

Устойчивость и динамические характеристики одномерных элементов в конструкциях инструментов для распиловки материалов

© А.Ю. Карпачев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрено приложение одномерной модели к исследованию устойчивости и собственных колебаний предварительно напряженных конструктивных элементов режущих инструментов для определения допустимых режимов их применения. Подобные исследования также важны для использования метода гармонических коэффициентов влияния, когда изучается динамика сложной конструкции, и ее модель может быть представлена в виде нескольких взаимодействующих подсистем. Проанализирован элемент конструкции в виде плоского криволинейного стержня, жесткость которого в его первой главной плоскости во много раз превосходит жесткость во второй главной плоскости. Сформулирована задача о расчете частот и форм такой модели с учетом силовых факторов предварительного нагружения и ее конфигурации, включающая полную систему дифференциальных уравнений и выбранных граничных условий.

Ключевые слова: *устойчивость, частота, собственные колебания, криволинейный стержень, конструкции пил и фрез.*

Введение. Дисковый режущий инструмент с температурными компенсаторами можно конструировать из набора сегментов, представляющих собой тонкие криволинейные полосы. Их несущая способность обусловлена устойчивостью и динамическими свойствами элементов, имеющих большую жесткость в плоскости действия внешних сил и малую жесткость — во второй главной плоскости. При этом становится важным определение критических сил, действующих в плоскости инструмента, которые приводят к потере устойчивости плоской формы, сопровождающейся изгибом в плоскости малой жесткости сечения и одновременно кручением. Решение такой задачи возможно на основе одномерной модели [1], построенной с учетом выбранной схемы деформирования, физических соотношений [2–7] и линеаризованных уравнений равновесия [8], [9].

Кинематическая схема деформирования и физические соотношения. Рассмотрим стержневую модель, ось которой — плоская кривая и наибольшая жесткость переменных поперечных сечений совпадает с ее плоскостью x_1Ox_2 (рис. 1).

Геометрию оси такого стержня длиной L , проходящей через центр тяжести сечений стержня, в исходном (недеформированном) состоянии опишем вектором $\vec{r}^0 = \vec{r}^0(s)$, где s — текущая координата

дуги оси ($0 \leq s \leq L$), или в виде $x_i = x_i(s)$, $i=1, 2$. Свяжем с осью натуральный триэдр \bar{e}_i^0 , где \bar{e}_1^0 — единичный вектор касательной к оси стержня; \bar{e}_2^0 — единичный вектор главной нормали; \bar{e}_3^0 — единичный вектор бинормали. Соприкасающуюся плоскость примем совпадающей с плоскостью x_1Ox_2 и соответственно с плоскостью наибольшей жесткости поперечных сечений, имеющий две оси симметрии. Вектор полной кривизны оси стержня в исходном состоянии

$$\bar{\Omega}_0 = k\bar{e}_3^0,$$

где k — кривизна оси.

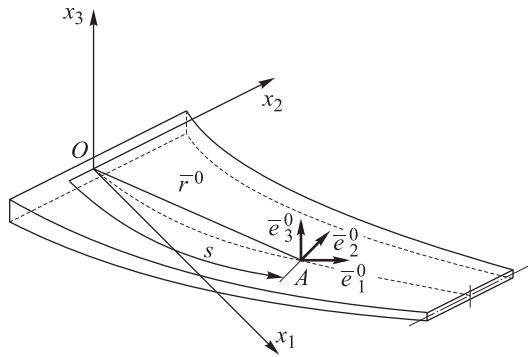


Рис. 1. Расчетная схема стержня в виде полосы

Считаем, что отношение высоты наибольшего из сечений к длине стержня намного меньше единицы. Для построения деформационных соотношений воспользуемся гипотезой Бернулли. При этом за перемещение точек оси стержня примем

$$\bar{u}(s) = u_3\bar{e}_3^0,$$

а угол поворота сечения обозначим

$$\bar{\vartheta}(s) = \varphi_\alpha\bar{e}_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2,$$

т. е. смещениями вдоль оси и главной нормали пренебрегаем, а также не учитываем поворот сечений вокруг бинормали. Триэдр некоторого сечения A займет новое положение \bar{e}_i , определяемое вектором \bar{r} , причем

$$\bar{e}_1 = \bar{e}_1^0 + \bar{\vartheta} \times \bar{e}_1^0 = \bar{e}_1^0 - \varphi_2\bar{e}_3^0. \quad (1)$$

Вместе с тем вектор \bar{e}_1 определяется соотношением

$$\bar{e}_1 = \bar{r}' = (\bar{r}^0 + u_3 \bar{e}_3^0)' = \bar{e}_1^0 + u_3' \bar{e}_3^0, \quad (2)$$

где $(...)' = \frac{\partial(...)}{\partial s}$.

Сравнивая выражения (1) и (2), получаем

$$u_3' = -\varphi_2. \quad (3)$$

С учетом малости значений смещений и поворотов вектор изменения кривизны можно представить в виде

$$\bar{\chi} = \bar{\mathcal{G}}' = (\varphi_1'' - k\varphi_2)\bar{e}_1 + (\varphi_2' + k\varphi_1)\bar{e}_2 = \delta_1 \bar{e}_1 + \delta_2 \bar{e}_2, \quad (4)$$

где δ_1 — кручение; δ_2 — изменение кривизны оси в результате деформации.

