

## Корпускулярно-волновой дуализм дискретных динамических систем

© В.Ф. Смирнов, В.М. Зябликов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*В статье анализируются дискретные динамические системы с позиций корпускулярных и волновых свойств. Обоснована ограниченность корпускулярного подхода при оценке бегущих волн. Показано, что форма собственных колебаний — стоячая волна — позволяет получить действительную нагруженность динамической системы во всех точках только в момент максимального отклонения масс и в любой момент времени — в некоторых точках системы (в узловых точках формы колебаний). В остальные моменты времени нагрузку в системе можно найти с учетом синуса сдвига фаз между бегущей и стоячей волнами. Получено, что при использовании демпфера с коэффициентом сопротивления, равным импедансу системы, резонансные нагрузки в системе отсутствуют.*

**Ключевые слова:** корпускулярно-волновой дуализм, частота, фазовая скорость, импеданс, коэффициент демпфирования, дискретные динамические системы.

**Введение.** Корпускулярно-волновой дуализм — принцип, согласно которому любой объект может проявлять как волновые, так и корпускулярные свойства. По мнению академика В.А. Фока, для атомного объекта существует потенциальная возможность проявлять себя в зависимости от внешних условий либо как волна, либо как частица, либо промежуточным образом. Он полагает, что именно в этой потенциальной возможности различных проявлений свойств, присущих микрообъекту, и состоит дуализм волна — частица [1]. Однако волновыми свойствами также обладают различные по структуре макротела такие, как однородные и неоднородные, так непрерывные и дискретные распределенные механические системы. При этом в однородных непрерывных и однородных дискретных динамических системах могут существовать бегущие и стоячие волны, которые можно рассматривать как некоторый изолированный осциллятор, а также как их совместное проявление.

Исторически влияние колебаний на надежность работы системы начали учитывать с момента нахождения резонансных режимов, опасных для механизмов и машин, динамические расчетные схемы которых представляли собой дискретные неоднородные системы, т. е. эти системы рассматривали как совокупность корпускулярных частиц, обладающих массой и нагруженных силами от упругих связей. Например, чтобы предотвратить разрушение трансмиссии от резонансного режима, на стекле тахометра танка Т-34 было написано

«обороты 1300 не держать». Таким образом, первые работы, посвященные анализу динамических нагрузок в различных машинах и механизмах, были направлены в основном на определение их инерционно-жесткостных характеристик и установление способов нахождения собственных частот динамических расчетных схем этих механизмов. Эти работы относились к конкретным областям техники: судостроению [2], авиации [3], машиностроению [4]. На этапе анализа динамических нагрузок от колебаний при резонансном режиме полагали, что все массы движутся в одной фазе или в противофазе в соответствии с формой колебаний, т. е. эквивалентная расчетная динамическая система механизма играет роль одночастотного осциллятора и может служить некоторым образованием, обладающим корпускулярными свойствами. Отметим, что распространение энергии в системе происходит только от пучности к узлу формы колебаний и обратно в течение каждого периода.

Волновые явления в механических системах в основном рассматривали в таких непрерывных однородных средах, как валы достаточной протяженности, нити, струны, пружины, а также некоторые плоские элементы (диски, мембраны), а в ультразвуковой технике — различные объемные элементы (цилиндрические и колоколообразные). В зависимости от конструктивных особенностей объекта для анализа движения системы использовали либо метод Даламбера (метод бегущих волн), либо метод Фурье (метод стоячих волн). Первый метод применяют главным образом либо для открытых систем, т. е. систем, не имеющих внешних границ, либо для систем, в которых энергия волн поглощается ею, не отражаясь от границ. Второй метод используют при рассмотрении замкнутых систем, т. е. систем, заключенных в определенные границы, причем энергия системы локализована в этих границах. Свободные и вынужденные колебания замкнутых систем можно представить суперпозицией стоячих волн, характер которых определяется граничными условиями.

Колебания, как в открытых, так и замкнутых системах, связаны с процессом распространения энергии. Различают два вида переноса энергии из одной точки пространства в другую: конвективный и волновой. При конвективном способе распространения энергия переносится вместе с движущейся материальной точкой. Получив в каком-либо месте пространства импульс, материальная точка совершает движение и отдает свою энергию в другом месте, взаимодействуя с другими материальными телами или точками. Кинематика этого процесса переноса энергии определяется аксиомой инерции, формулируемой следующим образом: материальная точка сохраняет энергию, и состояние равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на пути следования она не испытает некоторого взаимодействия.

**Волновое движение.** При волновом способе перенос энергии и импульса из одной точки пространства в другую осуществляется бегущей волной, в которой материальные точки, определяющие эту волну, совершают движения только около своего равновесного положения. Уместно предположить, что как при конвективном распространении энергии, так и волновом, этот процесс можно описать аксиоматическим понятием: волновой процесс распространяется неизменно по среде и переносит энергию пока параметры среды остаются постоянными. О необходимости аксиоматического подхода к рассмотрению движения жидкости указывает Е. Скучек [5]. Признавая, что второй закон Ньютона не может быть непосредственно применен к бесконечно малому элементарному объему деформируемой движущейся среды (жидкости), Скучек предлагает рассматривать движение этого объема так, как если бы он был заморожен; в этом случае к нему можно применить закон Ньютона. Скучек утверждает, что такое предположение представляет собой обобщение этого закона, эквивалентное новой аксиоме механики. Однако более разумно, используя аксиоматическое понятие волны, с помощью элементарных выкладок получить дифференциальные уравнения движения «замороженного» элементарного объема деформируемой среды [6].

