

## УПРУГИЙ ПОЛЫЙ ЦИЛИНДР ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЕГУЩЕЙ И ФОНОВОЙ НАГРУЗОК

© В.В. Дубинин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*В работе решена задача об определении напряженно-деформированного состояния упругого полого цилиндра, нагруженного одновременно нагрузкой, движущейся с постоянной скоростью  $V$  (бегущей), и приложенной радиальной (фоновой) нагрузкой. Нагружение происходит внутри полости цилиндра. Ввиду линейности задач их общее решение получено с использованием метода суперпозиций решений при раздельном нагружении. Выбран прямоугольный бегущий импульс. Проведены расчеты напряженно-деформационного состояния цилиндра, получены зависимости его параметров от ширины прямоугольного импульса, скорости движения подвижной нагрузки для разных параметров цилиндра. Получены зависимости общей задачи параметров состояния реальной установки суперпозицией решений для этих нагрузок.*

**Ключевые слова:** упругий полый цилиндр, движущаяся нагрузка, фоновая нагрузка, суперпозиция решений.

**Введение.** Задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) полого упругого цилиндра под действием бегущей и «фоновой» нагрузок ставится при расчете прочности баллистических установок (легкогазовых пушек) [1]. Метод решения задачи о НДС цилиндра при нагружении бегущей нагрузкой представлен в работе [2]. Для практических выводов о проектировании стволов баллистических установок были проведены расчеты и подробно проанализированы зависимости НДС ствола с учетом влияния ширины  $2c$  прямоугольного импульса, скорости  $V$  его движения на геометрическую характеристику ствола (цилиндра)  $b/a$  ( $b, a$  — наружный и внутренний радиусы цилиндра).

При выборе параметров ствола были определены опасные сечения с точки зрения появления пластических деформаций, которые недопустимы, поскольку при повторных нагружениях они могут расти [3]. Необходим также учет характера напряженного состояния сечений цилиндра. Задача для подвижной нагрузки решена в подвижных координатах, движущихся вместе с нагрузкой с использованием интегрального преобразования Фурье.

**Задача 1.** Граничные условия задачи в подвижной системе координат  $r, \theta, z$  ( $r$  — радиальная,  $\theta$  — окружная,  $z$  — осевая координаты) имеют вид при  $r = a$

$$\sigma_r = -p(z), \quad \tau = 0,$$

при  $r = b$

$$\sigma_r = \tau = 0.$$

$$p(z) = \begin{cases} P & \text{при } |z| \leq c, \\ 0 & \text{при } |z| > c \end{cases}$$

( $p(z)$  — давление в прямоугольном импульсе).

Применив преобразование Фурье для функций радиального перемещения  $u$ , объемной деформации  $\Theta$ , радиального напряжения  $\sigma_r$ , касательного напряжения  $\tau$ , получим решение в виде

$$u = \frac{2Pa}{\pi G} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} \left\{ -\varepsilon \left[ \Delta_A I_1 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) + \Delta_B K_1 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) \right] + \left[ \Delta_C I_1 \left( \gamma \eta \frac{r}{a} \right) - \Delta_D K_1 \left( \gamma \eta \frac{r}{a} \right) \right] \right\} \sin \left( \eta \frac{c}{a} \right) \cos \left( \eta \frac{z}{a} \right) d\eta,$$

$$\Theta = \frac{2P\varepsilon_1}{\pi G} \int_0^\infty \frac{\eta}{\Delta} \left\{ \Delta_A I_0 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) - \Delta_B K_0 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) \right\} \sin \left( \eta \frac{c}{a} \right) \cos \left( \eta \frac{z}{a} \right) d\eta,$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{2P}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} \left\{ -\Delta_A \left[ (1 + \gamma^2) \eta I_0 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) - \frac{2\varepsilon}{\frac{r}{a}} I_1 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) \right] + \right. \\ & + \Delta_B \left[ \eta (1 + \gamma^2) K_0 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) + \frac{2\varepsilon}{\frac{r}{a}} K_1 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) \right] + \\ & + 2\Delta_C \left[ \eta \gamma I_0 \left( \gamma \eta \frac{r}{a} \right) - \frac{I_1 \left( \gamma \eta \frac{r}{a} \right)}{\frac{r}{a}} \right] + \\ & \left. + 2\Delta_D \left[ \eta \gamma K_0 \left( \gamma \eta \frac{r}{a} \right) + \frac{K_1 \left( \gamma \eta \frac{r}{a} \right)}{\frac{r}{a}} \right] \right\} \sin \left( \eta \frac{c}{a} \right) \cos \left( \eta \frac{z}{a} \right) d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{2P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta}{\Delta} \left\{ (1 + \gamma^2) \left[ -\Delta_C I_1 \left( \gamma \eta \frac{r}{a} \right) + \Delta_D K_1 \left( \gamma \eta \frac{r}{a} \right) \right] + \right. \\ & \left. + 2\varepsilon \left[ \Delta_A I_1 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) + \Delta_B K_1 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) \right] \right\} \sin \left( \eta \frac{c}{a} \right) \sin \left( \eta \frac{z}{a} \right) d\eta. \end{aligned} \quad (1)$$