Полный вектор кривизны оси стержня в деформированном состоянии

$$\bar{\Omega} = \delta_1 \bar{e}_1 + \delta_2 \bar{e}_2 + k \bar{e}_3.$$

Соотношения (3), (4) представляют собой уравнения Клебша [8], преобразованные применительно к выбранной кинематической схеме деформирования плоского криволинейного стержня.

Считая поведение стержня в процессе деформирования упругим, связь изменения кривизны и кручения с крутящим и изгибающим моментами в сечении принимаем в виде [10]

$$E_\alpha J_\alpha \delta_\alpha = M_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (5)$$

где $E_\alpha J_\alpha$ — жесткости сечения на кручение и изгиб.

Нелинейные уравнения равновесия криволинейного стержня в виде тонкой полосы и их линеаризация. Для получения уравнений равновесия стержня выделим двумя сечениями, нормальными к его оси, элемент длиной ds , как показано на рис. 2, где внутренние силовые факторы левого торцевого сечения приведены к главному вектору \bar{Q} и главному моменту \bar{M} , правого торцевого сечения — $\bar{Q} + d\bar{Q}$ и $\bar{M} + d\bar{M}$. Считаем, что на элемент действует распределенная сила интенсивностью \bar{f}_3 и распределенный момент m_1 .

Тогда уравнения равновесия можно представить в векторном виде [11, 12]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial s} + \bar{f}_3 &= 0, \\ \frac{\partial \bar{M}}{\partial s} + \bar{e}_1 \times \bar{Q} + \bar{m}_1 &= 0. \end{aligned}$$

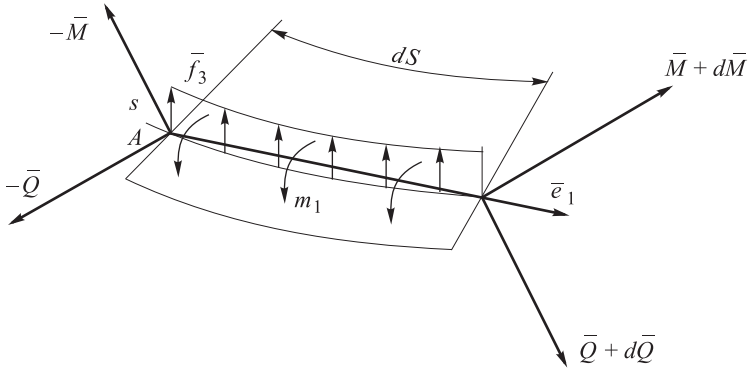


Рис. 2. Расчетная схема системы сил, действующих на элемент стержня

Проецируя эти уравнения на оси, связанные с натуральным триэдром деформированного состояния стержня, получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q_2}{\partial s} + kQ_1 - \delta_1 Q_3 &= 0, \\
 \frac{\partial Q_3}{\partial s} + \delta_1 Q_2 - \delta_2 Q_1 + f_3 &= 0, \\
 \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \delta_2 Q_3 - kQ_2 &= 0, \\
 \frac{\partial M_2}{\partial s} + kM_1 - \delta_1 M_3 - Q_3 &= 0, \\
 \frac{\partial M_3}{\partial s} + \delta_1 M_2 - \delta_2 M_1 + Q_2 &= 0, \\
 \frac{\partial M_1}{\partial s} + \delta_2 M_3 - kM_2 + m_1 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Для дальнейших преобразований допустим, что результирующие факторы, состоящие из факторов основного деформированного состояния (индекс «o») от предварительного нагружения стержня, и дополнительного (индекс «∂»), возникающие вследствие деформации относительно первого состояния, имеют вид

$$Q_i = Q_i^o + Q_i^\partial, \quad M_i = M_i^o + M_i^\partial.$$

Факторы дополнительного состояния считаем малыми по сравнению с соответствующими факторами основного состояния. Тогда, принимая во внимание, что $Q_3^o = M_2^o = M_1^o = 0$, систему (6) можно представить как

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_3^0}{\partial s} + \delta_1 Q_2^0 - \delta_2 Q_1^0 + f_3 &= 0, \\ \frac{\partial M_2^0}{\partial s} + kM_1^0 - \delta_1 M_3^0 - Q_3^0 &= 0, \\ \frac{\partial M_1^0}{\partial s} + \delta_2 M_3^0 - kM_2^0 + m_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Результат проведенных преобразований — возможность линеаризации исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений равновесия предварительно нагруженного плоского криволинейного стержня.

Формулировка задачи о собственных колебаниях и устойчивости предварительно нагруженной плоской криволинейной полосы. Исследование динамических характеристик пильного диска, имеющего вырезы и прорезы длиной, соизмеримой с длиной его радиуса (рис. 3), можно проводить с использованием одномерной модели.