Следовательно, возникает вопрос о взаимосвязи между коллективным движением материальных точек и движением каждой отдельной частицы в волне. Лауреат нобелевской премии М. Борн полагает, что волна представляет собой состояние движения частиц, а не движение частиц самих по себе [7]. Академик Л.И. Седов, рассматривая распространение синусоидальных волн, пишет [8]: «если параметры волны постоянные, то волна распространяется вдоль направления движения как твердое тело». С.Э. Хайкин отождествляет бегущую волну с движением точек струны, находящейся в абсолютно твердой трубке, изогнутой в виде синусоиды и движущейся с постоянной скоростью вдоль струны [9]. При этом движение тех точек струны, которые находятся внутри трубки, будет точно таким, как и при распространении бегущей волны по струне. В книге [10] Л.Д. Ландау проводит аналогию между волновым процессом и механикой материальных частиц: волновой вектор волны в распространении волн играет роль импульса частицы в механике, а частота — энергии частицы.

Особенности поведения отдельной точки и коллективного движения точек в волне можно показать на известном примере, иллюстрирующем движение двух бегущих в противоположные стороны волн. На рис. 1, *a* показано несколько фаз распространения начального отклонения струны, заданного в виде равнобедренного треугольника. Такую форму можно получить, если оттянуть струну в середине отрезка длиной  $l$  на высоту  $h$ , придерживая ее на концах отрезка.

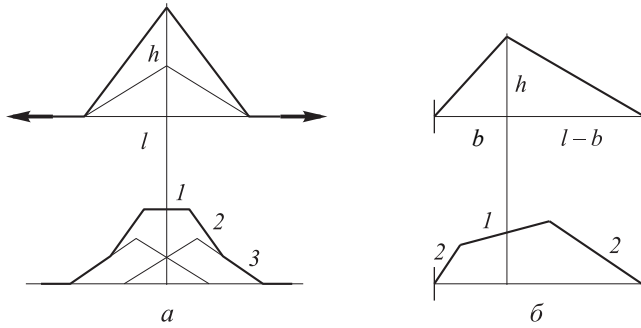


Рис. 1. Формы струны в различные моменты времени

При отпуске струны в верхней точке образуются две бегущие волны с максимальным отклонением  $h/2$ , распространяющиеся в противоположных направлениях с фазовой скоростью  $v_\phi$ . Образующаяся при этом стоячая волна имеет три характерных участка. Горизонтальный участок 1 движется вертикально вниз с постоянной скоростью  $\frac{h}{l/2}v_\phi$ . Наклонный участок 2, параллельный первоначальному

положению струны, от начала движения до определенного момента времени остается неподвижным. Наклонный участок 3, соответствующий форме бегущей волны, движется горизонтально с постоянной скоростью  $v_\phi$ . Таким образом, движение точек струны определяется не ее деформацией, а состоянием движения волны, которое обуславливает для точек участка 2, контактирующих с точками участков 1 и 3, мгновенное начало движения с постоянной скоростью из неподвижного положения.

На рис. 1, б для струны с закрепленными концами показано два положения: струна длиной  $l$  первоначально оттянута в сторону на расстояние  $h$  в точке, делящей струну на отрезки  $b$  и  $l-b$ , так, что образуются два прямолинейных отрезка; струна в момент времени  $t$  занимает произвольное положение. В последнем случае стоячая волна, представляющая собой сумму двух бегущих со скоростью  $v_\phi$  волн, состоит из нескольких участков. Два крайних участка 2 параллельны двум участкам струны в их начальном положении и находятся в покое. Средний участок 1 движется в поперечном направлении с постоянной скоростью  $\pm \frac{h}{2b(l-b)}v_\phi$  и всегда увеличивается или уменьшается

на конце каждого отрезка со скоростью  $v_\phi$ . И здесь точки стыковки участков 1 и 2 струны, закрепленной с двух концов, мгновенно из состояния покоя начинают двигаться с постоянной скоростью. Этот случай подробно рассмотрен в работе [11]. Следовательно, рассматривая приоритеты обоснования движения материальных точек

струны, необходимо отметить, что движение точек, т. е. движение волны, является определяющим по отношению к динамике самой материальной точки струны. При движении одиночной волны в каждый момент времени к ней присоединяется ранее неподвижная материальная точка, получая некоторую скорость, в то же время последняя точка, обладающая определенной скоростью, мгновенно становится неподвижной, тем самым сохраняя состояние движения волны.

Подобное явление можно наблюдать при взаимодействии с неподвижным шаром ансамбля нескольких движущихся шаров одной и той же массы, подвешенных на нитях. При соударении ансамбль движущихся шаров остается неизменным, сообщая скорость неподвижному шару и оставляя неподвижным последний шар. Состояние движения шаров ансамбля остается неизменным при любом их числе. Число движущихся и неподвижных шаров после соударения остается неизменным.

