УДК 531.352

Устойчивость периодических движений осесимметричного спутника-гиростата на круговой орбите

© А.А. Панкратов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, Россия

В работе проведены исследования устойчивости периодических движений осесимметричного спутника-гиростата. Центр масс спутника движется по кеплеровой круговой орбите, в уравнениях движения спутника относительно центра масс учитывается лишь гравитационный момент, в качестве переменных используется модификация переменных Андуайе. С помощью интеграла Якоби осуществляется понижение порядка системы на две единицы, и уравнения приводятся к так называемой форме Уиттекера. Методом Пуанкаре доказано существование многопараметрических семейств периодических решений приведенной системы, проведены исследования устойчивости этих решений по первому приближению.

Ключевые слова: *устойчивость, характеристические показатели, спутник-гиростат, переменные Андуайе, гравитационный момент, метод Пуанкаре, периодические и условно-периодические движения.*

Введение. В работе [1] исследовались периодические движения оси симметрии динамически симметричного спутника-гиростата, центр масс которого движется по кеплеровой круговой орбите. Методом Пуанкаре доказано существование многопараметрических семейств периодических решений исследуемой системы, найдены их порождающие решения. Настоящая работа посвящена изучению устойчивости по первому приближению найденных в работе [1] (новых) периодических и условно-периодических движений вокруг центра масс динамически симметричного спутника-гиростата. Проведены исследования структуры разложения характеристических показателей рассматриваемых периодических решений в ряды по целым и дробным степеням малого параметра. Получены основные члены в этих разложениях; найдены необходимые условия устойчивости исследуемых периодических и условно-периодических движений, приведена их геометрическая интерпретация.

Устойчивость периодических решений гамильтоновых систем. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\frac{d\,\mathrm{I}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi^{\mathrm{т}}},\quad \frac{d\varphi}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \mathrm{I}^{\mathrm{т}}},$$
$$\frac{d\,\mathrm{J}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \psi^{\mathrm{т}}},\quad \frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \mathrm{J}^{\mathrm{т}}}. \tag{1}$$

$$F(p,\, q,\, t,\, \mu) = F_0(I) + \mu F_1(p,\, q,\, t) + \mu^2 F_2(p,\, q,\, t) + \ldots,\ \mu \ll 1, \qquad (2)$$

где

$$\mathrm{I} = (p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_l)^{\mathrm{т}};\ \ \mathrm{J} = (p_{l+1},\, p_{l+2},\, \ldots,\, p_N)^{\mathrm{т}};$$

$$\mathrm{p}^{\mathrm{т}} = (p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_N) = (\mathrm{I}^{\mathrm{т}},\, \mathrm{J}^{\mathrm{т}});\quad \varphi = (q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_l)^{\mathrm{т}},$$
$$\psi = (q_{l+1},\, q_{l+2},\, \ldots,\, q_N)^{\mathrm{т}};\ \mathrm{q}^{\mathrm{т}} = (q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_N) = (\varphi^{\mathrm{т}},\, \psi^{\mathrm{т}}).$$

Пусть F — аналитическая функция позиционных переменных p, угловых q, канонических переменных и времени t в области $\mathrm{D} \times \mathrm{T}^N \times \mathrm{T}^1$, где D — связная ограниченная область R^N $\{p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_N\}$ N-мерной плоскости, $\mathrm{T}^N\{q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_N \bmod 2\pi\}$ — N-мерный тор, $\mathrm{T}^1\{t \bmod \mathrm{T}_0\}$. Тогда функции $F_i(\mathrm{p},\, \mathrm{q},\, t)$ можно разложить в сходящиеся ряды Фурье по кратным угловых переменных q и Ωt ($\Omega = 2\pi / \mathrm{T}_0$ — основная частота; T_0 — период):

$$F_i(\mathrm{p},\mathrm{q},\, t) = \sum_{\|\mathrm{k}\| + |k_{N+1}|} F_i^{(\mathrm{k},k_{N+1})}(\mathrm{I},\, \mathrm{J}) \cos(\mathrm{k}^{(1)}\varphi + \mathrm{k}^{(2)}\psi + k_{N+1}\Omega t) +$$

$$+ \overset{*}{F}{}_i^{(k,\, k_{N+1})}(\mathrm{I},\mathrm{J}) \sin(\mathrm{k}^{(1)}\varphi + \mathrm{k}^{(2)}\psi + k_{N+1}\Omega t), \qquad (3)$$

$$\mathrm{k}^{(1)} = (k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_l),\ \ \mathrm{k}^{(2)} = (k_{l+1}, k_{l+2},\, \ldots,\, k_N),\ \ \mathrm{k} = (\mathrm{k}^{(1)},\, \mathrm{k}^{(2)}),$$

$$k_i \in \mathrm{Z},\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, N+1,\ \ \|\mathrm{k}\| = \|\mathrm{k}^{(1)}\| + \|\mathrm{k}^{(2)}\| = \sum_{i=1}^{N} |k_i|.$$

Уравнения (1)–(3), представляющие собой пример систем дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым, широко распространены в небесной механике [2]. Правые части уравнений (1)–(3) — периодические функции времени с периодом T_0. Одна из важных проблем, возникающих при исследовании такой системы, — определить существуют ли периодические решения уравнений (1)–(3) с периодом T кратным T_0 хотя бы для достаточно малых значений параметра μ и какова их устойчивость.