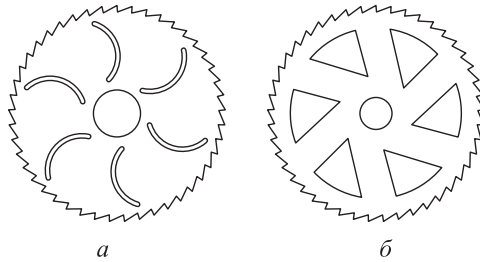


Рис. 3. Конструктивные схемы фрез и пил с прорезями, близкими к радиальным (а), и с разделенной кольцевой и центральной зонами (б)

Чтобы получить уравнения движения элемента, вырезанного из стержня (см. рис. 2), найдем распределенную силу инерции интенсивностью

$$\bar{f}_3 = -\rho F \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \bar{e}_3^0$$

и распределенный момент сил инерции, связанный с вращением масс относительно оси,

$$m_1 = \rho J_p \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2},$$

где ρ — плотность материала; F — площадь сечения; J_p — полярный момент инерции; t — время.

С учетом соотношений (3), (5), (7) полная система дифференциальных уравнений, описывающих колебания предварительно нагруженного плоского криволинейного стержня, имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_3}{\partial s} &= -\varphi_2, \\
 \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} &= \frac{M_2^\circ}{E_2 J_2} - k\varphi_1, \\
 \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} &= \frac{M_1^\circ}{E_1 J_1} + k\varphi_2, \\
 \frac{\partial Q_3^\circ}{\partial s} &= -Q_2^\circ \frac{M_1^\circ}{E_1 J_1} + Q_1^\circ \frac{M_2^\circ}{E_2 J_2} + \rho F \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial M_2^\circ}{\partial s} &= -kM_1^\circ + M_3^\circ \frac{M_1^\circ}{E_1 J_1} + Q_3^\circ, \\
 \frac{\partial M_1^\circ}{\partial s} &= -M_3^\circ \frac{M_2^\circ}{E_2 J_2} + kM_2^\circ - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

При дальнейшем преобразовании представим кинематические и силовые функции как [13]

$$\begin{aligned}
 u_3 &= \tilde{u}_3 L \Phi, \quad \varphi_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha \Phi, \\
 Q_3^\circ &= \frac{EJ}{L^2} \tilde{Q}_3^\circ \Phi, \quad M_\alpha^\circ = \frac{EJ}{L} \tilde{M}_\alpha^\circ \Phi,
 \end{aligned}$$

где

$$\Phi = \exp \left[i \left(\tilde{\omega} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F_0 L^4}} \right) t \right] \tag{9}$$

($\tilde{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho F_0 L^4}{EJ}}$ — безразмерная частота (ω — частота колебаний);

EJ и F_0 — жесткость на изгиб и площадь поперечного сечения стержня). Обозначим значком « \sim » безразмерные функции, зависящие от параметра дуговой координаты оси, $\tilde{s} = s/L$, $\tilde{k} = kL$, кроме того, введем в рассмотрение параметры механических свойств и геометрии сечений стержня:

$$\tilde{\xi}_\alpha = \frac{EJ}{E_\alpha J_\alpha}, \quad \tilde{\xi}_3 = \frac{F}{F_0}, \quad \tilde{\xi}_4 = \frac{J_p}{F_0 L^2}, \tag{10}$$

а также функции для описания предварительного нагружения

$$Q_a^o = \frac{EJ}{L^2} \tilde{Q}_a^o, \quad M_3^o = \frac{EJ}{L} \tilde{M}_3^o. \quad (11)$$

С учетом формул (10), (11) уравнения (8) представим в виде системы уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}_3}{d\tilde{s}} &= -\tilde{\varphi}_2, \\ \frac{d\tilde{\varphi}_2}{d\tilde{s}} &= \tilde{\xi}_2 \tilde{M}_2^o - \tilde{k} \tilde{\varphi}_1, \\ \frac{d\tilde{\varphi}_1}{d\tilde{s}} &= \tilde{\xi}_1 \tilde{M}_1^o + \tilde{k} \tilde{\varphi}_2, \\ \frac{d\tilde{Q}_3^o}{d\tilde{s}} &= -\tilde{\xi}_1 \tilde{Q}_2^o \tilde{M}_1^o + \tilde{\xi}_2 \tilde{Q}_1^o \tilde{M}_2^o - \tilde{\xi}_3 \tilde{\omega}^2 \tilde{u}_3, \\ \frac{d\tilde{M}_2^o}{d\tilde{s}} &= -(\tilde{k} - \tilde{\xi}_1 \tilde{M}_3^o) \tilde{M}_1^o + \tilde{Q}_3^o, \\ \frac{d\tilde{M}_1^o}{d\tilde{s}} &= -(\tilde{\xi}_2 \tilde{M}_3^o - \tilde{k}) \tilde{M}_2^o + \tilde{\xi}_4 \tilde{\omega}^2 \tilde{\varphi}_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, с использованием соотношений (9)–(11) выполнено разделение переменных и обезразмеривание силовых и кинематических функций, что позволило получить полную систему дифференциальных уравнений свободных колебаний предварительно нагруженного плоского криволинейного стержня, имеющего по длине переменные геометрические характеристики. Расчет частот и форм собственных колебаний стержня можно провести на основе решения задачи о собственных значениях, предварительно сформулировав и решив краевую задачу. При этом, выбрав конкретные геометрические параметры модели, необходимо определить факторы основного нагружения, входящие в систему (12), а также задать граничные условия. Искомые значения частот обращают в нуль определитель системы линейных алгебраических уравнений, получаемых в ходе решения краевой задачи, при выполнении ее граничных условий. Отметим, что для расчета конструкций инструментов сложных конфигураций на основе одномерной модели, как правило, требуется провести дополнительные исследования по выбору граничных условий и определить исходное напряженно-деформированное состояние. В связи с этим в дальнейшем приведены расчеты наиболее распространенных несущих элементов корпуса — консольно закрепленных прямолинейных и криволинейных полос, свободный конец которых нагружен произвольно ориентированной силой \bar{P} , лежащей в их плоскости. При этом граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{s} = 0: \quad & \tilde{u}_3 = 0, \quad \tilde{\varphi}_2 = 0, \quad \tilde{\varphi}_1 = 0, \\ \tilde{s} = 1: \quad & \tilde{Q}_3 = \bar{P}\bar{e}_3, \quad \tilde{M}_2^\circ = 0, \quad \tilde{M}_1^\circ = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$.