Другая особенность корпускулярно-волнового дуализма распределенных динамических систем заключается в аксиоматическом принципе — принципе суперпозиции распространяющихся волн. С одной стороны, две волны, пересекаясь, пронизывают одна другую без каких-либо помех. В области, где они существуют совместно, появляется сложное движение, но как только одна волна переходит через другую, она продолжает двигаться так, как если бы с ней ничего не произошло. Таким образом, в каждый момент времени состояние динамической системы, ее характеристики должны зависеть от параметров каждой волны. С другой стороны, если рассматривать одну колеблющуюся частицу, можно предположить, что она испытывает независимые импульсы со стороны обеих волн. Следовательно, смещение частицы в любой точке представляет собой сумму двух смещений, которые может вызвать каждая из этих волн в отдельности. Из этого вытекает очень важное положение: по отклонению частицы от действия на нее двух волн невозможно идентифицировать параметры каждой волны, т. е. равные у них амплитуды или различные, и соотношение частот и фаз колебаний. Если в динамической системе существуют бегущие и стоячие волны, то в случае бегущей волны разные сечения системы имеют одинаковые амплитуды, но в различных фазах. В случае стоячей волны разные сечения колеблются в одинаковой фазе, но с различными амплитудами.

С учетом наличия одновременно корпускулярных и волновых свойств в распределенных динамических системах используют различные методы расчета характеристик поведения и состояния данных систем. Согласно корпускулярному подходу к анализу динамических систем, для простой цепной линейной системы дифференциальные уравнения вынужденных колебаний, полученные из уравне-

ний Лагранжа при мгновенном распространении возмущений, имеют вид

$$J_m \ddot{\varphi}_m - c_{m-1}(\varphi_{m-1} - \varphi_m) + c_m(\varphi_m - \varphi_{m+1}) + \mu_m \dot{\varphi}_m + \nu_m(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_{m+1}) = L_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь моменты инерции  $J_m$  и крутильные жесткости  $c_m$  участков являются параметрами приведенных систем. Все виды сопротивлений заменены эквивалентным вязким трением с коэффициентами  $\mu_m$  и  $\nu_m$ , действующим на массы (внешнее трение) и на участки системы (внутреннее трение) соответственно.

Анализируя эту систему с корпускулярных позиций, при расчете амплитуд резонансных вынужденных колебаний в основном применяют два подхода. Опираясь на физическую природу явления, в первом подходе используют энергетический метод, основанный на следующих предположениях:

а) при резонансных вынужденных колебаниях энергия, сообщенная системе возмущающими моментами, равна энергии, рассеянной демпфирующими сопротивлениями;

б) форма резонансных вынужденных колебаний совпадает с формой свободных колебаний, отвечающей резонирующей частоте (постулат Видлера).

Согласно первому предположению, при резонансном режиме частота возбуждения совпадает с одной из собственных частот. При этом расчетная схема простая, и расчет сводится к составлению уравнения энергетического баланса с неизвестной амплитудой одной из масс. Остальные амплитуды в соответствии со вторым предположением определяют по собственной форме колебаний. Из многочисленных расчетов и экспериментальных исследований следует, что хорошее совпадение форм свободных и вынужденных колебаний происходит при малом демпфировании в системе. Как показано в работе [2], формы колебаний можно принимать совпадающими при удельном демпфировании

для упругого участка крутильной системы  $\mu = \frac{W_{\text{тр}} e}{\pi A^2}$ , где  $W_{\text{тр}}$  — работа сил трения (демпфирующих сил) за цикл;  $e$  — податливость участка;  $A$  — амплитуда угла закручивания участка.

Второй подход заключается в непосредственном интегрировании системы дифференциальных уравнений (1). При этом качественный анализ показывает, что в зависимости от соотношения коэффициентов сопротивления, инерционных и жесткостных параметров системы результаты решения существенно различаются. Если коэффициенты внешнего вязкого трения пропорциональны массам и коэффи-

циенты внутреннего трения пропорциональны жесткостям упругих связей одновременно или порознь, движение системы можно разложить по формам собственных колебаний консервативной системы, причем каждая из главных координат будет определяться независимым уравнением [12]. Если этой зависимости коэффициентов нет, большие силы трения (например, в демпферах) при режимах, близких к резонансным, могут заметно исказить формы колебаний системы. Таким образом, согласно второму подходу к анализу распределенных динамических систем, данные, рассчитанные непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений или с использованием метода комплексных амплитуд при демпфировании, характерном для многих реальных систем, существенно отличаются от результатов, полученных энергетическим методом. В основном это различие состоит в том, что форма колебаний получается пространственной и силовые значения в упругих участках значительно отличаются от результатов, рассчитанных приближенным методом.