Пуанкаре получил достаточные условия существования периодических решений уравнений (1)–(3) и необходимые условия устойчивости этих решений в форме, удобной для приложения [3]. Однако во многих практических задачах (например, в задачах о поступательном и вращательном движениях спутников) классические условия Пуанкаре нарушаются. Вопрос о существовании периодических решений в подобных случаях (их в дальнейшем будем называть особыми или вырожденными) остается, вообще говоря, открытым. В работах [3, 4], для одного особого (важного для приложений) случая были найдены новые достаточные условия существования периодических решений; изучена структура разложения характеристических показателей в ряды по целым и дробным степеням малого параметра μ и получены алгебраические формулы для нахождения основных коэффициентов в разложениях соответствующих характеристических показателей. Сформулируем соответствующие результаты в виде теорем.

Теорема 1. Дифференциальные уравнения (1)–(3) допускают при малых $\mu \neq 0$ периодические решения, близкие к порождающему решению

$$\mathrm{I} = a_1,\ \mathrm{J} = a_2,\ \varphi = n^{(0)}t + \omega_1,\ \psi = \omega_2 \tag{4}$$

($a_1,\ a_2,\ \omega_1,\ \omega_2$ — некоторые постоянные; $n^{(0)} = -\dfrac{\partial F_0}{\partial a_1^{\mathrm{т}}} = -\left.\dfrac{\partial F_0}{\partial \mathrm{I}_1^{\mathrm{т}}}\right|_{\mathrm{I}_1 = a_1}$),

если параметры $a_1,\ a_2,\ \omega_1,\ \omega_2$ порождающего решения удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered}\left((n^{(0)})^{\mathrm{т}},\ \Omega\right) = \mathrm{c}(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_l,\ k_{N+1}),\\ \mathrm{c} \neq 0,\ k_i \in \mathrm{Z},\quad \text{НОД}\,(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_l,\ k_{N+1}) = 1,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\frac{\partial\left\langle F_1\right\rangle}{\partial \omega_1^{\mathrm{т}}} = 0,\quad \frac{\partial\left\langle F_1\right\rangle}{\partial \omega_2^{\mathrm{т}}} = 0,\quad \frac{\partial\left\langle F_1\right\rangle}{\partial a_2^{\mathrm{т}}} = 0, \tag{6}$$

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_1^{\mathrm{т}}}\right) \neq 0, \tag{7}$$

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial a_2\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} \\ \dfrac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial a_2\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} \\ \dfrac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial\omega_1\partial a_2^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial\omega_2\partial a_2^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial a_2\partial a_2^{\mathrm{т}}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Характеристические показатели этих периодических решений будут двух типов (считаем, что уравнения, определяющие основные коэффициенты в разложениях характеристических показателей имеют простые корни): первый тип характеристических показателей ($2l$-значений) разлагается в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)}\sqrt{\mu} + \varepsilon_i^{(1)}\mu + \varepsilon_i^{(2)}\mu^{3/2} + \ldots,\quad i = 1, 2,\ ...,\ l, \tag{9}$$

второй тип характеристических показателей ($2(N-l)$-значений) разлагается в ряды по степеням μ:

$$\eta_i = \eta_i^{(0)}\mu + \eta_i^{(1)}\mu^2 + \eta_i^{(2)}\mu^3 + \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, N-l. \tag{10}$$

Основные коэффициенты в соответствующих определяются формулами

$$\det \left\| \varepsilon^2 \mathrm{E}_l + \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_1^{\mathrm{т}}} \right) \left(\frac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_1^{\mathrm{т}}} \right) \right\| = 0, \tag{11}$$

$$\det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_1^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_2 \partial \omega_1^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial a_2 \partial \omega_1^{\mathrm{т}}} \\ \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_2^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_2 \partial \omega_2^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial a_2 \partial \omega_2^{\mathrm{T}}} - \eta \mathrm{E}_{N-l} \\ \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_1 \partial a_2^{\mathrm{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_2 \partial a_2^{\mathrm{т}}} + \eta \mathrm{E}_{N-l} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial a_2 \partial a_2^{\mathrm{т}}} \end{Vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Здесь $\left\langle F_1 \right\rangle$ — функция F_1, усредненная по периоду $\mathrm{T} = 2\pi k_{N+1}/\Omega$, вдоль семейства

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0, \;\; \mathrm{J} = \mathrm{J}_0, \;\; \varphi = n^{(0)}t + \varphi_0, \;\; \psi = \psi_0, \tag{13}$$

$(\mathrm{I}_0, \; \mathrm{J}_0, \; \varphi_0, \; \psi_0$ — произвольные постоянные; $\mathrm{I}_0, \; \mathrm{J}_0 \in \mathrm{D})$, т. е.

$$\left\langle F_1 \right\rangle = \frac{1}{\mathrm{T}} \int F_1(\mathrm{I}_0, \, \mathrm{J}_0, \, n^{(0)}t + \varphi_0, \, \psi_0, \, \Omega t) \, dt,$$