Использование полученной системы уравнений при решении задачи о собственных значениях позволяет путем изменения формы предложенной модели создавать конструкции с требуемыми динамическими характеристиками.

При значении $\tilde{\omega} = 0$ систему дифференциальных уравнений (12) можно использовать для определения критической силы при потере устойчивости плоской формы равновесия. В этом случае в систему входит меньшее число уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\varphi}_2}{d\tilde{s}} &= \tilde{\xi}_2 \tilde{M}_2^\circ - \tilde{k} \tilde{\varphi}_1, \\ \frac{d\tilde{\varphi}_1}{d\tilde{s}} &= \tilde{\xi}_1 \tilde{M}_1^\circ + \tilde{k} \tilde{\varphi}_2, \\ \frac{d\tilde{Q}_3^\circ}{d\tilde{s}} &= -\tilde{\xi}_1 \tilde{Q}_2^\circ \tilde{M}_1^\circ + \tilde{\xi}_2 \tilde{Q}_1^\circ \tilde{M}_2^\circ, \\ \frac{d\tilde{M}_2^\circ}{d\tilde{s}} &= -(\tilde{k} - \tilde{\xi}_1 \tilde{M}_3^\circ) \tilde{M}_1^\circ + \tilde{Q}_3^\circ, \\ \frac{d\tilde{M}_1^\circ}{d\tilde{s}} &= -(\tilde{\xi}_2 \tilde{M}_3^\circ - \tilde{k}) \tilde{M}_2^\circ. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{s} = 0: \quad & \tilde{\varphi}_2 = 0, \quad \tilde{\varphi}_1 = 0; \\ \tilde{s} = 1: \quad & \tilde{Q}_3 = \bar{P}\bar{e}_3, \quad \tilde{M}_2^\circ = 0, \quad \tilde{M}_1^\circ = 0. \end{aligned}$$

Искомое значение критической силы, как и при определении собственных частот, обращает в нуль определитель системы линейных алгебраических уравнений, получаемых в ходе решения краевой задачи.

Для применения изложенного в дальнейшем метода расчета приведем системы (12) и (14) к виду векторного уравнения

$$\frac{d}{d\tilde{s}} \{Z\} = [A] \{Z\}, \quad (15)$$

где для системы (12)

$$\begin{aligned} \{Z\} &= (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)^T; \\ z_1 &= \tilde{u}_3; \quad z_2 = \tilde{\varphi}_2; \quad z_3 = \tilde{\varphi}_1; \quad z_4 = \tilde{Q}_3^\circ; \quad z_5 = \tilde{M}_2^\circ; \quad z_6 = \tilde{M}_1^\circ; \end{aligned}$$

$[A]$ — матрица (6×6) переменных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0, \quad a_{12} = -1, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 0, \quad a_{15} = 0, \quad a_{16} = 0, \\
 a_{21} &= 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -\tilde{k}, \quad a_{24} = 0, \quad a_{25} = \tilde{\xi}_2, \quad a_{26} = 0, \\
 a_{31} &= 0, \quad a_{32} = \tilde{k}, \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{35} = 0, \quad a_{36} = \tilde{\xi}_1, \quad (16) \\
 a_{41} &= -\tilde{\xi}_1 \tilde{\omega}^2, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = 0, \quad a_{45} = \tilde{\xi}_2 \tilde{Q}_1^0, \quad a_{46} = -\tilde{\xi}_1 \tilde{Q}_2^0, \\
 a_{51} &= 0, \quad a_{52} = -1, \quad a_{53} = 0, \quad a_{54} = 1, \quad a_{55} = 0, \quad a_{56} = -(\tilde{k} - \tilde{\xi}_1 \tilde{M}_3^0), \\
 a_{61} &= 0, \quad a_{62} = 0, \quad a_{63} = \tilde{\xi}_4 \tilde{\omega}^2, \quad a_{64} = 0, \quad a_{65} = -(\tilde{\xi}_2 \tilde{M}_3^0 - \tilde{k}), \quad a_{66} = 0;
 \end{aligned}$$