Соотношение корпускулярных и волновых свойств динамических систем первым начал рассматривать И. Бернулли. Чтобы изучить движение звучащей струны, он условно разместил на горизонтальной невесомой нити, натянутой с помощью гирьки, на равных расстояниях  $n$  равных грузиков и нашел периоды главных колебаний для случаев, когда число грузиков меньше 8. Этот способ позволил получить уравнения в конечных разностях для  $y_k$ -расстояния от  $k$ -го грузика до равновесного положения нити.

Волновыми характеристиками, определяющими движение дискретной системы (рис. 2), состоящей из одинаковых инерционных масс  $J$ , соединенных упругими участками с одной и той же жесткостью  $c$ , служат волновое уравнение, фазовая скорость, импеданс, бегущие и стоячие волны. Принимая в выражении (1) коэффициенты сопротивлений и возмущающее воздействие равными нулю, получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$J\ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

$$J\ddot{\varphi}_2 - c(\varphi_1 - \varphi_2) + c(\varphi_2 - \varphi_3) = 0,$$

.....

$$J\ddot{\varphi}_n - c(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0,$$

которые определяют корпускулярно-волновой дуализм дискретных динамических систем. С одной стороны, они характеризуют движение каждой массы в соответствии, например, с принципом Даламбера, а с другой при числе инерционных масс, приближающихся к бесконечности, эти уравнения служат аналогом волнового уравнения.

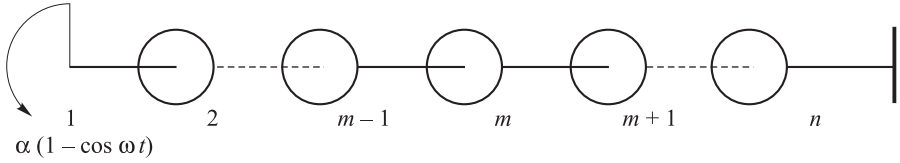


Рис. 2. Однородная дискретная динамическая система

Дифференциальное уравнение движения  $m$ -го участка вал — диск может служить разностным аналогом уравнения в частных производных, т. е. волнового уравнения

$$\ddot{\varphi}_m = \frac{c}{J}(\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1}). \quad (2)$$

Решение уравнения (2) отыскивается в виде бегущих волн, распространяющихся от источника возмущения,

$$\varphi(m, t) = A \exp[i(\omega t - K_m)], \quad (3)$$

где  $A$  — комплексная амплитуда волны;  $\omega$  — ее частота;  $K_m$  — фазовая постоянная, зависящая от номера диска или участка (инерционная масса — жесткость)  $m$ .

В отличие от сплошной однородной среды фаза волны в этом случае меняется не непрерывно, а скачком на величину  $K_m$  при переходе от  $(m - 1)$ -го к  $m$ -му диску (постоянная  $K_m$  является аналогом волнового числа  $K = 2\pi / \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны, выраженная числом участков вал — диск системы).

Подставляя решение (3) в выражение (2), получаем дисперсионное соотношение, свойственное однородным непрерывным системам и связывающее частоту колебаний и волновое число  $K$  (а следовательно, и длину волны),

$$\omega^2 = 2\frac{c}{J}(1 - \cos K) \text{ или } \omega = 2\sqrt{c/J} [\sin(K/2)]. \quad (4)$$

Для возмущений, у которых  $\sin K/2 \sim K/2$ , из выражения (4) следует линейный закон дисперсии  $\omega = \sqrt{c/JK}$ , при котором гармонические волны с разными частотами распространяются по системе с одинаковой фазовой скоростью  $v_\phi = \sqrt{c/J}$ . В этом случае дискретная динамическая система близка по своим свойствам к однородной системе, колебания которой описываются волновым уравнением.

Проанализируем поведение динамической системы, приведенной на рис. 2, с учетом ее корпускулярных и волновых свойств. При кинематическом возбуждении колебаний движение системы осуществляется в соответствии с законом  $\varphi_1 = a(1 - \cos \omega t)$  первой безмассовой точки при  $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$  и  $\varphi_1 = 0$  при  $t \geq 2\pi/\omega$ .



В работе [12] при кинематическом возбуждении движение системы предложено раскладывать на движение безмассовой системы  $\varphi(1)$  и вынужденное колебание системы с дополнительным закреплением в точке  $I$ , вызванное силами инерции  $(-J\ddot{\varphi}_1)$  первого движения. Тогда при движении этой системы как безмассовой  $\varphi_m^{(1)} = b_m \varphi_1$ , где  $b_m = \frac{n-(m-1)}{n}$ . Далее рассмотрим движение системы с закрепленной точкой  $I$  под действием сил инерции:  $L_m = -J\ddot{\varphi}_m^{(1)}$  (или  $L_m = -b_m J \omega^2 a \cos \omega t$  при  $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$ ) и  $L_m = 0$  при  $t \geq 2\pi/\omega$ . Собственные частоты  $p_k$  и собственные формы колебаний  $u_{mk}$  найдем из дифференциальных уравнений (2).