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_1^{\mathrm{т}}} \equiv \left. \frac{\partial^2 F_0}{\partial \mathrm{I}_0 \partial \mathrm{I}_0^{\mathrm{т}}} \right|_{\mathrm{I}_0 = a_1}, \quad \frac{\partial \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_1^{\mathrm{т}}} = \left. \frac{\partial \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \varphi_0^{\mathrm{т}}} \right|_{\substack{\mathrm{I}_0 = a_1, \;\; \mathrm{J}_0 = a_2, \\ \varphi_9 = \omega_1, \;\; \psi_0 = \omega_2}}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_2^{\mathrm{т}}} = \left. \frac{\partial \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \psi_0^{\mathrm{т}}} \right|_{\substack{\mathrm{I}_0 = a_1, \;\; \mathrm{J}_0 = a_2, \\ \varphi_9 = \omega_1, \;\; \psi_0 = \omega_2}}, \quad \frac{\partial \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial a_1^{\mathrm{т}}} = \left. \frac{\partial \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \mathrm{J}_0^{\mathrm{т}}} \right|_{\substack{\mathrm{I}_0 = a_1, \;\; \mathrm{J}_0 = a_2, \\ \varphi_9 = \omega_1, \;\; \psi_0 = \omega_2}}.$$

Совокупность условий (5)–(8) определяет достаточное условие существования голоморфных по параметру μ, изолированных периодических решений системы (1)–(3), близких к порождающему решению (4).

При исследовании периодических решений в ряде прикладных задач возникает следующая особенность: для определенных соизмеримостей невозмущенных значений частот (5), функция $\left\langle F_1 \right\rangle$ не зависит от порождающих значений угловых переменных φ, ψ и медленных позиционных переменных J или зависит лишь от части этих переменных, т. е.

$$\langle F_1 \rangle = f(\mathrm{I}_0), \tag{15}$$

либо

$$\langle F_1 \rangle = f(\mathrm{I}_0, \overset{*}{\mathrm{J}}_0, \overset{*}{\varphi}_0, \overset{*}{\psi}_0), \tag{16}$$

где

$$\overset{*}{\mathrm{J}}_0 = (p_{l+1}^{(0)}, p_{l+2}^{(0)}, ..., p_{l+S_1}^{(0)})^{\text{т}}, \;\; \overset{*}{\varphi}_0 = (q_1^{(0)}, q_2, ..., q_{S_2}^{(0)})^{\text{т}},$$

$$\overset{*}{\psi}_0 = (q_{l+1}^{(0)}, q_{l+2}^{(0)}, ..., q_{S_3}^{(0)})^{\text{т}},$$

$$\overset{**}{\mathrm{J}}_0 = (p_{l+S_1+1}^{(0)}, p_{l+S_1+2}^{(0)}, ..., p_N^{(0)})^{\text{т}}, \;\; \overset{**}{\varphi}_0 = (q_{S_2+1}^{(0)}, q_{S_2+2}^{(0)}, ..., q_l^{(0)})^{\text{т}},$$

$$\overset{**}{\psi}_0 = (q_{S_3+1}^{(0)}, q_{S_3+2}^{(0)}, ..., q_N^{(0)})^{\text{т}},$$

$$\mathrm{J}_0^{\text{т}} = (\overset{*}{\mathrm{J}}{}_0^{\text{т}}, \overset{**}{\mathrm{J}}{}_0^{\text{т}}), \;\; \varphi_0^{\text{т}} = (\overset{*}{\varphi}{}_0^{\text{т}}, \overset{**}{\varphi}{}_0^{\text{т}}), \;\; \psi_0^{\text{т}} = (\overset{*}{\psi}{}_0^{\text{т}}, \overset{**}{\psi}{}_0^{\text{т}}).$$

В случаях (15) и (16) условия (8) заведомо нарушаются. В работах [5, 6] для этих случаев были найдены новые достаточные условия существования периодических решений; изучена структура разложения характеристических показателей в ряды по целым и дробным степеням малого параметра μ и получены алгебраические формулы для нахождения основных коэффициентов в разложениях соответствующих характеристических показателей. Сформулируем эти результаты в виде соответствующих теорем.

Теорема 2. Дифференциальные уравнения (1)–(3) допускают при малых $\mu \neq 0$ периодические решения, близкие к порождающему решению (4), если параметры a_1, a_2, ω_1, ω_2 порождающего решения будут удовлетворять условиям (5), (7), а также следующим условиям:

$$\langle \Phi_{\mathrm{I}} \rangle + \frac{\partial \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_1^{\text{т}}} = 0, \;\; \langle \Phi_{\mathrm{J}} \rangle + \frac{\partial \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_2^{\text{т}}} = 0, \;\; \langle \Phi_{\psi} \rangle + \frac{\partial \langle F_2 \rangle}{\partial a_2^{\text{т}}} = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \langle \Phi_{\mathrm{I}} \rangle}{\partial \omega_1} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_1^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\mathrm{I}} \rangle}{\partial \omega_2} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_2 \partial \omega_1^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\mathrm{I}} \rangle}{\partial a_2} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial a_2 \partial \omega_1^{\text{т}}} \\ \dfrac{\partial \langle \Phi_{\mathrm{J}} \rangle}{\partial \omega_1} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_1 \partial \omega_2^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\mathrm{J}} \rangle}{\partial \omega_2} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_2 \partial \omega_2^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\mathrm{J}} \rangle}{\partial a_2} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial a_2 \partial \omega_2^{\text{т}}} \\ \dfrac{\partial \langle \Phi_{\psi} \rangle}{\partial \omega_1} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_1 \partial a_2^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\psi} \rangle}{\partial \omega_2} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_2 \partial a_2^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{\psi} \rangle}{\partial a_2} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial a_2 \partial a_2^{\text{т}}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Характеристические показатели исследуемых периодических решений будут раскладываться в ряды по целым степеням малого параметра μ (считаем, что уравнения, определяющие основные коэффициенты в разложениях характеристических показателей, имеют простые корни) и образуют два типа показателей. Для первого типа характеристических показателей ν_i $(i = 1, 2, ..., 2l)$ разложения в ряд начинаются с членов первого порядка, а для второго типа характеристических показателей σ_i $(i = 1, 2, ..., 2(N - l))$ разложения в ряд начинаются с членов второго порядка, т. е.

$$\nu_i = \nu_i^{(0)}\mu + \nu_i^{(1)}\mu^2 + \nu_i^{(2)}\mu^3 ... ,$$

$$\sigma_i = \sigma_i^{(0)}\mu^2 + \sigma_i^{(1)}\mu^3 + \sigma_i^{(2)}\mu^4 ...$$

Основные коэффициенты в соответствующих разложениях находятся из уравнений

$$\det\left\| \nu^2 \mathrm{E}_l + \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_1^{\mathrm{т}}}\right)\left(\frac{\partial\langle\Phi_{\mathrm{I}}\rangle}{\partial\omega_1} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_1^{\mathrm{т}}}\right)\right\| = 0,$$

$$\det \times$$

$$\times\begin{pmatrix} \frac{\partial\langle\Phi_{\mathrm{I}}\rangle}{\partial\omega_1} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{\mathrm{I}}\rangle}{\partial\omega_2} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{\mathrm{I}}\rangle}{\partial a_2} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_2\partial\omega_1^{\mathrm{т}}} \\ \frac{\partial\langle\Phi_{\mathrm{J}}\rangle}{\partial\omega_1} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_1\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{\mathrm{J}}\rangle}{\partial\omega_2} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_2\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{\mathrm{J}}\rangle}{\partial a_2} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_2\partial\omega_2^{\mathrm{т}}} - \sigma\mathrm{E}_{N-l} \\ \frac{\partial\langle\Phi_{\psi}\rangle}{\partial\omega_1} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_1\partial a_2^{\mathrm{т}}} & \frac{\partial\langle\Phi_{\psi}\rangle}{\partial\omega_2} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_2\partial a_2^{\mathrm{т}}} + \sigma\mathrm{E}_{N-l} & \frac{\partial\langle\Phi_{\psi}\rangle}{\partial a_2} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_2\partial a_2^{\mathrm{т}}} \end{pmatrix} =$$

$$= 0.$$

Здесь для краткости записи введены следующие обозначения:

$$\Phi_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\partial\tilde{\mathrm{V}}}{\partial\varphi_0^{\mathrm{т}}}\int\tilde{\tilde{\mathrm{W}}}dt\right)\Bigg|_{\substack{\mathrm{I}_0 = a_1,\ \ \mathrm{J}_0 = a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\ \ \psi_0=\omega_2}},\quad \Phi_{\mathrm{J}} = \left(\frac{\partial\tilde{\mathrm{V}}}{\partial\psi_0^{\mathrm{т}}}\int\tilde{\tilde{\mathrm{W}}}dt\right)\Bigg|_{\substack{\mathrm{I}_0 = a_1,\ \ \mathrm{J}_0 = a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\ \ \psi_0=\omega_2}};$$

$$\Phi_{\psi} = \left(\frac{\partial\tilde{\mathrm{V}}}{\partial\mathrm{J}_0^{\mathrm{т}}}\int\tilde{\tilde{\mathrm{W}}}dt\right)\Bigg|_{\substack{\mathrm{I}_0 = a_1,\ \ \mathrm{J}_0 = a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\ \ \psi_0=\omega_2}},\quad \tilde{\mathrm{V}} = \left(\frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\mathrm{I}_0},\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\mathrm{J}_0},\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\psi_0},\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\varphi_0}\right);\quad (17)$$

$$\tilde{\mathrm{W}} = \left(\frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\varphi_0^{\mathrm{т}}},\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\psi_0^{\mathrm{т}}},\ -\frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\mathrm{J}_0^{\mathrm{т}}},\ -\frac{\partial^2 F_0}{\partial\mathrm{I}_0\partial\mathrm{I}_0^{\mathrm{т}}}\int\frac{\partial\tilde{\tilde{F}}_1}{\partial\varphi_0^{\mathrm{т}}}dt\ -\ \frac{\partial\tilde{F}_1}{\partial\mathrm{I}_0^{\mathrm{т}}}\right),$$