для системы (14)

$$\{Z\} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T; \quad z_1 = \tilde{\varphi}_2; \quad z_2 = \tilde{\varphi}_1; \quad z_3 = \tilde{Q}_3^0; \quad z_4 = \tilde{M}_2^0; \quad z_5 = \tilde{M}_1^0;$$

$[A]$ — матрица (5×5) переменных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0, \quad a_{12} = -\tilde{k}, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = \tilde{\xi}_2, \quad a_{15} = 0, \\
 a_{21} &= \tilde{k}, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{25} = \tilde{\xi}_1, \\
 a_{31} &= 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = \tilde{\xi}_2 \tilde{Q}_1^0, \quad a_{35} = -\tilde{\xi}_1 \tilde{Q}_2^0, \quad (17) \\
 a_{41} &= 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 1, \quad a_{44} = 0, \quad a_{45} = -(\tilde{k} - \tilde{\xi}_1 \tilde{M}_3^0), \\
 a_{51} &= 0, \quad a_{52} = 0, \quad a_{53} = 0, \quad a_{54} = -(\tilde{\xi}_2 \tilde{M}_3^0 - \tilde{k}), \quad a_{55} = 0.
 \end{aligned}$$

Постановка и решение задач о собственных колебаниях и устойчивости в частных случаях, когда рассматривается прямолинейная полоса ($\tilde{k} = 0$) с переменной и постоянной шириной, приведены в работах [14–17], где на их основе предложен эффективный метод для разработки рациональных конструктивных схем закрепления режущих элементов ленточнопильных станков.

Расчет устойчивости и частот свободных колебаний несущих элементов корпуса инструмента в виде полос, нагруженных сосредоточенной силой. Вначале рассчитаем устойчивость несущих элементов конструкции инструментов (см. рис. 3). Для этого определим исходные данные для расчета. Будем считать, что элемент конструкции в виде полосы лежит в плоскости $x_1 O x_2$ и геометрия его оси задана функциями

$$x_1 = x_1(\tilde{s}), \quad x_2 = x_2(\tilde{s}), \quad 0 \leq \tilde{s} \leq 1, \quad \tilde{s} = s/L,$$

где s — текущая дуговая координата; L — длина оси полосы. Полагаем, что один ее конец при $\tilde{s} = 0$ жестко защемлен, а к другому при $\tilde{s} = 1$ приложена сила \bar{P} , лежащая в плоскости наибольшей жесткости ($x_1 O x_2$).

Проведем расчет для полосы прямолинейной формы и в случае, когда ее ось имеет вид дуги окружности радиусом R , причем $L = R$, т. е. кривизна ее осевой линии $\tilde{k} = 1$ (рис. 4). Принимаем, что поперечные сечения полосы имеют постоянную прямоугольную конфигурацию, толщину h и ширину b . При этом значение $\tilde{\xi}_1 = 0,65$, $\tilde{\xi}_2 = \tilde{\xi}_3 = 1$, $\tilde{\xi}_4 = 0,04$ [9].

