их коэффициента жесткости равно $c_{\text{ср}}$ = 217,8 Н/м. Частота свободных колебаний тележки с маятником, полученная расчетным путем при этом значении $c_{\text{ср}}$, $K \approx 8{,}068$ рад/с. Значения K, обусловленные разбросом измеренных величин жесткости c, лежат в диапазоне $K \approx 7{,}88 \ldots 8{,}20$ рад/с.

Непосредственно определить обобщенный коэффициент сопротивления системы n (или μ) весьма трудно, поэтому найдем n с помощью эксперимента. Чтобы оценить параметры K и n зарегистрируем собственные затухающие колебания системы каретка — маятник. Для этого отклоним систему (каретку с маятником) в крайнее допустимое конструктивно положение и отпустим ее без начальной скорости. Определим круговую частоту затухающих колебаний

$K_1 = 2\pi / T_1$, круговую частоту свободных (собственных) колебаний системы без учета сопротивления $K = \sqrt{K_1^2 + n^2}$ (T_1 — условный период затухающих колебаний системы). Декремент колебаний системы и ее логарифмический декремент колебаний

$$D = q_i / q_{i+1} = e^{nT_1}$$

и

$$\ln D = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}} = nT_1,$$

откуда

$$n = \frac{1}{T_1} \ln \frac{q_i}{q_{i+1}}.$$

В качестве примера на рис. 3 приведен фрагмент записи на экране виртуального прибора свободных колебаний данной системы при выключенном электродвигателе.

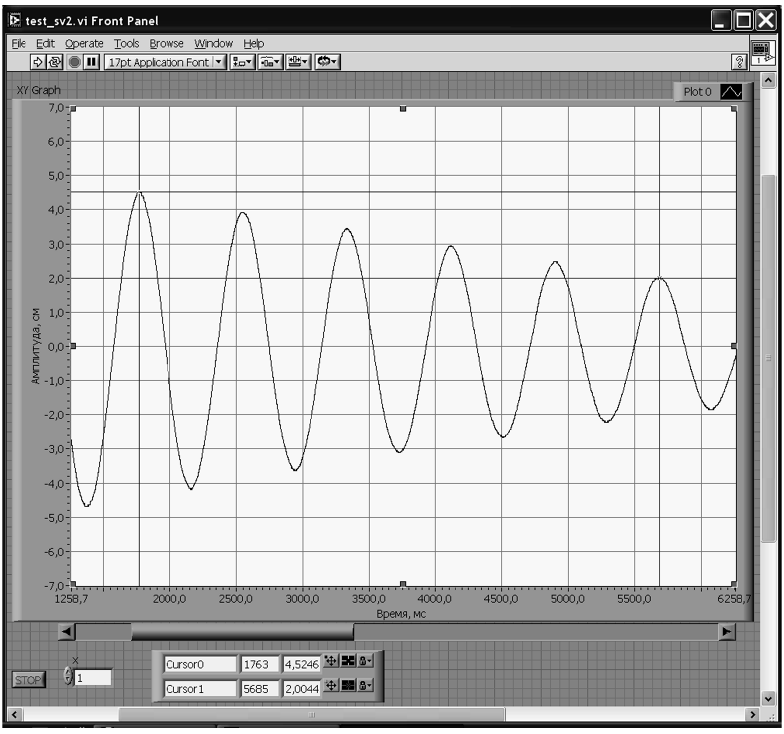

Рис. 3. Фрагмент записи свободных колебаний системы

Рассчитаем значения K и n, а также добротность системы $Q = K / 2n$. Найдем по отметкам курсора условные период и частоту затухающих колебаний каретки с маятником

$$T_1 = \frac{5685 - 1763}{5 \cdot 10^3} = 0,7844 \text{ с}, \quad K_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad K_1 = 8,01 \text{ рад/с}.$$

Определим коэффициент сопротивления и частоту собственных колебаний

$$n = \frac{1}{5T_1} \ln \frac{q_i}{q_{i+5}} = \frac{1}{5 \cdot 0,7844} \ln \frac{4,5246}{2,0044} = 0,2076 \text{ рад/с},$$

$$K = \sqrt{K_1^2 + n^2} = 8,013 \text{ рад/с}.$$

Здесь частота колебаний немного меньше ее значения (8,068 рад/с), полученного выше расчетным путем без учета массы стержня маятника по формуле $K = \sqrt{\dfrac{2c}{M+m}}$.