Определитель системы

$$\Delta = F_1(a)\Delta_A - F_2(a)\Delta_B - F_3(a)\Delta_C + F_4(a)\Delta_D.$$

При этом

$$\Delta_A = F_2(b)x_1 + F_3(b)x_2 - F_4(b)x_3,$$

$$\Delta_B = F_1(b)x_1 + F_3(b)x_4 - F_4(b)x_5,$$

$$(x_1 = f_3(a)f_4(b) - f_4(a)f_3(b); \quad x_2 = f_2(a)f_4(b) - f_4(a)f_2(b); \quad x_3 = f_2(a)f_3(b) - f_3(a)f_2(b)),$$

$$\Delta_C = F_1(b)x_2 - F_2(b)x_4 - F_4(b)x_6, \quad (2)$$

$$(x_4 = f_1(a)f_4(b) - f_4(a)f_1(b); \quad x_5 = f_1(a)f_3(b) - f_3(a)f_1(b)),$$

$$\Delta_D = F_1(b)x_3 - F_2(b)x_5 - F_3(b)x_6$$

$$(x_6 = f_1(a)f_2(b) - f_2(a)f_1(b)).$$

Здесь

$$F_1(a) = \eta \left[ (1 + \gamma^2) \eta I_0(\varepsilon \eta) - 2\varepsilon I_1(\varepsilon \eta) \right];$$

$$F_2(a) = \eta \left[ (1 + \gamma^2) \eta K_0(\varepsilon \eta) + 2\varepsilon K_1(\varepsilon \eta) \right];$$

$$F_3(a) = 2\eta \left[ \gamma \eta I_0(\gamma \eta) - I_1(\gamma \eta) \right];$$

$$F_4(a) = -2\eta \left[ \gamma \eta K_0(\gamma \eta) + K_1(\gamma \eta) \right]; \quad (3)$$

$$F_1(b) = (1 + \gamma^2) \eta I_0 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right) - 2\varepsilon \frac{a}{b} I_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right);$$

$$F_2(b) = (1 + \gamma^2) \eta K_0 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right) + 2\varepsilon \frac{a}{b} K_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right);$$

$$F_3(b) = 2 \left[ \gamma \eta I_0 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) - \frac{a}{b} I_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) \right];$$

$$\begin{aligned}
 F_4(b) &= -2 \left[ \gamma \eta K_0 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) + \frac{a}{b} K_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) \right]; \\
 f_1(a) &= 2\varepsilon I_1(\varepsilon \eta); \\
 f_2(a) &= -2\varepsilon K_1(\varepsilon \eta); \\
 f_3(a) &= -(1 + \gamma^2) I_1(\gamma \eta); \\
 f_4(a) &= -(1 + \gamma^2) K_1(\gamma \eta); \\
 f_1(b) &= 2\varepsilon I_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right); \\
 f_2(b) &= -2\varepsilon K_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right); \\
 f_3(b) &= -(1 + \gamma^2) I_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right); \\
 f_4(b) &= -(1 + \gamma^2) K_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right); \\
 x_1 &= (1 + \gamma^2)^2 \left[ I_1(\gamma \eta) K_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) - K_1(\gamma \eta) I_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) \right]; \\
 x_2 &= 2\varepsilon (1 + \gamma^2) \left[ K_1(\varepsilon \eta) K_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) - K_1(\gamma \eta) K_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right) \right]; \\
 x_3 &= 2\varepsilon (1 + \gamma^2) \left[ K_1(\varepsilon \eta) I_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) - I_1(\gamma \eta) K_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right) \right]; \\
 x_4 &= -2\varepsilon (1 + \gamma^2) \left[ I_1(\varepsilon \eta) K_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) - K_1(\gamma \eta) I_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right) \right]; \\
 x_5 &= -2\varepsilon (1 + \gamma^2) \left[ I_1(\varepsilon \eta) I_1 \left( \gamma \eta \frac{b}{a} \right) - I_1(\gamma \eta) I_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right) \right]; \\
 x_6 &= -4\varepsilon^2 \left[ I_1(\varepsilon \eta) K_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right) - K_1(\varepsilon \eta) I_1 \left( \varepsilon \eta \frac{b}{a} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3}$$

В формулах (1)–(3) обозначено:  $I_0, K_0, I_1, K_1$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков;  $\eta$  — параметр преобразования Фурье.