а также для периодических функций $f = f\left(\mathrm{I}_0,\ \mathrm{J}_0,\ n^{(0)}t + \varphi_0,\ \psi_0,\ t\right)$ используется представление $f = \left\langle f \right\rangle + \tilde{f}$, где $\left\langle f \right\rangle$ — постоянная составляющая периодической функции f (см. формулы (14)), а $\tilde{f}$ — ее чисто периодическая часть, $\int\limits_0^T \tilde{f}\ dt = 0.$

Для случая (16) сформулируем достаточное условие существование периодических решений и соответствующие результаты по устойчивости этих решений в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть порождающее семейство периодических решений таково, что для усредненной по периоду вдоль этого семейства функции F_1 выполняется условие (16). Тогда система (1)–(3) будет допускать изолированное, голоморфное по μ, периодическое, с периодом T решение, обращающее при $\mu = 0$ в порождающее решение (4), если параметры $a_1,\ a_2,\ \omega_1,\ \omega_2$ порождающего решения будут удовлетворять условиям (5), (7), а также следующей группе условий:

$$\frac{\partial \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_{11}^{\text{т}}} = 0,\ \ \frac{\partial \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_{21}^{\text{т}}} = 0,\ \ \frac{\partial \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial a_{21}^{\text{т}}} = 0, \tag{18}$$

$$\left\langle \Phi_{\mathrm{I}2} \right\rangle + \frac{\partial \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_{12}^{\text{т}}} = 0,\ \left\langle \Phi_{\mathrm{J}2} \right\rangle + \frac{\partial \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_{22}^{\text{т}}} = 0,\ \left\langle \Phi_{\psi 2} \right\rangle + \frac{\partial \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial a_{22}^{\text{т}}} = 0, \tag{19}$$

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_{11} \partial \omega_{11}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_{21} \partial \omega_{11}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial a_{21} \partial \omega_{11}^{\text{т}}} \\ \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_{11} \partial \omega_{21}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_{21} \partial \omega_{21}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial a_{21} \partial \omega_{21}^{\text{т}}} \\ \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_{11} \partial a_{21}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial \omega_{21} \partial a_{21}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial^2 \left\langle F_1 \right\rangle}{\partial a_{21} \partial a_{21}^{\text{т}}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{20}$$

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \left\langle \Phi_{\mathrm{I}2} \right\rangle}{\partial \omega_{12}} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_{12} \partial \omega_{12}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \left\langle \Phi_{\mathrm{I}2} \right\rangle}{\partial \omega_{22}} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_{22} \partial \omega_{12}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \left\langle \Phi_{\mathrm{I}2} \right\rangle}{\partial a_{22}} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial a_{22} \partial \omega_{12}^{\text{т}}} \\ \dfrac{\partial \left\langle \Phi_{\mathrm{J}2} \right\rangle}{\partial \omega_{12}} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_{12} \partial \omega_{22}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \left\langle \Phi_{\mathrm{J}2} \right\rangle}{\partial \omega_{22}} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_{22} \partial \omega_{22}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \left\langle \Phi_{\mathrm{J}2} \right\rangle}{\partial a_{22}} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial a_{22} \partial \omega_{22}^{\text{т}}} \\ \dfrac{\partial \left\langle \Phi_{\psi 2} \right\rangle}{\partial \omega_{12}} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_{12} \partial a_{22}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \left\langle \Phi_{\psi 2} \right\rangle}{\partial \omega_{22}} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial \omega_{22} \partial a_{22}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial \left\langle \Phi_{\psi 2} \right\rangle}{\partial a_{22}} + \dfrac{\partial^2 \left\langle F_2 \right\rangle}{\partial a_{22} \partial a_{22}^{\text{т}}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{21}$$

Характеристические показатели периодических решений, определяемых условиями существования (5), (7), (18)–(21), образуют (при $S_1 = S_3$) четыре группы. $2S_2$-характеристических показателя (первая группа) разлагаются в ряды по степеням $\sqrt{\mu}$, а остальные (три группы) — по целым степеням малого параметра μ, причем разложения показателей четвертой группы начинаются с членов порядка μ^2:

$2S_2$-значений,

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)}\sqrt{\mu} + \varepsilon^{(1)}\mu + \varepsilon^{(2)}\mu\sqrt{\mu} + \dots ,$$

$2S_1$-значений,

$$\eta = \eta^{(0)}\mu + \eta^{(1)}\mu^2 + \eta^{(2)}\mu^3 + \dots ,$$

$2(l - S_2)$-значений,

$$\nu = \nu^{(0)}\mu + \nu^{(1)}\mu^2 + \nu^{(2)}\mu^3 + \dots ,$$

$2(N - 1 - S2)$-значений

$$\sigma = \sigma^{(0)}\mu^2 + \sigma^{(1)}\mu^3 + \sigma^{(2)}\mu^4 + \dots$$

Здесь S_1, S_2, S_3 — размерность переменных J, φ, ψ, входящих в $\langle F_1 \rangle$ (в рассматриваемом случае $S_1 = S_3$), коэффициенты $\varepsilon^{(0)}$, $\eta^{(0)}$, $\nu^{(0)}$, $\sigma^{(0)}$ являются решениями следующих алгебраических уравнений:

$$\det\left\| \varepsilon^2 E_{S_2} + \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial a_1' \partial a_1'^{\mathrm{T}}}\right)\left(\frac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{11} \partial \omega_{11}^{\mathrm{T}}}\right) \right\| = 0, \tag{22}$$

$$\det\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{11} \partial \omega_{11}^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{21} \partial \omega_{11}^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial a_{21} \partial \omega_{11}^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{11} \partial \omega_{21}^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{21} \partial \omega_{21}^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial a_{21} \partial \omega_{21}^{\mathrm{T}}} - \eta E_{S_1} \\ \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{11} \partial a_{21}^{\mathrm{T}}} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial \omega_{21} \partial a_{21}^{\mathrm{T}}} + \eta E_{S_1} & \dfrac{\partial^2 \langle F_1 \rangle}{\partial a_{21} \partial a_{21}^{\mathrm{T}}} \end{Vmatrix} = 0, \tag{23}$$

$$\det\begin{Vmatrix} 0 \quad -\nu E_{l-S_2} & \dfrac{\partial \langle \Phi_{12} \rangle}{\partial \omega_{12}} + \dfrac{\partial^2 \langle F_2 \rangle}{\partial \omega_{12} \partial \omega_{12}^{\mathrm{T}}} \\ \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial a_1 \partial a_1^{\mathrm{T}}} & \begin{matrix} 0 \\ \nu E_{l-S_2} \end{matrix} \end{Vmatrix} = 0, \tag{24}$$

$$\det \begin{Vmatrix} A_{11} & \dfrac{\partial\langle\Phi_{I2}\rangle}{\partial\omega_{22}} + \dfrac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{22}\partial\omega_{12}^{\text{т}}} & \dfrac{\partial\langle\Phi_{I2}\rangle}{\partial a_{22}} + \dfrac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_{22}\partial\omega_{12}^{\text{т}}} \\ A_{21} & \dfrac{\partial\langle\Phi_{J2}\rangle}{\partial\omega_{22}} + \dfrac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{22}\partial\omega_{22}^{\text{т}}} & A_{23} - \sigma\mathrm{E}_{N-l-S_1} \\ A_{31} & A_{32} + \sigma\mathrm{E}_{N-l-S_1} & \dfrac{\partial\langle\Phi_{\psi2}\rangle}{\partial a_{22}} + \dfrac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_{22}\partial a_{22}^{\text{т}}} \end{Vmatrix} = 0, \qquad (25)$$

$$A_{11} = \frac{\partial\langle\Phi_{I2}\rangle}{\partial\omega_{12}} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\omega_{12}^{\text{т}}}, \quad A_{21} = \frac{\partial\langle\Phi_{J2}\rangle}{\partial\omega_{12}} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial\omega_{22}^{\text{т}}},$$

$$A_{31} = \frac{\partial\langle\Phi_{\psi2}\rangle}{\partial\omega_{12}} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{12}\partial a_{22}^{\text{т}}}, \quad A_{32} = \frac{\partial\langle\Phi_{\psi2}\rangle}{\partial\omega_{22}} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial\omega_{22}\partial a_{22}^{\text{т}}}, \qquad (26)$$

$$A_{23} = \frac{\partial\langle\Phi_{J2}\rangle}{\partial a_{22}} + \frac{\partial^2\langle F_2\rangle}{\partial a_{22}\partial\omega_{22}^{\text{т}}}.$$

Здесь введены обозначения, аналогичные обозначениям (24):

$$\Phi_{I2} = \left(\frac{\partial\tilde{\mathrm{V}}}{\partial\overset{**}{\varphi}{}_0^{\text{т}}}\int\tilde{\tilde{\mathrm{W}}}dt\right)\Bigg|_{\substack{\mathrm{I}_0=a_1,\quad \mathrm{J}_0=a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\quad \psi_0=\omega_2}}; \quad \Phi_{J2} = \left(\frac{\partial\tilde{\mathrm{V}}}{\partial\overset{**}{\varphi}{}_0^{\text{т}}}\int\tilde{\tilde{\mathrm{W}}}dt\right)\Bigg|_{\substack{\mathrm{I}_0=a_1,\quad \mathrm{J}_0=a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\quad \psi_0=\omega_2}},$$

$$\Phi_{\psi2} = \left(\frac{\partial\tilde{\mathrm{V}}}{\partial\overset{**}{\mathrm{J}}{}_0^{\text{т}}}\int\tilde{\tilde{\mathrm{W}}}dt\right)\Bigg|_{\substack{\mathrm{I}_0=a_1,\quad \mathrm{J}_0=a_2,\\ \varphi_0=\omega_1,\quad \psi_0=\omega_2}}.$$

В формулах (25)–(33) $a_{21}, a_{22}, \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}$ — порождающие значения групп переменных $\overset{*}{\mathrm{J}}, \overset{**}{\mathrm{J}}, \overset{*}{\varphi}, \overset{**}{\varphi}, \overset{*}{\psi}, \overset{**}{\psi}$ соответственно, а в формуле (29) a_1' — порождающие значения канонических переменных, сопряженных переменным $\overset{*}{\varphi}$. Отметим, что случай кратных корней уравнений (29)–(32) был исключен при рассмотрении структуры разложения характеристических показателей.