Затем включим электродвигатель и постепенно будем увеличивать частоту возмущения маятника ω (частоту вынужденных колебаний тележки). С помощью датчиков линейных (x) и угловых (φ) отклонений и специальных программ для ЭВМ зарегистрируем частоту вынужденных колебаний и соответствующее ей значение максимального отклонения каретки от положения равновесия (ω_i, x_{m_i}) и получим записи вынужденных колебаний каретки при различных значениях частоты колебаний маятника, например при $\omega < K$ (см. рис. 4).

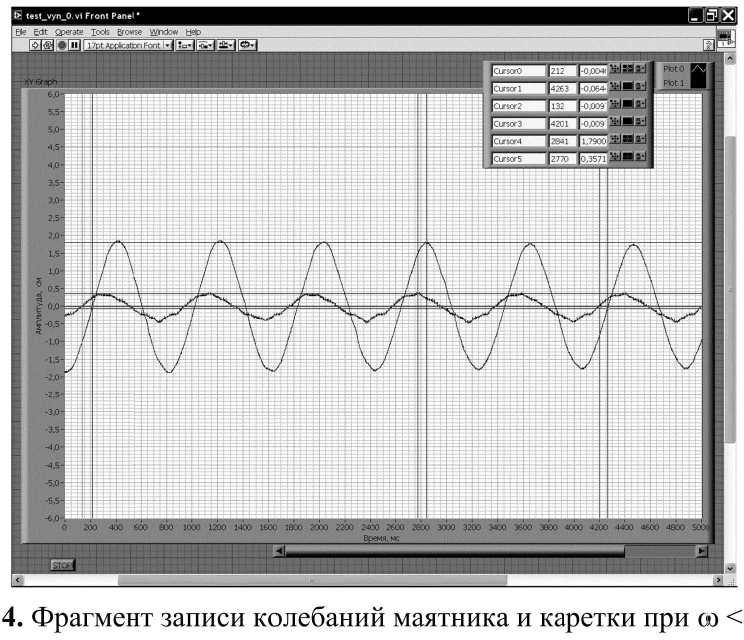

Рис. 4. Фрагмент записи колебаний маятника и каретки при $\omega < K$

На рис. 4 приведены зависимости от времени возмущений (колебание маятника) и вынужденных колебаний каретки при частоте $\omega = 7,7208$ рад/с $< K$, и коэффициенте динамичности $\lambda = \dfrac{a_{\text{в}}}{l\varphi_0} = \dfrac{1,7900}{0,3571} = 5,013$. Найдем разность фаз $\varepsilon = \psi_{\text{в}} - \psi = \omega(t_1 - t_2) = \omega\Delta t$, где ψ — фаза вынужденных колебаний; Δt — запаздывание по времени вынужденных колебаний каретки (отклик) по отношению к колебаниям маятника (сигнал возмущения):

$$\varepsilon = \omega\Delta t = 7,7208\frac{2841 - 2770}{10^3} = 0,5482 \text{ рад}$$

или

$$\varepsilon \approx 31,41°.$$

При этом коэффициент расстройки $Z = \dfrac{\omega}{K} = 0,9619$.

На рис. 5 представлены теоретические АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний каретки, рассчитанные по формулам (5), (6), а экспериментальные значения приведены в виде совокупности точек, образующих размытые линии.

