

Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог

© В.А. Калиниченко¹, Аунг Наинг Со²

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526, Россия

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Впервые экспериментально исследованы горизонтальные колебания прямоугольного сосуда с жидкостью, вызванные первой модой стоячих поверхностных гравитационных волн Фарадея. Проведено сравнение результатов экспериментов для случаев связанных горизонтальных колебаний сосуда и параметрического возбуждения волн при возбуждении волн Фарадея в неподвижном в горизонтальном направлении сосуде. Использована аналогия между движением маятника на тележке и связанными колебаниями жидкости в свободном сосуде при параметрическом возбуждении стоячих волн; рассмотрены резонансные колебания физического маятника и маятника на тележке около нижнего положения равновесия под действием вертикальных колебаний точки подвеса. Проведено сравнение опытных данных с результатами, полученными с использованием теоретической модели. Особое внимание в экспериментах уделено случаю связанных колебаний маятника на тележке, когда точка подвеса маятника имеет дополнительную степень свободы в горизонтальном направлении. Построена и численно исследована модель совместного движения систем; проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: волны Фарадея, физический маятник на тележке, параметрический резонанс, резонансная зависимость.

Введение. Исследования динамики жидкости в неподвижном или колеблющемся сосуде имеют большое значение для решения как фундаментальных [1, 2], так и многих прикладных задач [3]. Одним из примеров сложного динамического взаимодействия в системе тело — жидкость является задача о горизонтальных перемещениях сосуда с жидкостью при возбуждении волн Фарадея [4]. Под волнами Фарадея понимают стоячие гравитационные волны, возбуждаемые в однородной или двухслойной жидкости в жестком сосуде, который совершает периодическое движение в направлении силы тяжести [5].

В экспериментальной гидродинамике горизонтальные колебания сосуда с жидкостью обычно используют для возбуждения стоячих волн [6, 7]. В этом случае происходят вынужденные волновые движения жидкости, частота которых в точности равна частоте колебаний сосуда, а высоту волны можно рассчитать в рамках линейной модели [1]. Отметим, что при горизонтальных перемещениях сосуда на свободной поверхности жидкости возбуждаются только нечетные волновые моды. Решение нелинейной задачи может потребоваться только при описании волн большой высоты вблизи резонанса.

Теоретически горизонтальные поступательные колебания прямоугольного сосуда с жидкостью исследовались в работе [8]: вычислено суммарное давление стоячих поверхностных волн на стенки сосуда и составлено уравнение его движения.

До настоящего времени отсутствуют экспериментальные результаты о динамике свободного сосуда с колеблющейся жидкостью. Авторам известна лишь одна работа [9], в которой приведены данные о связанных колебаниях сосуда с жидкостью, стоячие волны на свободной поверхности которой возбуждались вручную с последующим измерением характеристик задачи на стадии затухающих волновых движений жидкости. Дефицит лабораторных исследований в данном направлении объясняется сложностью постановки самого эксперимента, поскольку необходимо обеспечить возбуждение стоячих волн стационарной амплитуды в сосуде, имеющем горизонтальную степень свободы.

В настоящей работе впервые в условиях лабораторного эксперимента реализовано параметрическое возбуждение гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы. Ввиду сложности наблюдаемого гидродинамического явления использован механический аналог волн Фарадея и выполнен ряд лабораторных и вычислительных экспериментов по параметрическим колебаниям физического маятника на перемещающейся в горизонтальном направлении тележке. Отметим, что физический маятник как простейший аналог волн Фарадея ранее использовался в экспериментах [10] при исследовании срыва параметрических колебаний однородной и двухслойной жидкостей.

1. Постановка эксперимента. Для генерации волн Фарадея на свободной поверхности жидкости использовали прецизионный вибростенд, описанный в работе [11]. Исследовали первую волновую моду $n = 1$ в прямоугольном сосуде ($50 \times 4 \times 40$ см) на свободной поверхности воды (глубина $h = 7$ см) в условиях основного резонанса Фарадея, когда частота возбуждаемых волн в 2 раза меньше частоты Ω колебаний сосуда. Амплитуда вертикальных колебаний сосуда оставалась неизменной: $s = 2,25$ см, а угловые отклонения от вертикали не превышали 8° .

Для регистрации волновых профилей применяли цифровую видеосъемку (15...30 кадр./с). Точность измерения высоты волновых профилей $H = 0,1$ см, причем среднее значение H в каждом режиме рассчитывали по 8–10 измеренным в моменты максимального развития волны последовательным значениям разности между высотой ее гребня и впадины.