Уравнения для главных координат запишем в виде

$$\ddot{q}_k + p_k^2 q_k = \frac{Q_k(t)}{M_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Здесь  $Q_k(t) = \sum_{m=2}^n L_m(t) u_{mk}$  — обобщенная сила, соответствующая координате  $q_k$ ;  $M_k = \sum_{m=2}^n J u_{mk}^2$  — обобщенная масса системы при  $k$ -й форме собственных колебаний. Проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение, вычислим  $k$ -ю главную координату:

при  $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$

$$q_k = \frac{a\omega^2 \sum_{m=2}^n u_{mk} b_m}{\sum_{m=2}^n u_{mk}^2 (\omega^2 - p_k^2)} (\cos \omega t - \cos p_k t), \quad (5)$$

при  $t > 2\pi/\omega$

$$q_k = \frac{a\omega^2 \sum_{m=2}^n u_{mk} b_m}{\sum_{m=2}^n u_{mk}^2 (\omega^2 - p_k^2)} [\cos(p_k t - \gamma_k) - \cos p_k t], \quad \gamma_k = \frac{2\pi p_k}{\omega}.$$

Полные перемещения инерционных масс, используя главные координаты и формы собственных колебаний, находим из следующего выражения для соответствующих временных интервалов:

$$\varphi_m = \varphi_m^{(1)} + \sum_{k=1}^{n-1} q_k(t) u_{mk}, \quad m = 2, 3, \dots, n.$$

Решение этой системы, обладающей корпускулярными свойствами, т. е. состоящей из инерционных масс и упругих участков, при мгновенном распространении взаимодействия, состоит из двух этапов, следующих один за другим; этап вынужденных колебаний за один период  $2\pi/\omega$  и этапа свободных колебаний с начальными условиями соответствует положению системы в конце первого этапа.

Рассматривая динамическую систему, представленную на рис. 2, как однородную дискретную, т. е. обладающую волновыми свойствами (в уравнении (2) в правой части в скобках имеем разностный аналог второй производной), получаем следующий волновой характер ее движения. При увеличении времени от 0 до  $2\pi/\omega$  каждая следующая масса повторяет движение ( $\varphi_1 = a(1 - \cos \omega t)$ ) первой массы через определенный интервал  $1/v_\phi$  и в конце периода соответствующее число масс образует волну, в которой каждая масса находится в соответствующей фазе [13]. В дальнейшем эта волна распространяется по системе с фазовой скоростью  $v_\phi = \sqrt{c/J}$ , так как каждая масса «не знает» будет ли эта динамическая система ограничена или она бесконечна. Следовательно, при  $t \leq m/v_\phi$  и  $t \geq m/v_\phi + 2\pi/\omega$  имеем  $\varphi_m = 0$ , при  $m/v_\phi < t < m/v_\phi + 2\pi/\omega$  получаем

$$\varphi_m = a[1 - \cos \omega(t - m/v_\phi)]. \quad (6)$$

Таким образом, корпускулярный и волновой подходы к анализу движения дискретной динамической системы (2) показали существенно различное поведение системы. В отличие от волнового подхода, когда масса «не знает» будет ли система ограничена или нет и аппроксимирует бегущую волну модами, кратными первой собственной частоте, при корпускулярном подходе каждая масса «знает», что система ограничена и собственные частоты подчинены синусоидальному закону дисперсии (4), т. е. не кратны первой собственной частоте и, значит, все косинусы в формуле (5) не могут одновременно изменять знак на противоположный, обеспечивая отражение волны. Только при бесконечно большой скорости распространения взаимодействия корпускулярный подход осуществим. Однако, если же в этом подходе к решению в динамической системе число масс будет равно бесконечности, решение (5) становится волновым, так как в этом случае частоты  $p_k$  будут кратны первой собственной частоте и все косинусы и синусы одновременно изменяют знак на противоположный через половину периода, обеспечивая обратное прохождение волны. Волновой подход к решению данной системы, опирающийся на волновые свойства, соответствует реальной действительности и подтверждается экспериментальными исследованиями (6). При огра-

ниченной дискретной динамической системе можно получить решение в форме (5) только тогда, когда какая-либо из гармоник произвольной волны, двигаясь одна за другой, при отражении от конца системы образует стоячую волну, т. е. собственную форму колебаний данной гармоники.

Другие особенности поведения динамической системы при корпускулярном и волновом подходах получаем, рассматривая дифференциальные уравнения (1) с учетом сил сопротивления. Систему дифференциальных уравнений (1) запишем в общем виде

$$\sum_{m=1}^n (J_{km} \ddot{\varphi}_m + \mu_{km} \dot{\varphi}_m + c_{km} \varphi_m) = L_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Используя операционный метод решения этой системы и обозначая через  $\Phi_m(s)$  и  $F_k(s)$  изображения  $\varphi_m(t)$  и  $L_k(t)$  при нулевых начальных условиях, систему (7) представим как операторную [14]

$$\sum_{m=1}^n (J_{km} s^2 + \mu_{km} s + c_{km}) \Phi_m(s) = F_k(s), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Решая систему (8) в качестве линейной алгебраической системы уравнений относительно  $\Phi_k(s)$ , найдем значения  $\Phi_k(s)$  в виде дробно-рациональных функций, в которых числители имеют меньшие степени, чем знаменатели. Разложив эти функции на простейшие дроби и отобразив их в пространство оригиналов  $\varphi_k(t)$ , получим решение системы (8). При этом структура решения для каждой обобщенной координаты  $\varphi_m(t)$  будет состоять из слагаемых, зависящих от частоты  $\omega_k$  возмущающего воздействия и слагаемых от всех собственных частот  $p_k$  с экспоненциальным коэффициентом:

$$\varphi_m = A_m \cos \omega_k t + B_m \sin \omega_k t + \sum_{k=1}^n e^{-\mu_k t} (C_k \cos p_k t + D_k \sin p_k t). \quad (9)$$

Таким образом, при корпускулярном подходе к анализу вынужденных колебаний дискретной динамической системы в каждый момент времени обобщенные координаты  $\varphi_m(t)$ , согласно выражению (9), имеют перемещения, отличные от нуля.