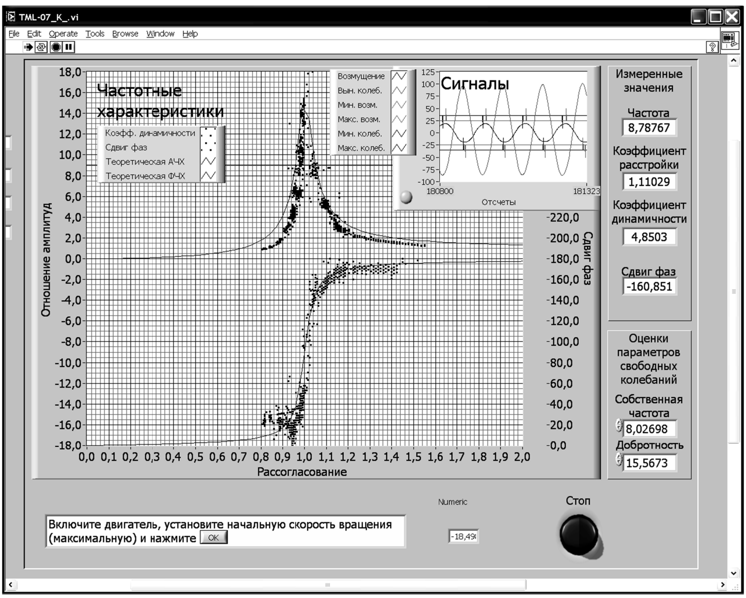

Рис. 5. АЧХ и ФЧХ на экране виртуального прибора

В частности, экспериментальным точкам на рис. 5 удовлетворительно соответствуют приведенные выше на рис. 4 результаты обработки записи вынужденных колебаний. Однако теоретическая АЧХ лежит немного выше экспериментальной. Значения разности фаз во всем диапазоне частот практически совпадают с теоретическими, в то время как экспериментальные точки для амплитуды в области резонанса имеют больший разброс относительно теоретических значений, что отражает влияние нелинейных свойств системы на ее АЧХ. Тем не менее, частота резонанса по АЧХ и ФЧХ хорошо совпадает с теоретическим значением. Таким образом, результаты экспериментов подтверждают допустимость применения линейной модели для анализа работы лабораторной установки.

Исследования могут быть дополнены другими научными вопросами (например, исследование АЧХ и ФЧХ при другом уровне сопротивления в системе, влияние нелинейностей и др.).

Моделирование колебаний реальных объектов (установок). Обобщим типовые схемы таких реальных механических объектов, в которых имеется инерционное возмущение (рис. 6).

Применяя уравнение Лагранжа 2-го рода (1), для приведенных на рис. 6, *а*−*е* схем механических систем (диски — однородные, качение — без скольжения) имеем соответственно следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\ddot{x} + K^2 x = h\sin(\omega t + \delta),\ h = s_0\omega^2,\ K^2 = \frac{c}{m};$$

$$\ddot{x} + K^2 x = h\sin(\omega t + \delta),\ K^2 = \frac{c}{m + m_1/2},\ h = \frac{m}{m + m_1/2}s_0\omega^2;$$

$$\ddot{s} + K^2 s = h\sin(\omega t + \delta),\ K^2 = \frac{c}{m + m_1 + M},\ h = \frac{m}{m + m_1 + M}x_0\omega^2; \quad (7)$$

$$\ddot{x} + K^2 x = h\sin(\omega t + \delta),\ K^2 = \frac{2c}{3m},\ h = \frac{2}{3}s_0\omega^2;$$

$$\ddot{s} + K^2 s = h\sin(\omega t + \delta),\ K^2 = \frac{c}{m + M},\ h = \frac{m}{m + M}x_0\omega^2;$$

$$\ddot{s} + K^2 s = h\cos(\omega t + \delta),\ K^2 = \frac{c}{M + m},\ h = \frac{m}{M + m}l\omega^2.$$

При движении можно учитывать сопротивление как $\mu\dot{s}$ или $\mu\dot{x}$, тогда, например в последнем варианте системы дифференциальное уравнение (7) принимает вид:

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + K^2 s = h\cos(\omega t + \delta),\ 2n = \frac{\mu}{M + m}.$$