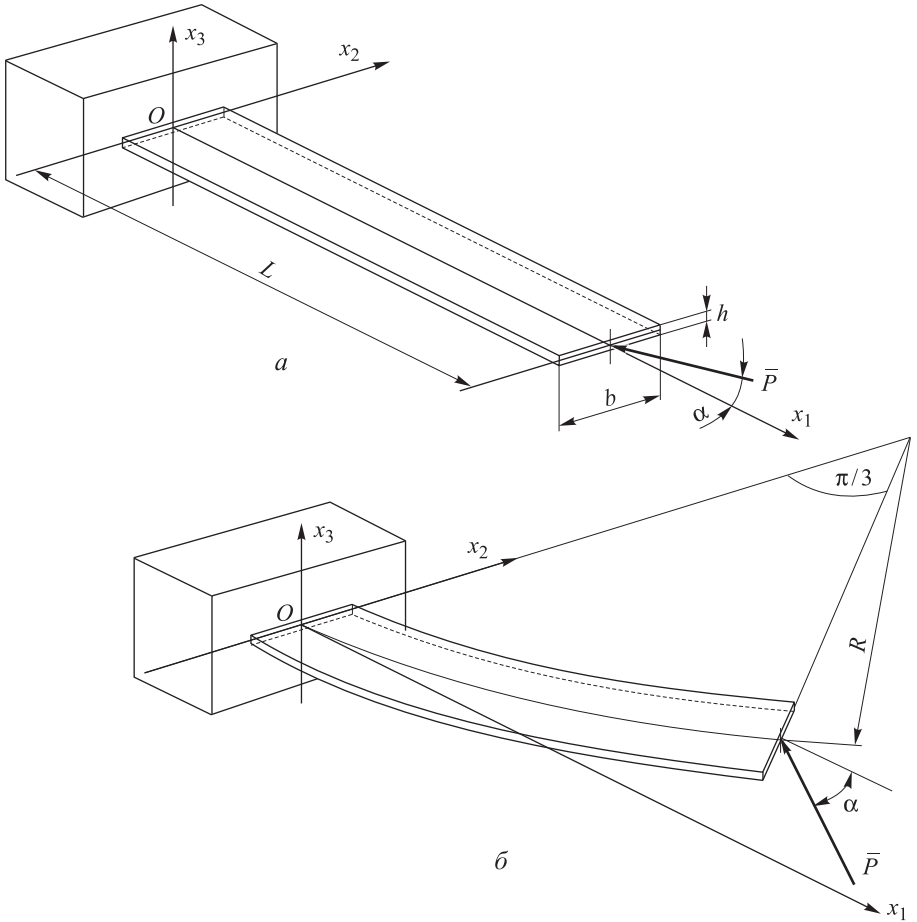


Рис. 4. Расчетные схемы прямолинейной (а) и криволинейной (постоянного радиуса) (б) полос

С учетом введенных безразмерных функций для прямолинейной полосы $\tilde{x}_1 = \tilde{s}$, $\tilde{x}_2 = 0$, для криволинейной $\tilde{x}_1 = \sin(\tilde{s})$, $\tilde{x}_2 = \cos(\tilde{s})$, а составляющие приложенной к полосе силы

$$\tilde{P}_1 = \tilde{P} \cos(\alpha), \tilde{P}_2 = \tilde{P} \sin(\alpha).$$

Факторы предварительного нагружения полос \tilde{Q}_1^0 , \tilde{Q}_2^0 , \tilde{M}_3^0 , входящие в выражения (15), (17), вычислим по формулам

$$\tilde{Q}_1^0 = \tilde{P} \bar{e}_1^0, \quad \tilde{Q}_2^0 = \tilde{P} \bar{e}_2^0,$$

$$\tilde{M}_3^0 = (\tilde{r} \times \tilde{P}) \bar{e}_3^0 = (\tilde{x}_1^1 - \tilde{x}_1) \tilde{P}_2 - (\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_2) \tilde{P}_1,$$

где $\tilde{x}_1^1, \tilde{x}_2^1$ — безразмерные координаты точки приложения силы. Для расчета устойчивости прямолинейной полосы коэффициенты матрицы (17) запишем в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 1, \quad a_{15} = 0, \\ a_{21} &= 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{25} = 0,65\tilde{\xi}, \\ a_{31} &= 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = \tilde{\xi}\tilde{P}_1, \quad a_{35} = -0,65\tilde{\xi}\tilde{P}_2, \\ a_{41} &= 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 1, \quad a_{44} = 0, \quad a_{45} = 0,65\tilde{\xi}(\tilde{x}_1^1 - \tilde{x}_1)\tilde{P}_2, \\ a_{51} &= 0, \quad a_{52} = 0, \quad a_{53} = 0, \quad a_{54} = -\tilde{\xi}(\tilde{x}_1^1 - x_1)\tilde{P}_2, \quad a_{55} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

а для криволинейной —

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, \quad a_{12} = -1, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = \tilde{\xi}, \quad a_{15} = 0, \\ a_{21} &= 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{25} = 0,65\tilde{\xi}, \\ a_{31} &= 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = \tilde{\xi}(e_{11}^0\tilde{P}_1 + e_{12}^0\tilde{P}_2), \\ a_{35} &= -0,65\tilde{\xi}(e_{21}^0\tilde{P}_1 + e_{22}^0\tilde{P}_2), \\ a_{41} &= 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = 1, \quad a_{44} = 0, \\ a_{45} &= 0,65\tilde{\xi}[(\tilde{x}_1^1 - \tilde{x}_1)\tilde{P}_2 - (\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_2)\tilde{P}_1] - 1, \\ a_{51} &= 0, \quad a_{52} = 0, \quad a_{53} = 0, \\ a_{54} &= 1 - 0,65\tilde{\xi}[(\tilde{x}_1^1 - \tilde{x}_1)\tilde{P}_2 - (\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_2)\tilde{P}_1], \quad a_{55} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

($\tilde{\xi} = 1$).

Поскольку коэффициенты определяемые формулами (18), (19), переменны, решение задачи целесообразно реализовать численным методом. В рассматриваемом случае воспользуемся методом начальных параметров (НП), принимая во внимание граничные условия (13), запишем определитель системы алгебраических уравнений как

$$\|d_{ij}\|, \quad i = 1, 2, 3, \quad (20)$$

в котором

$$d_{1i} = y_3 - (\tilde{P}_1 e_{22} - \tilde{P}_2 e_{21}) y_1 - (\tilde{P}_1 e_{12} + \tilde{P}_2 e_{11}) y_2;$$

$$d_{2i} = y_4; \quad d_{3i} = y_5,$$

где e_{ij} , $i, j = 1, 2$, — направляющие косинусы ортов \bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0 при $\tilde{s} = 1$; y_1, y_2, \dots, y_5 — компоненты вектора состояния $\{y_{2+i}\}_1$ после каждого i -го интегрирования ($i = 1, 2, 3$) системы дифференциальных уравнений с граничными условиями соответственно.

$$\{y_3\}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \{y_4\}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \{y_5\}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задавая значения \tilde{P} заведомо меньше критического значения, вычисляем определитель (20), причем важно не значение, а его знак. Далее, как и при решении задач о собственных значениях, задавая приращение силе и повторяя процедуру, определим значение, при котором происходит смена знака определителя, а затем уточним критическое значение силы, соответствующее нулевому значению определителя.