Данные для различных зависимостей параметров НДС получены с помощью пакета расчетных программ. Необходимо было установить наиболее опасное сечение цилиндра, в котором возможен переход материала в пластическое состояние. Ниже приведены некоторые результаты расчетов. При построении описанных далее зависимостей определялись НДС для ряда точек построенных кривых. Все расчетные зависимости позволяют проводить конструкторские расчеты по выбору оптимального профиля ствола баллистической установки.

Появление пластических деформаций в сечениях (точках) цилиндра-ствола описывается равенством

$$\sigma_i = \sigma_s \text{ или } \frac{\sigma_i}{\sigma_s} = 1,$$

где  $\sigma_i$  — интенсивность напряжений в опасных точках цилиндра;  $\sigma_s$  — предел текучести материала конструкции.

Параметры скорости  $\varepsilon$  и  $\gamma$  определяются следующей зависимостью:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{1}{C_1^2}(1 - \gamma^2)}.$$

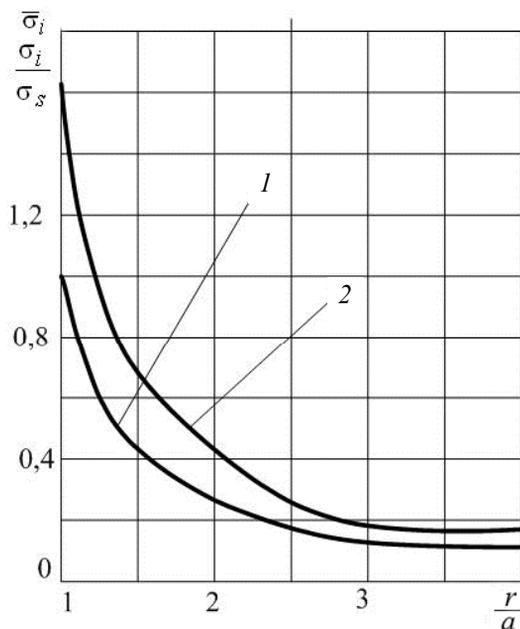
Здесь  $C_1 = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}}$ ;  $\mu$  — коэффициент Пуассона, в расчетах принято, что  $\mu = 1/3$ .

На рис. 1 приведены зависимости  $\sigma_i/\sigma_s = f(r/a)$  и  $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(r/a)$  ( $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/P$ , где  $P$  — давление в прямоугольном импульсе) при  $c/a = 5\pi/32$ ,  $\gamma = 0,6$ ,  $b/a = 4$ .

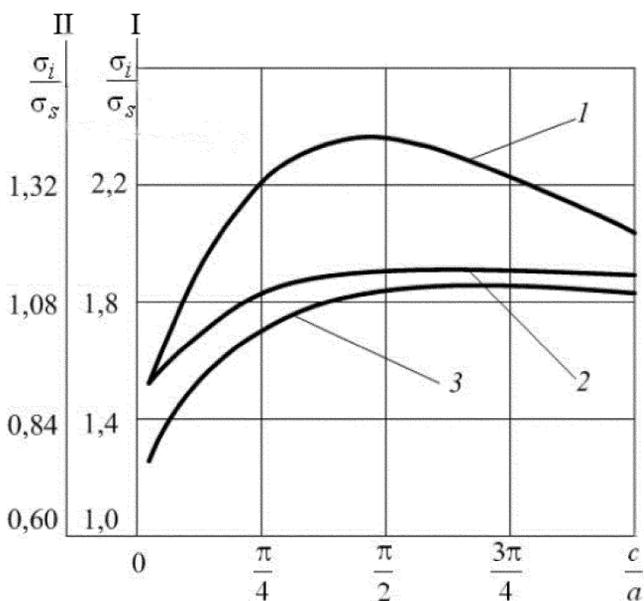
Как показали расчеты, опасным является сечение при значении  $z/a = 0$ . Из рис. 1 следует, что в заданных условиях нагружения ствола пластические деформации могут появиться на его внутренней поверхности:  $r/a = 1$ . При вычислениях принимали  $P/\sigma_s = 0,615$ .