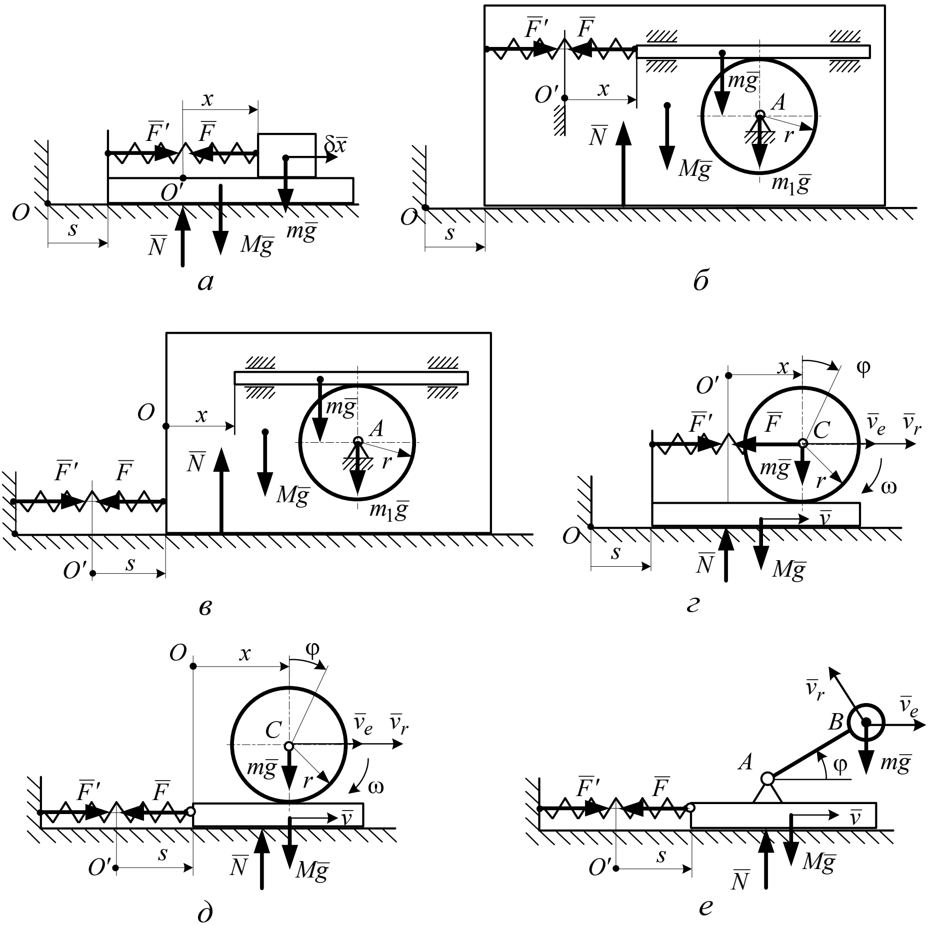

Рис. 6. Типовые схемы реальных механических объектов с поступательными движениями тел при $s = s_0 \sin(\omega t + \delta)$ (*а*); колеблющейся установки при $s = s_0 \sin(\omega t + \delta)$ (*б*); механической системы с подпружиненным корпусом при $x = x_0 \sin(\omega t + \delta)$ (*в*); системы с плоским движением тела при $s = s_0 \sin(\omega t + \delta)$ (*г*); второго варианта системы с плоским движением тела при $x = x_0 \sin(\omega t + \delta)$ (*д*); системы с вращающейся деталью при $\varphi = \omega t$, $\omega = \mathrm{const}$ (*е*)

В силу того, что дифференциальные уравнения во всех рассмотренных случаях аналогичны уравнениям (2), (4), созданная установка, позволяет получать АЧХ и ФЧХ для реальных установок (натурных объектов) при одинаковых значениях добротности модели и натурного объекта $Q_{\text{м}} = Q_{\text{н}}$.

Рассмотрим вариант (см. рис. 6, *а*), в котором задано движение платформы в соответствии с законом $s = s_0 \sin(\omega t + \delta)$. В этом случае коэффициент λ определяется формулой

$$\lambda = \frac{Z^2}{\sqrt{\left(1 - Z^2\right)^2 + Z^2/Q^2}},$$

в которой все величины безразмерные и поэтому уже являются инвариантами при моделировании.

При $Z = \dfrac{\omega}{K} = \mathrm{inv} = I_1$, $Q = \dfrac{K}{2n} = \mathrm{inv} = I_2$, коэффициент динамичности

$$\lambda = \mathrm{inv} = I.$$

Это означает, что при выполнении условий для инвариантов I_1, I_2 (коэффициентов подобия) можно получить одинаковые значения λ для любых экспериментов.

Использование лабораторной установки в качестве модельной позволяет развить теорию моделирования и предсказать вид зависимости $\lambda\left(Z,Q\right)$ для натурного объекта.