В экспериментах с маятником однородный стальной цилиндр диаметром 1,5 см и длиной 50,2 см жестко крепили к горизонтальной оси

обесточенного электродвигателя, подшипники которого обеспечивали колебания физического маятника в вертикальной плоскости; добротность системы составляла около 250. Как и в волнах Фарадея, исследовался основной параметрический резонанс. Точность измерения угла φ отклонения маятника при обработке видеоматериалов была равна $0,5^\circ$. Измеренная собственная частота маятника $\omega = 5,28 \pm 0,12 \text{ с}^{-1}$, приведенная длина $l = 35,1 \text{ см}$.

Коэффициент затухания b для волн Фарадея определяли следующим образом. В колеблющемся на одной из резонансных частот Ω сосуде возбуждали соответствующую волновую моду. Затем сосуд останавливали и проводили видеосъемку затухания волн. Величину b оценивали как $b = T^{-1} \ln(H_m/H_{m+1})$, где $T = 2\pi/\omega$ — период волны; ω — собственная частота; H_m и H_{m+1} — значения высоты волны, взятые через период колебаний. Аналогично оценивали коэффициент затухания колебаний маятника в диапазоне начальных угловых смещений $\varphi_0 \sim 15 \dots 60^\circ$, т. е. $b = 0,029 \text{ с}^{-1}$.

Для обеспечения исследуемых в экспериментах горизонтальных перемещений сосуда с жидкостью или физического маятника использовали рельсовую тележку на пяти подшипниках качения.

В экспериментах с волнами Фарадея прямоугольный сосуд длиной $L = 50 \text{ см}$, шириной $W = 4 \text{ см}$ и массой $7,6 \times 10^3 \text{ г}$ устанавливался на тележку массой $1,3 \times 10^3 \text{ г}$ (рис. 1, а). Маятник также жестко крепился на тележку (рис. 1, б), свободно перемещающуюся по двум горизонтальным стальным рельсам. Плавность хода тележки обеспечивалась пятью подшипниками качения. При массе тележки (вместе с электродвигателем) $m_2 = 2880 \text{ г}$ и массе маятника $m_1 = 688 \text{ г}$ измеренный динамометрическим методом коэффициент трения качения покоя не превышал 0,02.

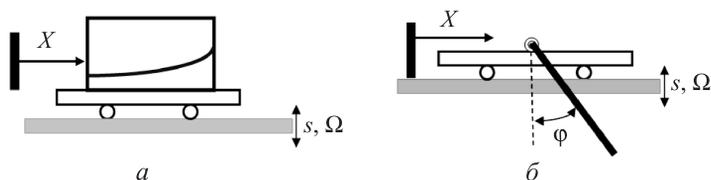


Рис. 1. Схема эксперимента с волнами Фарадея в подвижном сосуде (а) и их механический аналог — маятник на тележке при параметрическом резонансе (б)

Исследования динамики маятника проводили при различных амплитудах вертикальных колебаний оси $s = 0,5; 1,05$ и $2,25 \text{ см}$. Для регистрации параметрических колебаний использовали цифровую видеосъемку ($15 \dots 30 \text{ кадр./с}$) с последующей компьютерной обработкой материалов в среде ImageJ.

2. Результаты и обсуждение. Схемы экспериментов с волнами Фарадея и физическим маятником приведены на рис. 1.

Волны Фарадея. Рассматривая плоское движение жидкости в вертикально колеблющемся и неподвижном в горизонтальном направлении сосуде, смещение свободной поверхности жидкости зададим в виде $y(x, t) = 0,5H(t) \cos kx$, где x и y — координаты точек свободной поверхности жидкости в системе координат, жестко связанной с сосудом; $H(t)$ — высота стоячей волны; $k = \pi n / L$ — волновое число (n — номер волновой моды, равный числу узлов стоячей волны; L — длина сосуда). Тогда, как показано в работах [12–14], получим уравнение, определяющее функцию $H(t)$:

$$H''(t) + 2bH'(t) + (\omega^2 - \Omega^2 k s \cos \Omega t)H(t) = 0. \quad (1)$$

Здесь действующая между частицами жидкости сила трения пропорциональна их скорости с коэффициентом b ; $\omega = \sqrt{gk \operatorname{th} kh}$ — линейная частота волны; g — ускорение силы тяжести.

Если ввести безразмерную переменную $\tau = \Omega t / 2$ и выполнить преобразование $H(\tau) = e^{-\delta \tau} H_1(\tau)$, функция $H_1(\tau)$ будет удовлетворять уравнению Матье в канонической форме:

$$H_1'' + [p - 2q \cos 2\tau]H_1 = 0, \quad (2)$$

где $q = 2sk$; $p = (2\omega / \Omega)^2 - \delta^2$ ($\delta = 2b / \Omega$).