Влияние ширины прямоугольного импульса на параметр  $\sigma_i/\sigma_s$  иллюстрирует рис. 2.

В случае  $P/\sigma_s = 1$  значение  $\sigma_i/\sigma_s > 1$ , что указывает на невозможность избежать пластических деформаций при  $r/a = 1$ ,  $z/a = 0$  для  $\gamma = 0,6$ . Рабочая зона по параметру  $c/a$  значительно расширяется для  $\sigma_i/\sigma_s = 1$  и всех значений  $b/a$ . Если понизить давление внутри ствола до значения  $P/\sigma_s = 0,435$ , то все кривые по параметру  $c/a$  оказываются рабочими, т. е. пластические деформации не появляются при значении  $r/a = 1$ .

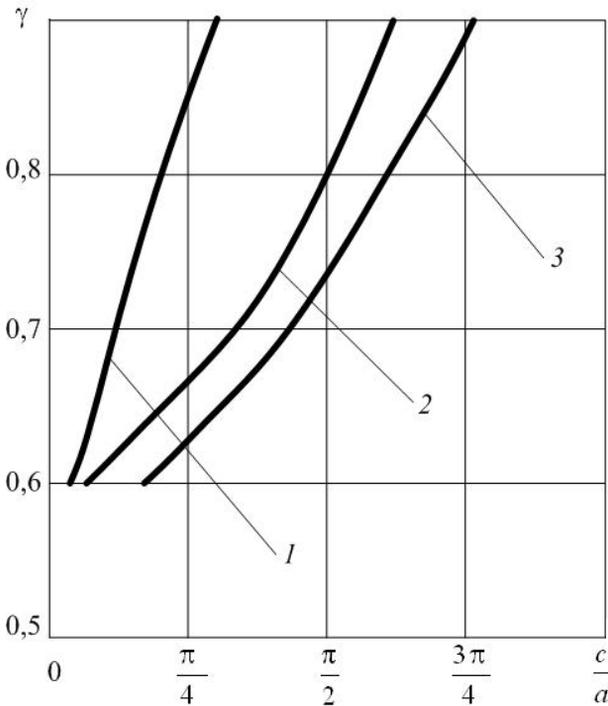


**Рис. 1.** Распределение безразмерной интенсивности напряжений  $\sigma_i/\sigma_s$ ,  $\bar{\sigma}_i$  по радиальной координате  $r/a$ :  $\sigma_i/\sigma_s = f(r/a)$  (1),  $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_i(r/a)$  (2) при  $b/a = 4$ ,  $\gamma = 0,6$ ,  $c/a = 5\pi/32$ ,  $z/a = 0$ ,  $P/\sigma_s = 0,616$



**Рис. 2.** Зависимости безразмерной интенсивности напряжений от величины полуширины  $c/a$  прямоугольного импульса (оси ординат I —  $P/\sigma_s = 1$ , II —  $P/\sigma_s = 0,6$ ):  $b/a = 3$  (1), 4 (2), 5 (3) при  $\gamma = 0,6$ ,  $z/a = 0$ ,  $r/a = 1$

На рис. 3 представлены предельные зависимости  $\gamma = \gamma(c/a)$  для различных значений  $b/a$ . Эти зависимости определяют оптимальное поведение данной конструкции, т. е. цилиндра с фиксированной величиной  $b/a$ , на них зафиксированы точки, которые указывают критическое состояние цилиндра при определенном значении  $b/a$ , где  $\sigma_i/\sigma_s = 1$ . Рабочая зона для каждого значения  $b/a$  расположена выше и левее соответствующей зависимости.



**Рис. 3.** Предельные зависимости, определяющие расчетные зоны по параметрам  $\gamma$  и  $c/a$  для заданных параметров конструкции  $b/a$  (расчетные зоны находятся левее кривых):  $b/a = 3$  (1), 4 (2), 5 (3) при  $\sigma_i/\sigma_s = 1$ ;  $P/\sigma_s = 0,625$ ,  
 $z/a = 0$ ,  $r/a = 1$