Выполняя условия инвариантности, получаем следующие выражения:

$$I_1 = \left(\frac{\omega}{K}\right)_{\text{н}} = \left(\frac{\omega}{K}\right)_{\text{м}} \text{ и } I_2 = \left(\frac{K}{n}\right)_{\text{н}} = \left(\frac{K}{n}\right)_{\text{м}} \tag{8}$$

Из выражения для I_1 получим $\omega_{\text{н}}/\omega_{\text{м}} = K_{\text{н}}/K_{\text{м}}$. Отсюда следует, что можно ввести масштабный коэффициент для отношения собственных частот натурного объекта и модели m_K. Значение m_K может быть больше или меньше единицы, что зависит от параметров натурного объекта. Следовательно, необходимо выполнить условие $\omega_{\text{н}}/\omega_{\text{м}} = m_K$.

Кроме того, из выражения для I_2 получаем

$$\frac{n_{\text{н}}}{n_{\text{м}}} = \frac{K_{\text{н}}}{K_{\text{м}}} = m_K.$$

Если условия (8) выполнены, безразмерные параметры Z и Q равны для натурного объекта и модели: $Z_{\text{н}} = Z_{\text{м}}$, $Q_{\text{н}} = Q_{\text{м}}$, то $\lambda = I$, т. е. $\lambda_{\text{н}} = \lambda_{\text{м}}$ и кривые $\lambda(Z, Q)$ для них совпадают.

Таким образом, изложенная в работе методика позволяет проводить физическое моделирование и строить АЧХ и ФЧХ для модели и в то же время для натурных объектов. При этом собственные частоты K и коэффициенты сопротивления n для модели и натурного объекта отличаются в m_K раз.

В случае вынужденных колебаний инерционного типа массовый коэффициент в зависимостях $\lambda = \lambda(Z, Q)$ не всегда равен единице, поэтому для него также нужно ввести коэффициент подобия I_3, например, как в данной экспериментальной установке (см. (3))

$$I_3 = \left(\frac{m}{M+m} \right),$$

т. е.

$$\left(\frac{m}{M+m} \right)_{\text{н}} = \left(\frac{m}{M+m} \right)_{\text{м}}.$$

Следует отметить, что зависимости $\lambda = \lambda\left(Z, Q\right)$ уже при $Z \approx 2$ стремятся к предельному значению $\lim\limits_{Z\to\infty}\lambda = \dfrac{m}{M+m}$, равному I_3. Кроме того, при резонансе $\lambda_{Z=1} = \dfrac{m}{M+m}Q.$

Приведем пример моделирования колебаний натурного объекта при $m_k = 1, 2$.

На рис. 7 представлены АЧХ и ФЧХ лабораторной установки, полученные при обработке результатов экспериментов с помощью оригинального программного обеспечения (кривые *1* и *2*).