При волновом подходе к анализу поведения дискретных динамических систем с учетом всех их характеристик необходимо принимать во внимание, что при прохождении волны по системе ее амплитуда уменьшается по экспоненциальному закону, если имеющиеся сопротивления пропорциональны скорости изменения обобщенных координат инерционных масс. Тогда волновое уравнение допускает решение в виде затухающей бегущей волны [15]

$$\varphi(m, t) = A e^{-\mu t} \sin(\omega t - m/v_\varphi). \quad (10)$$

Предполагается, что коэффициент сопротивления остается постоянным по всей длине динамической системы, как, например, в телеграфном уравнении электрической цепи, для которой параметры омического сопротивления и проводимости можно считать постоянными.

В зависимости от протяженности динамической системы, характера и уровня коэффициентов сопротивления, а также от размера амплитуды возмущающегося воздействия волна может пройти некоторое расстояние вдоль системы и затухнуть, не дойдя до ее конца, пройти по всей длине и даже отразившись от конца образовать на некотором отрезке переходную стоячую волну [13]. В общем случае при малом сопротивлении и значительной амплитуде возмущающего воздействия бегущая волна может пройти всю динамическую систему в прямом и обратном направлениях и образовать законченную стоячую волну. При этом во всех инерционных массах происходят колебания с круговой частотой  $\omega$  и отсутствуют колебания с собственными частотами.

Особо следует остановиться на случае, когда в дискретной динамической системе при вынужденных колебаниях с любой амплитудой возмущающегося воздействия стоячая волна, т. е. резонансная собственная форма колебаний, не может образоваться при надлежащем выборе характеристик самой системы. В работе [16] рассмотрен этот случай отсутствия стоячих волн путем встраивания в систему специального устройства-демпфера с определенным соотношением инерционно-жесткостных характеристик и коэффициента вязких потерь. Если к системе (см. рис. 2) к  $n$ -й массе вместо заделки присоединить демпфер с коэффициентом вязких потерь  $\alpha_n$ , то к уравнениям (2) добавляется выражение, описывающее демпфер:

$$J_n \ddot{\varphi}_n + c_n \dot{\varphi}_n - c(\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \alpha_n \dot{\varphi}_n = 0, \quad (11)$$

где  $J_n, c_n$  — инерционно-жесткостные параметры демпфера.

Движение диска  $m$  можно представить в виде суперпозиции двух синусоидальных волн, бегущих в противоположных направлениях,

$$\begin{aligned} \varphi(m, t) &= \varphi^{\text{пад}}(m, t) + \varphi^{\text{отр}}(m, t) = \\ &= A \exp[i(\omega t - K_m)] + B \exp[i(\omega t + K_m)]. \end{aligned}$$

После преобразований [16] получаем отношение амплитуд падающей и отраженной волн

$$\frac{B}{A} = \exp(2iK) \frac{Z_0 - Z_n}{Z_0 + Z_n}, \quad (12)$$

где  $Z_0 = (c \sin K) / \omega = \sqrt{cJ}$ ;  $Z_n = \alpha_n - i[(J/2 - J_n)\omega + c_n / \omega]$ .

Комплексная величина  $Z_n$  зависит от частоты волны  $\omega$ , параметров демпфера  $\alpha_n$ ,  $c_n$ ,  $J_n$ , параметров системы  $c$ ,  $J$  и характеризует сопротивление или импеданс демпфера. В случае чисто активного сопротивления (мнимая часть комплексной величины  $Z_n$  равна нулю при  $c_n = 0$  и  $J_n = J/2$ ) импеданс демпфера равен коэффициенту вязких потерь  $\alpha_n$  и, следовательно, отраженная волна в системе отсутствует ( $B/A = 0$ ).

В [17] показано, что для струны с плотностью  $\rho$  и фазовой скоростью  $c$ , висящей вертикально под действием массы  $M$ , погруженной в вязкую жидкость с параметром  $\alpha$ , коэффициент отражения

$$R = \frac{\alpha - \rho c - i\omega M}{\alpha + \rho c - i\omega M}.$$

Если массу  $M$  заменить легкой лопаткой, а натяжение обеспечить легкой пружиной, то слагаемым  $i\omega M$  можно пренебречь. Подбирая  $\alpha = \rho c$ , нагружаем систему согласованно, обеспечивая поглощение волновых движений в жидкости без отражения.