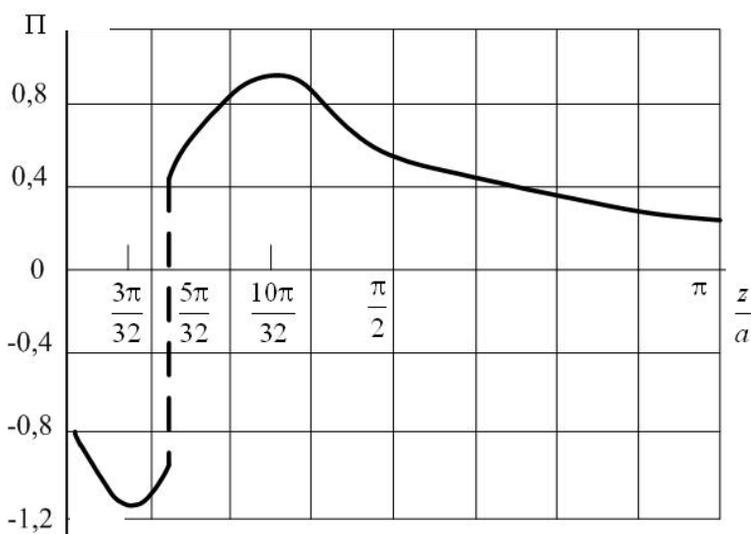
В ряде случаев используют характеристику напряженного состояния

$$\Pi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения в точке тела.

На рис. 4 приведена зависимость  $\Pi = f(z/a)$  при  $b/a = 4$ ,  $\gamma = 0,6$ ,  $r/a = 1$ ,  $c/a = 5\pi/32$ . По величине  $\Pi$  можно судить о напряженном

состоянии внутренней поверхности цилиндра, причем следует отметить, что опасную точку необходимо характеризовать в общем случае двумя параметрами  $\sigma_i$  и  $\Pi$ . Величина  $\sigma_i$  описывает переход материала тела в пластическое состояние, если  $\sigma_i/\sigma_s = 1$ , а величина  $\Pi$  — опасное напряженное состояние. Обычное напряженное состояние при одинаковом значении  $\sigma_i$  тем опаснее, чем больше значение  $\Pi$ , например  $\Pi = -1$  — для одноосного сжатия,  $\Pi = 1$  — для одноосного растяжения,  $\Pi = 2$  — для двухосного равномерного растяжения. С этой точки зрения при одинаковом значении  $\sigma_i$  более опасными могут быть точки, начиная с  $z/a > c/a > 5\pi/32$ . При этом получается, что максимум близок к значению  $\Pi \approx 1$  для  $z/a \approx 10\pi/32$ . Эта точка может быть опасной при появлении, например, остаточных деформаций.



**Рис. 4.** Изменение параметра напряженного состояния  $\Pi$  вдоль осевой координаты  $z/a$  при  $b/a = 4$ ,  $\gamma = 0,6$ ,  $r/a = 1$ ,  $z/a = 0$ ,  $c/a = 5\pi/32$

**Задача 2.** Задача о колебаниях полого упругого однородного цилиндра была решена [4], однако не рассматривалось НДС цилиндра и практически не рассчитывалась задача определения НДС.

Ниже приведен алгоритм решения задачи об определении НДС цилиндра под действием радиальной нагрузки.

При граничных

$$\sigma_r = \begin{cases} P_0(1 - \cos \omega t) & \text{при } r = a, t \geq 0, \\ 0 & \text{при } r = b, t \geq 0 \end{cases}$$

и начальных условиях задачи  $u = \partial u / \partial t = 0$  для  $a \leq r \leq b$  решение уравнения колебаний цилиндра имеет вид

$$\begin{aligned}
 2\hat{u} &= \frac{2u}{a} \frac{G}{P_0} = \frac{a}{r} \frac{(2\beta-1) \frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{r}{a}\right)^2}{(2\beta-1) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} + \\
 &+ 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Phi(i\gamma_s) \cos \gamma_s t j(a) j(b)}{\left(\beta^2 \gamma_s^2 \frac{a^2}{c^2} - 2\beta + 1\right) j^2(b) - \left(\beta^2 \gamma_s^2 \frac{b^2}{c^2} - 2\beta + 1\right) j^2(a)}, \\
 2\hat{\varepsilon}_r &= 2\varepsilon_r \frac{G}{P_0} = \frac{1 - (2\beta-1) \frac{b^2}{a^2}}{(2\beta-1) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} + \\
 &+ 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}(i\gamma_s) \cos \gamma_s t j(a) j(b)}{\left(\beta^2 \gamma_s^2 \frac{a^2}{c^2} - 2\beta + 1\right) j^2(b) - \left(\beta^2 \gamma_s^2 \frac{b^2}{c^2} - 2\beta + 1\right) j^2(a)}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Введем обозначения  $\frac{\gamma_s a}{c} = y_s$  и  $\gamma_s = \frac{c y_s}{a}$ , тогда

$$\begin{aligned}
 \gamma_s \frac{b}{c} &= \gamma_s \frac{a}{c} \frac{b}{a} = y_s \frac{b}{a}, \\
 j(a) &= J_1(y_s) - \beta y_s J_0(y_s), \\
 j(b) &= J_1\left(\frac{b}{a} y_s\right) - \beta y_s \frac{b}{a} J_0\left(\frac{b}{a} y_s\right), \\
 \bar{\Phi}(i\gamma_s) &= -\Phi(i\gamma_s) + f(x^{(\gamma_s)}),
 \end{aligned}$$