Периодические движения оси симметрии динамически симметричного спутника-гиростата, центр масс которого движется по круговой орбите. В работе [1] при изучении периодических вращений спутника-гиростата, центр масс которого движется по кеплеровой круговой орбите, уравнения движения спутника с использованием интегралла Якоби были приведены к так называемой форме уравнений Уиттекера:

$$\frac{dG}{dh}=\frac{\partial F}{\partial g},\quad \frac{dL}{dh}=\frac{\partial F}{\partial l},$$
$$\frac{dg}{dh}=-\frac{\partial F}{\partial G},\quad \frac{dl}{dh}=-\frac{\partial F}{\partial L}, \tag{27}$$

где

$$F=F_0+\mu F_1\left(L,\,G,\,l,\,g,\,h\right)+\mu^2F_2+\ldots,\quad F_0=\frac{G^2}{2}-C_1;$$

$$F_1=F_1\left(L,\,G,\,H,\,l,\,g,\,h\right)\Big|_{H=F_0=\frac{G^2}{2}-C_1}, \tag{28}$$

$$F_1=\frac{L^2}{2}-\chi_0\left(\sqrt{G^2-L^2}\sin\beta\cos l+L\cos\beta\right)-$$
$$-\sum_{k_1,k_2}U_{k_1,k_2}(\rho,\vartheta)\cos(k_1g+k_2h).$$

Здесь суммирование проводится по индексам $k_1=0,\,1,\,2;$ $k_2=0,\,\pm2,$ а коэффициенты разложения $U_{k_1,k_2}(\rho,\vartheta)$ определяются следующими формулами:

$$U_{0.0}=\frac{3}{4}\sin^2\vartheta+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta\right)\sin^2\rho,\quad U_{2.0}=-\frac{3}{8}\sin^2\vartheta\sin^2\rho,$$

$$U_{1.0}=\frac{3}{8}\sin2\rho\sin2\vartheta,\quad U_{0.2}=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\vartheta\right)\sin^2\rho, \tag{29}$$

$$U_{2.\pm2}=-\frac{3}{16}\sin^2\vartheta(1\pm\cos\rho)^2,\ U_{1.\pm2}=\mp\frac{3}{8}\sin2\vartheta\sin\rho(1\pm\cos\rho).$$

В качестве малого параметра было выбрано динамическое сжатие спутника $\mu=(A-C)/A$, где A, B, C $(A=B)$ — главные центральные моменты инерции спутника.

При значении $\mu=0$ уравнения (27)–(29) легко интегрируются:

$$G=G_0,\ L=L_0,\ g=-G_0h+g_0,\ l=l_0. \tag{30}$$

Здесь G_0, L_0, g_0, h_0 — постоянные интегрирования. При рациональном G_0 решение (30) будет периодическим. Рациональность G_0 означает соизмеримость между невозмущенным значением угловой скорости вращательного движения спутника-гиростата $n^{(0)}$ и средним орбитальным движением ω, т. е. $G_0 = n^{(0)} : \omega = \bar{k}_1 : \bar{k}_2$ ($\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$ — взаимно простые целые числа). Период такого решения (по переменной h) $T_0 = 2\pi\bar{k}_2$.

При исследовании вопроса о существовании периодических решений системы (27) при $\mu \neq 0$ использовали достаточные условия, сформулированные в теоремах 1, 2.

Система (27) допускает при малых $\mu \neq 0$ голоморфные по малому параметру μ T_0-периодические решения, близкие к порождающему решению (решение (30) при $G_0 = \pm 1$), если параметры порождающего решения удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial G_0^2} \neq 0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial l_0} = \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial g_0} = \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial L_0} = 0, \tag{32}$$

$$\operatorname{Hes}\left(\langle F_1 \rangle\right)\Big|_{l_0,\ g_0,\, L_0} \neq 0, \tag{33}$$

где

$$\langle F_1 \rangle = \frac{1}{\mathrm{T}_0} \int\limits_0^{\mathrm{T}_0} F_1\left(L_0,\ G_0,\ -\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} h + g_0,\ l_0,\ h \right) dh; \tag{34}$$

$\operatorname{Hes}(\Phi)\big|_{x,\,y}$ — определитель Гессе, вычисленный от функции Φ по величинам, стоящим справа от вертикальной черты.

Вычисляя интеграл (42), получаем

для $G_0 = \pm 1$ $\left(n^{(0)} : \omega = 1 : \pm 1\right)$:

$$\langle F_1 \rangle = \frac{L_0^2}{2} - \chi_0 \left\{ \sqrt{G_0^2 - L_0^2} \sin\beta \cos l_0 + L_0 \cos\beta \right\} - u_{0,0} - u_{2,\pm 2} \cos 2g_0. \tag{35}$$

Условие (31) выполняется при любом значении G_0.