Предположим, что в начальный момент времени амплитуда волнового возмущения мала, т. е. $H_1(\tau) \ll 1$. Тогда, согласно уравнению (2), если частота колебаний Ω сосуда принадлежит зоне неустойчивости, определяемой неравенством [15, 16]

$$1 - \sqrt{(2sk)^2 - 4b^2 / \omega^2} < \frac{2\omega}{\Omega} < 1 + \sqrt{(2sk)^2 - 4b^2 / \omega^2},$$

тривиальное решение уравнения (2) теряет устойчивость, и колебания нарастают по экспоненциальному закону.

В силу теоретической модели [16], в которой асимптотическое решение нелинейной задачи о поверхностных волнах Фарадея построено в переменных Лагранжа методом Крылова — Боголюбова, резонансные зависимости высоты стационарной волны от частоты параметрического воздействия определяются соотношением

$$k^2 \omega \beta H_{\pm}^2 = 4 \left[\omega - \Omega / 2 \pm \sqrt{(s\omega^2 \Omega / 2g)^2 - b^2} \right]. \quad (3)$$

Здесь $\beta = \operatorname{th}^4 kh (2\operatorname{th}^6 kh + 3\operatorname{th}^4 kh + 12\operatorname{th}^2 kh - 9) / 64$; величины H_+ , H_- соответствуют реализуемой в эксперименте устойчивой и неустойчивой ветвям резонансной зависимости соответственно.

Экспериментальная (1) и расчетная (3) резонансные зависимости для первой волновой моды в неподвижном сосуде ($X = 0$) приведены на рис. 2, а. Ясно, что зависимости $H(\Omega)$ отвечают случаю жесткой восстанавливающей силы ($\beta < 0$), когда высота волны растет с увеличением частоты колебаний сосуда. Существенное различие измеренных и рассчитанных значений H связано с нелинейностью наблюдаемых в эксперименте волн. Профили на рис. 3, соответствующие огибающим колеблющейся свободной поверхности жидкости, построены при наложении 176 видеок кадров. Волна Фарадея имеет высоту $H = 9,9$ см или крутизну $H/\lambda \sim 0,01$. Из рисунка следует, что нелинейность волн даже такой малой крутизны проявляется в асимметрии волнового профиля и колебаниях узла стоячей волны.

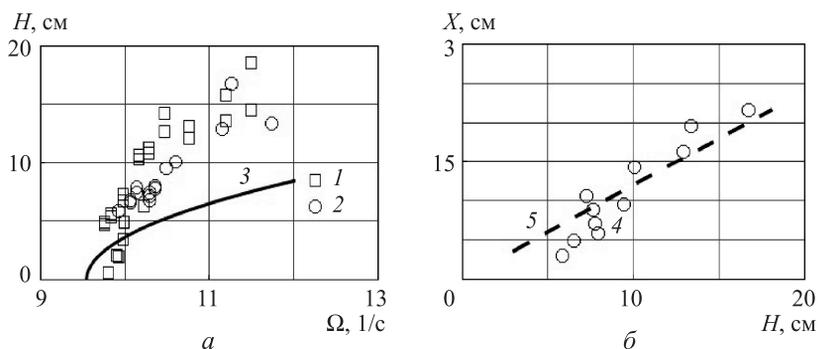


Рис. 2. Резонансная зависимость первой волновой моды (а) и связанные горизонтальные колебания сосуда при возбуждении волн Фарадея (б): неподвижный в горизонтальном направлении сосуд (1); на тележке (2); устойчивая ветвь, рассчитанная по формуле (3), модель [16] (3); экспериментальные данные (4); аппроксимирующая функция $X = 0,12 H$ (5)

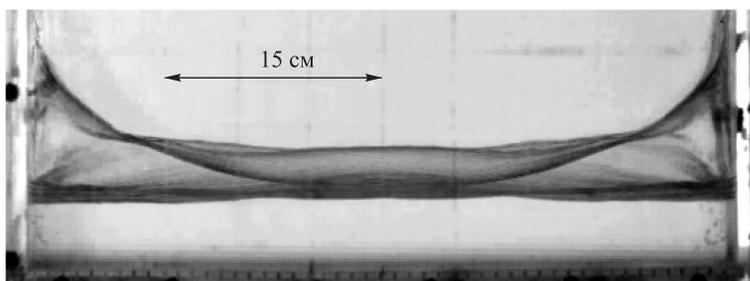


Рис. 3. Схема эксперимента с волнами Фарадея в горизонтально несвободном прямоугольном сосуде при $\Omega = 10,3 \text{ с}^{-1}$; $L = 50 \text{ см}$; $h = 7 \text{ см}$; $s = 2,25 \text{ см}$