где  $x^{(\gamma_s)} = \frac{\gamma r}{c} = \frac{\gamma a}{c} \frac{r}{a} = y_s \frac{r}{a}$ , и при  $\gamma = \gamma_s$  имеем

$$x^{(\gamma_s)} = y_s \frac{r}{a},$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(i\gamma_s) &= -\frac{\pi}{2} \left\{ \left[ Y_1\left(\frac{b}{a} y_s\right) - \beta \frac{b}{a} y_s Y_0\left(\frac{b}{a} y_s\right) \right] J_1\left(y_s \frac{r}{a}\right) - j(b) Y_1\left(y_s \frac{r}{a}\right) \right\}, \\
 f(x^{(\gamma_s)}) &= -\frac{\pi}{2} \left[ z(b) y_s \frac{r}{a} J_0\left(y_s \frac{r}{a}\right) - j(b) y_s \frac{r}{a} Y_0\left(y_s \frac{r}{a}\right) \right], \\
 z(b) &= Y_1\left(y_s \frac{b}{a}\right) - \beta y_s \frac{b}{a} Y_0\left(y_s \frac{b}{a}\right).
 \end{aligned} \tag{5}$$

В этих уравнениях  $J_0, J_1, Y_0$  и  $Y_1$  — функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Запишем

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{u}{a} \frac{G}{P_0}, \quad \hat{\varepsilon}_r = \varepsilon_r \frac{G}{P_0}, \quad \hat{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta \frac{G}{P_0}, \quad \hat{\Theta} = \Theta \frac{G}{P_0}, \\ \hat{\Theta} &= \hat{\varepsilon}_r + \hat{\varepsilon}_\theta, \\ \hat{\varepsilon}_\theta &= \frac{\hat{u}}{r/a},\end{aligned}\tag{6}$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{P_0} = 2\hat{\varepsilon}_r + \frac{2\mu}{1-2\mu} \hat{\Theta},$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{P_0} = 2\hat{\varepsilon}_\theta + \frac{2\mu}{1-2\mu} \hat{\Theta},$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{P_0} = \frac{2\mu}{1-2\mu} \hat{\Theta}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_r = \varepsilon_r \frac{G}{P_0} &= \frac{1}{2} \frac{1-(2\beta-1)\frac{b^2}{r^2}}{(2\beta-1)\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a}{r} \frac{\Phi(i\gamma_s) \cos \frac{c y_s}{a} \bar{j}(a) j(b)}{\left(\beta^2 y_s^2 - 2\beta + 1\right) j^2(b) - \left(\beta^2 y_s^2 \frac{b^2}{a^2} - 2\beta + 1\right) j^2(a)},\end{aligned}\tag{7}$$

где  $C = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$  — скорость объемной волны ( $\lambda, G$  — параметры

Ляме);  $\beta = \frac{\lambda + 2G}{2G}$ .

По записанным выше зависимостям (4)–(7) решим задачу определения НДС цилиндра при радиальном нагружении.

Применим метод суперпозиций решений. Запишем

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{\theta_1} = \frac{u_1}{r}; \quad \varepsilon_{\theta_2} = \frac{u_2}{r},$$

$$\varepsilon_{\theta_1} + \varepsilon_{\theta_2} = \frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{r} = \frac{u}{r} = \varepsilon_{\theta},$$

где  $\varepsilon_{\theta}$  — решение для комплексной задачи.

Затем найдем

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial r} = \varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}$$

и далее  $\varepsilon_z = \varepsilon_{z_1} + \varepsilon_{z_2} = \varepsilon_{z_1}$ ,  $\varepsilon_{z_2} = 0$ .

Для объемной деформации имеем

$$\Theta = \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_r + \varepsilon_z = \Theta_1 + \Theta_2,$$

где  $\Theta_1 = \varepsilon_{\theta_1} + \varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{z_1}$ ;  $\Theta_2 = \varepsilon_{\theta_2} + \varepsilon_{r_2}$ .