На рис. 5. представлены результаты расчета зависимости критической силы от угла, под которым она приложена к прямолинейной полосе. Значение $\tilde{P}_2 = 2,47$ при $\tilde{P}_1 = 0$ соответствует критической силе в классической задаче Эйлера о потере устойчивости стержня при сжатии осевой силой. Результаты расчета при $\tilde{P}_2 = 0$, приведенного в работе [10], полностью совпадают с представленными на рис. 5 при $\tilde{P}_1 = 4,98$. Поэтому поставленную задачу можно рассматривать в качестве тестовой для проверки достоверности построенного алгоритма решения. При расчетах прямолинейной полосы переменной ширины достаточно задать в соотношениях (18)

$$\tilde{\xi}(\tilde{s}) = 1/\tilde{f}(\tilde{s}),$$

где $\tilde{f}(\tilde{s})$ — функция, характеризующая изменение ширины полосы вдоль оси. Например, при линейном изменении ширины в соответствии с законом

$$\tilde{f}(\tilde{s}) = 1,3 - 0,6\tilde{s}$$

наблюдается повышение устойчивости полосы, что следует из сопоставления построенной зависимости (штриховая линия) с рассмот-

ренным ранее расчетом. Для криволинейной полосы критические значения силы показаны на рис. 6 как абсциссы точек пересечения кривых с осью абсцисс. Графики, представленные на этом рисунке, соответствуют значениям низших частот свободных колебаний $\tilde{\omega}$ в зависимости от значений и направления приложенной силы.

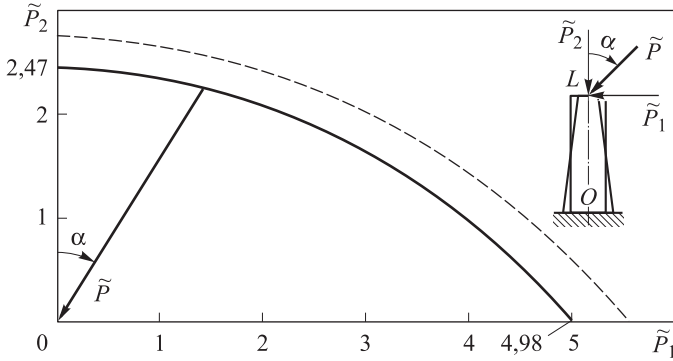


Рис. 5. Зависимость силы при потере устойчивости полосы (——— ширина постоянная, - - - - - переменная) от угла α

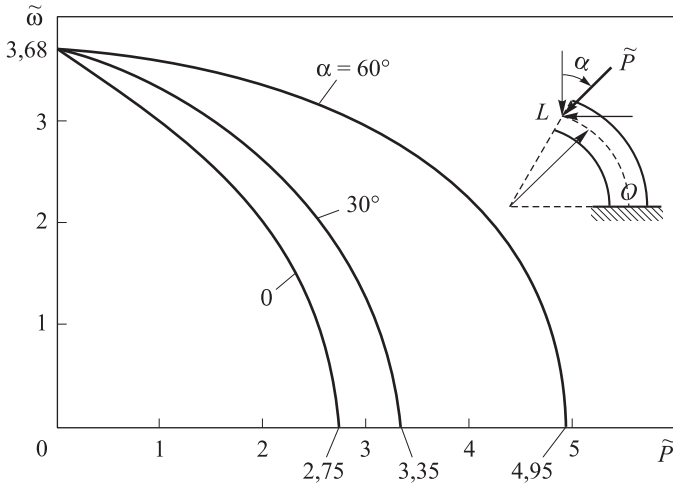


Рис. 6. Зависимости частот собственных колебаний полосы от приложенной силы

При проведении расчетов частот необходимо представить коэффициенты (16) в виде

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0, & a_{12} &= -1, & a_{13} &= 0, & a_{14} &= 0, & a_{15} &= 0, & a_{16} &= 0, \\
 a_{21} &= 0, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= -1, & a_{24} &= 0, & a_{25} &= 1, & a_{26} &= 0, \\
 a_{31} &= 0, & a_{32} &= 1, & a_{33} &= 0, & a_{34} &= 0, & a_{35} &= 0, & a_{36} &= 0,65, \\
 a_{41} &= -\tilde{\omega}^2, & a_{42} &= 0, & a_{43} &= 0, & a_{44} &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{45} &= (e_{11}^0 \tilde{P}_1 + e_{12}^0 \tilde{P}_2), \quad a_{46} = -0,65(e_{21}^0 \tilde{P}_1 + e_{22}^0 \tilde{P}_2), \\
 a_{51} &= 0, \quad a_{52} = 0, \quad a_{53} = 0, \\
 a_{54} &= 1, \quad a_{55} = 0, \quad a_{56} = 0,65[(\tilde{x}_1^1 - \tilde{x}_1)\tilde{P}_2 - (\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_2)\tilde{P}_1] - 1, \\
 a_{61} &= 0, \quad a_{62} = 0, \quad a_{63} = 0,04\tilde{\omega}^2, \quad a_{64} = 0, \\
 a_{65} &= 1 - 0,65[(\tilde{x}_1^1 - \tilde{x}_1)\tilde{P}_2 - (\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_2)\tilde{P}_1], \quad a_{66} = 0.
 \end{aligned}$$