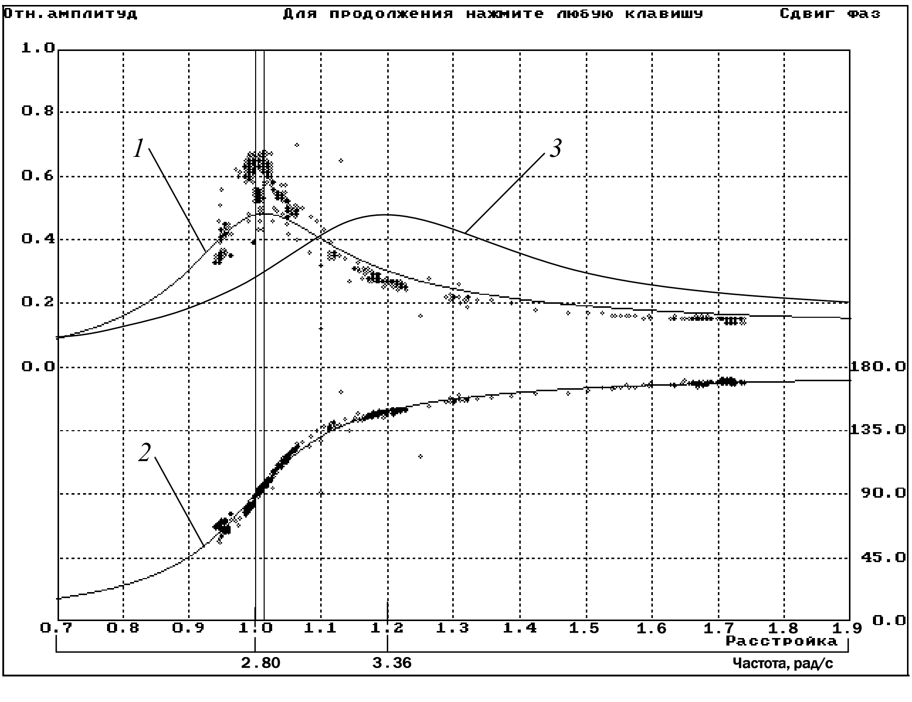

Рис. 7. Построение кривой моделирования

Безразмерные зависимости $\varepsilon = \varepsilon(Z, Q)$ и $\lambda = \lambda(Z, Q)$ модели и натурного объекта (см. (6)) в силу равенства $Q_{\text{м}} = Q_{\text{н}}$ при моделировании совпадают (кривые *1* и *2* на рис. 7), при этом $\omega_{\text{н}} = \omega_{\text{м}} m_K$.

На этом же рисунке построена зависимость $\lambda_{\text{н}} = \lambda_{\text{н}}(\omega)$ для натурного объекта (кривая *3*), причем в этом случае по оси абсцисс отложены значения ω в рад/с (нижняя ось абсцисс на рисунке). Кривая *3* смещена вправо по отношению к кривой *2* и при резонансе $\lambda_{\text{н}} = \lambda_{\text{м}}$, но $p_{\text{м}} = K_{\text{м}} \approx 2{,}8$ рад/с, а $\omega_{\text{н}} = \omega_{\text{м}} m_K = 2{,}8 \cdot 1{,}2 = 3{,}36$ рад/с.

Заключение. В настоящей работе показано, что в различных промышленных устройствах процессы колебаний при их инерционном возбуждении описываются дифференциальными уравнениями, аналогичными дифференциальным уравнениям движения разработанной экспериментальной установки (модели), что позволяет применять ее для математического и физического моделирования процессов колебаний реальных промышленных объектов. Приведены параметры подобия, позволяющие осуществлять такое моделирование и получать АЧХ и ФЧХ различных промышленных устройств, используя рассмотренную лабораторную установку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубинин В.В., Жигулевцев Ю.Н., Назаренко Б.П., Ремизов А.В. О внедрении новых информационных технологий в учебный процесс по курсу «Теоретическая механика». *Тр. Научно-методической конференции, посвященной 35-летию образования факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана*. Москва, 20 декабря 1999 г. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999, с. 65–66.

[2] Дубинин В.В. Физический эксперимент в некоторых задачах механики. *Тр. зонального совещания-семинара заведующих кафедрами теоретической механики Центрального и Приволжского федеральных округов РФ*. Издательство Ульяновского гос. ун-та. Ульяновск, 2002, с 14–15.

[3] Дубинин В.В., Жигулевцев Ю.Н., Назаренко Б.П. Автоматизированный лабораторный комплекс «Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы». *Сб. научных статей, посвященный 125-летию кафедры теоретической механики*. ИМТУ — МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2003, с. 48–56.

[4] Дубинин В.В., Витушкин В.В., Назаренко Б.П. Современный лабораторный комплекс по теоретической механике. Интеграция образования, науки и производства. *Материалы секционного заседания Междунар. конф. IX Междунар. форума «Высокие технологии XXI века»*. Москва, 23 апреля 2008 г. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, с. 153–156.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубинин В.В., Витушкин В.В. Моделирование колебаний с инерционным возмущением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1146.html

Дубинин Владимир Валентинович родился в 1937 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1961, канд. техн. наук, доцент кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского. Автор около 250 работ в области динамики и теории удара. e-mail: fn3@bmstu.ru

Витушкин Вячеслав Валентинович родился в 1942 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1968 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области прикладной аэрогазодинамики и теоретической механики.
e-mail: vitushkin.fn-3.bmstu@yandex.ru