Далее докажем, что

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \lambda\Theta = 2G(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}) + \lambda(\Theta_1 + \Theta_2) = \sigma_{r_1} + \sigma_{r_2},$$

где  $\sigma_{r_1} = 2G\varepsilon_{r_1} + \lambda\Theta_1$ ;  $\sigma_{r_2} = 2G\varepsilon_{r_2} + \lambda\Theta_2$ ;  $\sigma_{\theta} = 2G\varepsilon_{\theta} + \lambda\Theta = \sigma_{\theta_1} + \sigma_{\theta_2}$ ;

$\sigma_{\theta_1} = 2G\varepsilon_{\theta_1} + \lambda\Theta_1$ ;  $\sigma_{\theta_2} = 2G\varepsilon_{\theta_2} + \lambda\Theta_2$ ;  $\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\Theta = \sigma_{z_1} + \sigma_{z_2}$ ;

$\sigma_{z_1} = 2G\varepsilon_{z_1} + \lambda\Theta_1$ ;  $\sigma_{z_2} = \lambda\Theta_2$ .

Аналогично получаем для  $\tau = \tau_1 + \tau_2 = \tau_1$ , так как  $\tau_2 = 0$ .

Поскольку

$$\frac{u}{a} = \frac{u_1}{a} + \frac{u_2}{a},$$

имеем

$$\frac{u_1}{a} = \bar{u} \frac{2}{\pi} \frac{P}{G} \quad \text{и} \quad \frac{u_2}{a} = \hat{u} \frac{P_0}{G},$$

тогда

$$\frac{u}{a} = \frac{2}{\pi} \bar{u} \frac{P}{G} + \hat{u} \frac{P_0}{G}.$$

Далее находим

$$\sigma_r = \sigma_{r_1} + \sigma_{r_2}$$

или

$$\frac{\sigma_r}{P} = \frac{\sigma_{r_1}}{P} + \frac{\sigma_{r_2}}{P_0} \frac{P_0}{P}, \quad \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_{r_1} + \bar{\sigma}_{r_2} \frac{P_0}{P}$$

( $P$ ,  $P_0$  — давление в задачах 1, 2 соответственно).

Так как  $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$ ,  $\Theta_1 = \bar{\Theta} \frac{2P}{\pi G}$ ,  $\Theta_2 = \hat{\Theta} \frac{P_0}{G}$ , окончательно получим

$$\Theta = \frac{2P}{\pi G} \bar{\Theta} + \frac{P_0}{G} \hat{\Theta},$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2},$$

где  $\varepsilon_{r1} = \frac{2P}{\pi G} \bar{\varepsilon}_r$  и  $\varepsilon_{r2} = \hat{\varepsilon}_r \frac{P_0}{G}$ .

Таким образом,

$$\varepsilon_r = \frac{2P}{\pi G} \bar{\varepsilon}_r + \frac{P_0}{G} \hat{\varepsilon}_r,$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z1} = \frac{2P}{\pi G} \bar{\varepsilon}_z,$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta1} + \varepsilon_{\theta2} = \frac{2P}{\pi G} \bar{\varepsilon}_\theta + \frac{P_0}{G} \hat{\varepsilon}_\theta,$$

$$\sigma_\theta = \sigma_{\theta1} + \sigma_{\theta2}, \quad \sigma_z = \sigma_{z1} + \sigma_{z2},$$

т. е.

$$\frac{\sigma_\theta}{P} = \frac{\sigma_{\theta1}}{P} + \frac{\sigma_{\theta2}}{P_0} \frac{P_0}{P}, \quad \frac{\sigma_z}{P} = \frac{\sigma_{z1}}{P} + \frac{\sigma_{z2}}{P_0} \frac{P_0}{P},$$

или

$$\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_{\theta1} + \bar{\sigma}_{\theta2} \frac{P_0}{P}, \quad \bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_{z1} + \bar{\sigma}_{z2} \frac{P_0}{P}.$$

Здесь и ранее  $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z$  — безразмерные суммарные значения напряжений.

Интенсивность напряжений рассчитаем по формуле

$$\frac{\sigma_i}{P} = \bar{\sigma}_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r)^2 + (\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_\theta)^2 + (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)^2 + 6\bar{\tau}_{rz}^2},$$

где  $\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau} = \frac{\tau}{P}$ .