Подставляя выражение (35) в уравнение (32), находим следующие решения:

1) ρ_0, θ_0 и β произвольны; $l_0 = 0, \pi$; $g_0 = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$;

$$\chi_0 = \frac{\varepsilon \sin 2\theta_0 \left[3(6-\sigma)\cos^2\rho_0 - 6\varepsilon\sigma\cos\theta_0 + 2 - 3\sigma \right]}{16 \sin\left(\theta_0 - \sigma_1 \beta\right)};$$

2) ρ_0 и χ_0 произвольны; $l_0 = 0, \pi;$ $g_0 = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2};$ $\beta = \theta_0 = \dfrac{\pi}{2};$

3) θ_0 и χ_0 произвольны; $l_0 = 0, \pi;$ $g_0 = 0,\ \pi;$

$$\cos\rho_0 = -\frac{\varepsilon}{3 \pm 2\sqrt{6}};\quad \beta = \theta_0 + 0{,}5\left(1+\sigma_1\right)\left(\pi - 2\theta_0\right).$$

Здесь $\varepsilon = 1$ для $G_0 = 1$ и $\varepsilon = -1$ для $G_0 = -1$, $\sigma_1 = \cos l_0 = \pm 1$, $\sigma = \pm 1$ (для $G_0 = \pm 1$ при значениях $g_0 = 0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$ величина $\sigma = \cos 2g_0 = = \pm 1$). Некоторые из произвольных порождающих значений в решениях 1)–3) в соответствии с неравенством (34) исключаются.

Таким образом, доказано существование и найдены порождающие значения трех различного типа семейств периодических решений системы (27), соответствующих резонансам $n^{(0)} : \omega = 1 : \pm 1$.

Для исследования устойчивости найденных периодических решений следует воспользоваться результатами теоремы 1, формулами (9)–(12). Опуская промежуточные выкладки, получим следующие выражения для основных членов в разложениях характеристических показателей:

$$\left(\varepsilon^{(0)}\right)^2 = -4u_{2\pm 2}\cos 2g_0 = \frac{3}{4}\sin^2\theta_0\left(1 \pm \cos\rho_0\right)^2\cos 2g_0, \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\left(\eta^{(0)}\right)^2 = -\chi_0 \sin\theta_0 \sin\beta\cos l_0 \frac{\partial^2\left\langle F_1\right\rangle}{\partial L_0^2} = -\chi_0\sin\theta_0\sin\beta\cos l_0 \cdot \\ \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_0}{\sin^3\theta_0}\sin\beta\cos l_0 - \frac{9}{4}\sin^2\rho_0 - \frac{3}{8}\left(1\pm\cos\rho_0\right)^2\cos 2g_0\right).\end{gathered} \tag{37}$$

Из формул (36), (37), а также (9) и (10) получим необходимые условия устойчивости исследуемых периодических решений:

$$\mu\left(\varepsilon^{(0)}\right)^2 < 0, \tag{38}$$

$$\left(\eta^{(0)}\right)^2 < 0. \tag{39}$$

Так, при использовании формул (36), (38) получаем

$$\left(A - C\right)\cos 2g_0 < 0. \tag{40}$$

Из неравенства (47) следует, что для вытянутого спутника $(A > C)$ $g_0 = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2};$ для сжатого $(A < C)$ $g_0 = 0,\ \pi.$

В случае использования формул (37), (39) анализ неравенства необходимо проводить в зависимости от рассматриваемого типа периодического семейства (см. пп. 1)–3).

Заключение. Исследована структура разложения характеристических показателей исследуемых периодических решений в ряды по целым и дробным степеням малого параметра. Получены основные члены в этих разложениях; найдены необходимые условия устойчивости, дана их интерпретация. Результаты работы можно использовать при создании систем ориентации и стабилизации искусственных спутников, при построении теории вращения естественных небесных тел, учитывающей динамику внутреннего жидкого ядра [7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Панкратов А.А. Периодические и условно-периодические движения спутника-гиростата под действием гравитационного момента на круговой орбите. *Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки.* Спец. вып. № 8, 2012, с. 139–151.

[2] Белецкий В.В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс*. Москва, Наука, 1965, 386 с.

[3] Пуанкаре А. *Избранные труды*. Т.1. Москва, Наука, 1971, 574 с.

[4] Козлов В.В. *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*. Москва, Изд-во МГУ, 1984, 324 с.

[5] Баркин Ю.В., Панкратов А.А. О характеристических показателях периодических решений гамильтоновых систем. *Известия АН СССР. МТТ*, 1987, № 2, с. 25–33.

[6] Баркин Ю.В., Панкратов А.А. Периодические решения гамильтоновых систем в некоторых случаях вырождения. *Прикладная математика и механика*, 1987, т. 51, вып. 2, с. 29–41.

[7] Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч. Москва; Ленинград, ОГИЗ, 1949, т. 2, с. 152–309.

Статья поступила в редакцию

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Панкратов А.А. Устойчивость периодических движений осесимметричного спутника-гиростата на круговой орбите. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1144.html

Панкратов Александр Алексеевич родился в 1952 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1974 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 работ в области динамики твердого тела, аналитической механики и прикладной небесной механики. e-mail: a.a.pankratov@gmail.com