Затем для силы меньше критической, задав значение $\tilde{\omega}$ заведомо меньшее собственной частоты, согласно методу НП [18], формируем определитель, аналогичный (20), в котором

$$\begin{aligned}
 d_{1i} &= y_4 - (\tilde{P}_1 e_{22} - \tilde{P}_2 e_{21})y_2 - (\tilde{P}_1 e_{12} + \tilde{P}_2 e_{11})y_3; \\
 d_{2i} &= y_5, \quad d_{3i} = y_6,
 \end{aligned}$$

где e_{ij} , $i, j = 1, 2$, — направляющие косинусы ортов \bar{e}_1^0, \bar{e}_2^0 при $\tilde{s} = 1$; y_1, y_2, \dots, y_6 — компоненты вектора состояния $\{y_{3+i}\}_1$ после каждого интегрирования ($i = 1, 2, 3$) системы дифференциальных уравнений с граничными условиями соответственно

$$\{y_4\}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \{y_5\}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \{y_6\}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель и устанавливая его знак путем изменения, находим значение искомой частоты, соответствующее нулевому значению определителя.

Заключение. Полученные в настоящей работе результаты позволяют исследовать формы несущих элементов с точки зрения их устойчивости и динамических свойств. Изложенный метод расчета можно эффективно использовать для определения оптимальных параметров и предельно допустимых режимов эксплуатации конструкций с рассмотренными несущими элементами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лурье А.И. О малых деформациях криволинейных стержней. *Тр. ЛПИ*, 1941, № 3, с. 47–54.
- [2] Алексеев А.Е. Нелинейные уравнения упругого деформирования пластин. *ПМТФ*, 2001, т. 42, № 3, с. 135–145.

- [3] Карпачев А.Ю. Исследование устойчивости режущего полотна ленточно-пильного станка в зависимости от конструктивной схемы его закрепления. *Известия вузов. Машиностроение*, 2000, № 1–2, с. 41–43.
- [4] Карпачев А.Ю. Свободные колебания тонкого диска с радиальными прорезами по периферии. *Известия вузов. Машиностроение*, 2012, № 6, с. 3–6.
- [5] Карпачев А.Ю. Влияние скорости резания на устойчивость ленточной пилы. *Науч. тр. МГУЛ*, 2011, вып. 353, с. 52–57.
- [6] Karpachev A.Yu. Stability of plane equilibrium of mills in nonuniform heating. *Russian Engineering Research*, 2009, vol. 29, no. 3, pp. 272–275.
- [7] Светлицкий В.А. *Строительная механика машин. Механика стержней. Динамика*. Т. 2. Москва, Физматлит, 2009, 383 с.
- [8] Карпачев А.Ю. Проблема собственных значений в прогрессивных технологиях проектирования режущих полотен. *Научно-технические технологии*, 2001. № 3, т. 2, с. 52–57.
- [9] Alekseev A.E. Linearized equations of nonlinear elastic deformation of thin plates. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 1, pp. 133–139.
- [10] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001, 590 с.
- [11] Кирхгоф Г. *Механика. Лекции по математической физике*. Москва, КомКнига, 2006, 390 с.
- [12] Ляв А. *Математическая теория упругости*. Москва; Ленинград, ОНТИ, 1935, 674 с.
- [13] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. Москва, Наука, Физматлит, 1996, 368 с.
- [14] Карпачев А.Ю. Устойчивость круглых пил с компенсаторами. *Науч. тр. МГУЛ*, 2011, вып. 353, с. 61–65.
- [15] Карпачев А.Ю. *Определение низших частот свободных колебаний статически нагруженной тонкой упругой полосы*. Деп. в ВИНТИ. Москва, 1999, № 1861-B99, 8 с.
- [16] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. *Теория колебаний*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 271 с.
- [17] Алфутов Н.А., Колесников К.С. *Устойчивость движения и равновесия*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 252 с.
- [18] Карпачев А.Ю. Устойчивость и колебания полос произвольной конфигурации. *Необратимые процессы в природе и технике. Тр. Седьмой Всерос. конф.* Москва, 29–31 января 2013 г. Ч. II. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, с. 111–114.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Карпачев А.Ю. Устойчивость и динамические характеристики одномерных элементов в конструкциях инструментов для распиловки материалов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1143.html>

Карпачев Андрей Юрьевич родился в 1955 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1978 г. Канд. физ.-мат. наук. Доцент кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор свыше 50 работ в области динамики и прочности. e-mail: a-karpachev@mail.ru