Критическим значением  $\sigma_i$  является значение  $\sigma_s$ , поэтому необходимо для упругого деформирования материала выполнить условие

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_s} \leq 1. \text{ Получим выражение}$$

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i \sigma_s}{\sigma_s P},$$

отсюда

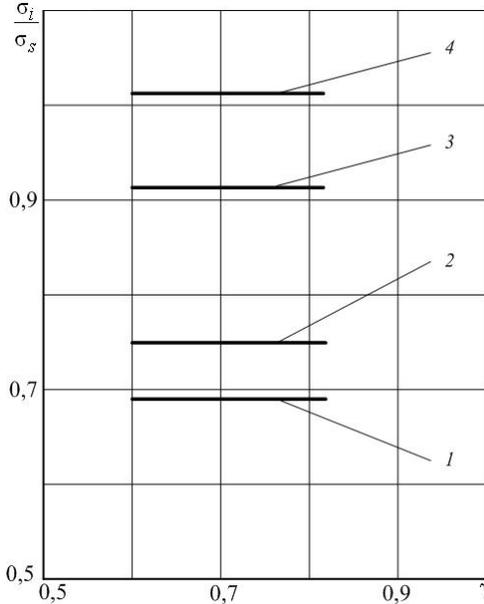
$$\frac{\sigma_i}{\sigma_s} = \frac{P}{\sigma_s} \bar{\sigma}_i.$$

Для упругой области

$$\frac{P}{\sigma_s} \bar{\sigma}_i \leq 1.$$

На рис. 5 представлены зависимости безразмерной интенсивности напряжений  $\frac{\sigma_i}{\sigma_s}$  от скоростного параметра  $\gamma$  с учетом влияния давления  $P_0$  от фоновой нагрузки, которое принято в долях давления бегущего импульса. Эти зависимости построены для момента времени  $t = t_{\max}$  при определенных значениях  $\frac{P}{\sigma_s}$ . Кривые, лежащие ниже

$\frac{\sigma_i}{\sigma_s} = 1$ , указывают на тот факт, что ствол в опасной точке находится в упругом состоянии.



**Рис. 5.** Зависимость параметра НДС  $\sigma_i/\sigma_s$  от скоростного параметра  $\gamma$ :  $P_0/P = 0$  (1),  $P_0/P = 0,25$  (2),  $P_0/P = 1$  (3),  $P_0/P = 1,1$  (4) при  $c/a = 16,6; 18,5; 20,3; 22,5$  ( $P/\sigma_s = 0,417$  для установки с  $b/a = 4,4$ ; нагрузка бегущая плюс фон;  $r/a = 1, z/a = 0$ )

Величина  $\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{C_2}\right)^2}$ , где  $C_2$  — скорость сдвиговой волны, для

стали  $C_2 = 3180$  м/с. При расчетах принимали  $V = 1800 \dots 2400$  м/с,  $c/a = 16 \dots 24$ .

Метод решения задач, изложенный в работе [2], был обобщен автором и использован для решения более сложных задач (см., например, работы [5, 6]).

**Выводы.** Таким образом, в работе: 1) решена задача об определении НДС полого упругого цилиндра под действием одновременно движущейся и радиальной нагрузок;

2) разработаны метод расчета НДС полого упругого цилиндра, программа расчетов и приведены расчеты, позволяющие определить НДС реального ствола баллистической установки или дать рекомендации по выбору его параметров при проектировании.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Златин Н.А., Красильщиков А.П., Мишин Г.И., Попов Н.Н. *Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях*. Н.А. Златина и Г.И. Мишина, ред. Москва, Наука, ГРФМЛ, 1974, 344 с.
- [2] Дубинин В.В., Максимов Г.М., Шурыгин В.М. Нагружение упругого полого цилиндра «бегущим» с постоянной скоростью импульсом давления. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, № 1, 1978, с. 57–63.
- [3] Ильюшин А.А., Огибалов П.М. *Уругопластические деформации полых цилиндров*. Изд-во. Моск. ун-та, 1960, 228 с.
- [4] Снеддон И. *Преобразования Фурье*. Москва, Изд-во иностр. лит-ры, 1955, 668 с.
- [5] Дубинин В.В., Ремизов А.В. Полый цилиндр в упругой оболочке. Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы. *Сб. трудов науч.-метод. конф., посвященной 40-летию НУК ФН*. Москва, декабрь 2004 г. Москва, «Логос», 2005, с. 186–193.
- [6] Дубинин В.В. Решение контактной задачи о нагружении полого цилиндра движущимся телом. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, № 1, 2010, с. 57–64.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Дубинин В.В. Упругий полый цилиндр под действием бегущей и фоновой нагрузок. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1142.html>

**Дубинин Владимир Валентинович** родился в 1937 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1961 г. Канд. техн. наук, профессор кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 250 работ в области динамики и теории удара: e-mail: [sovettm@bmstu.ru](mailto:sovettm@bmstu.ru)