Аналогичная задача рассмотрена в [14] для электрической линии с источником питания и нагрузкой на концах и показано, что если линия на стороне потребления тока нагружена характеристическим импедансом (импедансы на входе и на выходе цепи равны), то возникает распространение напряжения без отражений. В работе [18] получено, что для необходимости согласованного с нагрузкой соединения, при котором не возникает отраженных волн, импеданс нагрузки должен быть равен импедансу среды. Таким образом, в динамической системе не наблюдается ни собственных частот, ни собственных форм колебаний, отсутствуют резонансные явления с увеличенными нагрузками, а имеет место бегущая волна с нагрузками, определяемыми только возмущающим воздействием.

В общем случае нагружения распределенной дискретной динамической системы прямая бегущая волна, отразившись от конца системы, переходит в обратную бегущую волну, которая, достигнув начала, вместе с прямой образует стоячую волну, т. е. собственную форму колебаний. При этом временным моментом образования формы колебаний является момент совпадения фаз прямой и обратной волн и, следовательно, не существенно, с какой фазовой скоростью, которая может быть и бесконечно большой, достигнут этот момент. Таким образом, оправдано применение принципа Даламбера или уравнений Лагранжа второго рода, основанных на мгновенном распространении взаимодействия, для нахождения собственных частот и форм колебаний данных механических систем. Так как ранее было установлено, что перемещения собственной формы и силовые взаимодействия ведут себя несколько обособленно, естественно предположить, что и при резонансных ко-

лебаниях динамических систем моменты, нагружающие систему от бегущих волн, и моменты, определяемые формой колебаний, в некоторых случаях могут не совпадать.

В работе [19] приведены экспериментальные исследования цепной трехмассовой механической установки, состоящей из соединенных валами инерционного вибратора, маховой массы и одноступенчатого редуктора с главным фрикционом, присоединенным к неподвижной опоре — заделке. Поскольку исследованию подвергалась первая четвертьволновая форма колебаний, дисперсное соотношение (4) удовлетворяется, так как длина волны, выраженная числом участков,  $\lambda = 12$ , волновое число  $K = 2\pi / 12 = 0,52$  и, значит,  $\sin K \approx K$ . По участку стенда редуктор — заделка с числовыми характеристиками ( $J = 1,44$  кг·м<sup>2</sup>;  $c = 77\,000$  Н·м) определена фазовая скорость  $v_\phi = \sqrt{c/J} = 231$  уч./с и первая собственная частота  $p_k = 2v_\phi \sin K / 2 = 119,7$  1/с, значение которой хорошо согласуется с расчетным значением 122,7 1/с, полученным решением дифференциальных уравнений.

В результате экспериментальных исследований показано, что сдвиг фазы между возмущающим моментом и кривыми угловых перемещений (формой колебаний) составляет значение  $\pi/2$ , которое согласуется с принятым в теории колебаний сдвигом фазы  $\pi/2$  между возмущением и отклонением в резонансе для одностепенного гармонического осциллятора, который можно рассматривать как четвертьволновый вибратор, каким и является динамическая схема стенда. Максимальные моменты на участках между массами, замеренные тензометрированием, вследствие наличия бегущей волны не совпадают со значениями моментов, рассчитанными по форме колебаний, и имеют угловые сдвиги фаз относительного возмущающего момента от 0 около вибратора до  $\pi/2$  в заделке в соответствии с фазовой скоростью. При этом с увеличением угла сдвига фаз значения максимальных моментов все больше приближаются к значениям моментов, вычисленным по форме колебаний, и практически не отличаются в заделке при фазе  $\pi/2$ , так как на участке, примыкающем к ней, прямая и отраженная волны практически находятся в одной фазе во всем промежутке времени колебаний.

Расчетные моменты, полученные по форме колебаний с использованием корпускулярного подхода к анализу дискретной квазиоднородной динамической системы, совпадают с полученными экспериментально для любого момента времени только на некоторых участках системы (в узле около заделки) и для одного момента времени (соответствующего максимальному отклонению инерционных масс) — для всех участков динамической системы при волновом распространении энергии колебаний от инерционного вибратора до заделки.

Очевидно, что для определения максимальных моментов, действующих на участках в дискретной квазиоднородной динамической системе, где энергия возбуждения от источника распространяется волновым способом и крутящие моменты являются гармоническими функциями, необходимо учитывать сдвиги фаз, зависящие от размеров системы и фазовой скорости бегущих волн. Поэтому амплитуда момента  $M_m$  на каком-либо участке системы прямо пропорциональна моменту  $M_{m\phi k}$ , подсчитанному по форме колебаний, и обратно пропорциональна синусу угла сдвига фаз  $\delta_m$  бегущей волны от места возбуждения до данного участка

$$M_m = \frac{M_{m\phi k}}{\sin \delta_m}.$$

Угол сдвига фаз можно определить по формуле

$$\delta_m = \frac{p_k N_{m-1}}{v_\phi},$$

где  $p_k$  — круговая частота  $k$ -й формы колебаний;  $N_{m-1}$  — номер соответствующего участка;  $v_\phi$  — фазовая скорость.

Для сравнения характера нагружения при вынужденных колебаниях, рассмотренных выше и имеющих волновую природу, и свободных колебаниях с данными начальными условиями, когда отсутствуют волновые явления, инерционные массы стенда выставляли в соответствии с первой формой колебаний, которые после освобождения от связей совершали свободные колебания. В результате экспериментальных исследований получено, что низкочастотные гармоники крутящих моментов на участках системы совпадают по фазе один с другим и их числовые значения соответствуют моментам, определяемым по форме колебаний, т. е. корпускулярный подход в данном случае полностью определяет нагружку системы.

**Выводы.** В работе обоснована возможность применения корпускулярно-волнового дуализма к дискретным системам.

1. Волновое уравнение и описание волнового движения можно получить исходя из корпускулярных особенностей дискретной системы, используя аксиому динамики и в то же время, опираясь на аксиоматическое представление волнового движения системы, прийти к волновому уравнению, а от него — к динамике элемента дискретной системы. Оба этих подхода могут быть использованы равноценно.

2. Плотность и сила натяжения в струне, моменты инерции и жесткости участков механической системы, плотность и давление в жидкости или воздухе определяют фазовую скорость бегущей волны; силы сопротивления придают экспоненциальный характер амплитуде бегущей волны; уровень возмущающего воздействия определяет

возможность прямого и обратного прохождения бегущей волной системы и возникновения стоячей волны, т. е. силовую характеристику данной системы.

3. По форме собственных колебаний можно получить действительное решение в один момент времени — в момент максимального отклонения масс и в каждый момент времени только в некоторых точках системы — в узлах формы колебаний.

4. В остальные моменты времени действительные нагрузки от колебаний могут быть найдены во всех точках квазигомогенной дискретной динамической системы по форме колебаний с учетом сдвига фаз бегущих волн как отношение крутящего момента на участке, определенного по форме колебаний, к синусу угла сдвига фазы, определяемой положением данного участка в форме колебаний.

5. При инженерном проектировании реальных конструкций необходимо предусматривать существование в системе бегущих волн и введение демпферов с коэффициентом сопротивления, пропорциональным импедансу динамической системы, благодаря чему появляется возможность предотвратить опасные резонансные режимы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Фок В.А. *Теория пространства, времени и тяготения*. Москва, Наука, 1972, 563 с.
- [2] Терских В.П. *Расчеты крутильных колебаний силовых установок*. Т. 1–3. Ленинград, Судпромгиз, 1954, 206 с.
- [3] Житомирский В.К. *Крутильные колебания валов авиационных поршневых двигателей*. Москва, Оборонгиз, 1952, 339 с.
- [4] Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т., Гусаров А.А. *Колебания машин*. Москва, Машиностроение, 1964, 308 с.
- [5] Скучек Е. *Основы акустики*. Т. 1. Москва, Мир, 1976, 520 с.
- [6] Смирнов В.Ф., Назаренко Б.П. Волновые особенности динамики дискретных систем. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009, № 3(34), с. 50–66.
- [7] Борн М. *Эйнштейновская теория относительности*. Москва, Мир, 1972, 368 с.
- [8] Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. Москва, Наука, 1973, 536 с.
- [9] Хайкин С.Э. *Физические основы механики*. Москва, Наука, 1971, 752 с.
- [10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. Москва, Наука, 1973, 504 с.
- [11] Джеффрис Г., Свирлс Б. *Методы математической физики*. Вып. 3. Москва, Мир, 1970, 314 с.
- [12] Бидерман В.Л. *Прикладная теория механических колебаний*. Москва, Высш. шк., 1972, 416 с.
- [13] Крауфорд Ф. *Волны*. Москва, Наука, 1976, 528 с.
- [14] Дёч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования*. Москва, Наука, 1971, 288 с.
- [15] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва, ГИТТЛ, 1953, 680 с.



- [16] Зябликов В.М., Смирнов В.Ф. Два подхода к анализу динамики механических систем и одно решение. *Справочник. Инженерный журнал*, 2012, № 9, с. 9–13.
- [17] Пиппард А. *Физика колебаний*. Москва, Высш. шк., 1985. 456 с.
- [18] Основы теории колебаний. Мигулин В.В., ред. Москва, Наука, 1978, 391 с.
- [19] Смирнов В.Ф., Зябликов В.М. Особенности поведения динамических систем при волновом распространении энергии колебаний. *Вестник машиностроения*. 1994, № 10, с. 7–11.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Смирнов В.Ф., Зябликов В.М. Корпускулярно-волновой дуализм дискретных динамических систем. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormechn/1145.html>

**Смирнов Валерий Федорович** родился в 1940 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1964 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор свыше 30 работ в области динамики трансмиссий, гусеничных, колесных машин. e-mail: [smirnov.fn-3.bmstu@yandex.ru](mailto:smirnov.fn-3.bmstu@yandex.ru)

**Зябликов Владимир Михайлович** родился в 1939 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1963 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры деталей машин МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор свыше 30 работ в области динамики трансмиссий, гусеничных, колесных машин. e-mail: [smirnov.fn-3.bmstu@yandex.ru](mailto:smirnov.fn-3.bmstu@yandex.ru)