Рассмотрим случай подвижного в горизонтальном направлении сосуда с жидкостью. Если волн нет, при гидростатическом давлении на торцевые стенки сосуда горизонтальная сила равна нулю. Амплитуда действующей в горизонтальном направлении силы при наличии на поверхности воды свободных двумерных стоячих волн оценивается

в первом приближении интегралом Коши — Лагранжа как $Q_x = HL^2W\rho\omega^2/\pi^2$. Для первой волновой моды ($n = 1$) высотой $H = 10$ см и частотой $\omega = 5,04$ с⁻¹ максимальное значение силы $Q_x = 2,6 \cdot 10^5$ дин.

Если поместить сосуд с водой на тележку и возбудить первую моду волн Фарадея, под воздействием сил реакции со стороны колеблющейся жидкости на торцевые стенки вся система будет совершать периодические перемещения в горизонтальном направлении. Соответствующая резонансная зависимость 2 для первой волновой моды, возбуждаемой в сосуде на тележке при параметрическом резонансе, приведена на рис. 2, а. Аналогично, как при неподвижном сосуде, рассмотрим случай жесткой восстанавливающей силы. Наблюдаемые в подвижном сосуде нелинейные волны Фарадея возбуждаются в частотном диапазоне $9,82 \leq \Omega \leq 11,72$ с⁻¹. Однако минимальная высота волн для подвижного сосуда (5,8 см) на порядок превосходит аналогичную величину (0,5 см) для неподвижного сосуда (кривые 1, 2 на рис. 2, а).

Характеризующая связанные колебания зависимость амплитуды X горизонтальных перемещений тележки от высоты волны H представлена на рис. 2, б. Соответствующая аппроксимирующая функция имеет вид $X = 0,12H$.

На данном этапе исследований авторы настоящей работы ограничились выявленным экспериментально эффектом связанных параметрических колебаний воды в подвижном в горизонтальном направлении прямоугольном сосуде. Это обусловлено высокой степенью нелинейности первой волновой моды на свободной поверхности воды, поскольку в эксперименте реализован случай малой глубины жидкости $h/\lambda \approx 0,07$. Из-за сложности постановки гидродинамического эксперимента, а также отсутствия соответствующей теоретической модели далее рассматривается механический аналог волн Фарадея — параметрический маятник.

Параметрические колебания физического маятника. Для оценки эффекта горизонтально перемещающейся тележки сначала приведем результаты, полученные для маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса.

Движение физического маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса описывается уравнением

$$\varphi'' + 2b\varphi' + [\omega^2 + (s\Omega^2/l)\cos\Omega t]\sin\varphi = 0, \quad (4)$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали; b — коэффициент затухания, определяемый сопротивлением воздуха и потерями на оси; $\omega = \sqrt{g/l}$ — собственная частота малых колебаний маятника; s и Ω — амплитуда и частота колебаний точки подвеса маятника.

Отметим, что уравнение (1) для высоты $H(t)$ волны Фарадея и уравнение (4), описывающее малые параметрические колебания маятника при $\sin \varphi \approx \varphi$, аналогичны. Данное обстоятельство использовалось в экспериментах [10] при изучении срыва параметрических колебаний однородной и двухслойной жидкостей, обусловленного разрушением волн Фарадея. В предложенной модели введен эквивалентный коэффициент затухания разрушающихся волн. Справедливость принятого подхода продемонстрирована в экспериментах с одной степенью свободы — с физическим маятником с вертикально колеблющейся точкой подвеса.

Параметрическое возбуждение колебаний маятника происходит, если расстройка $\Delta = \omega - \Omega/2$ удовлетворяет условию $|\Delta| < s\Omega^3/8g$.

Амплитуда φ_m стационарных колебаний маятника, согласно [15, 17], определяется уравнением

$$\varphi_{m\pm}^2 = \frac{-8(\Omega - 2\omega)}{\omega} \pm 4\sqrt{(s\Omega^2/g)^2 - 4(2b/\omega)^2}, \quad (5)$$

где φ_{m+} , φ_{m-} отвечают устойчивой и неустойчивой ветвям резонансной зависимости соответственно.

На рис. 4 приведена резонансная зависимость для маятника с коэффициентом затухания $b = 0,029 \text{ с}^{-1}$ при $s = 1,05 \text{ см}$. После возбуждения колебаний на частоте $\Omega = 11,01 \text{ с}^{-1}$ их амплитуда $\varphi_m = 0,20 \text{ рад}$. При плавном уменьшении частоты Ω амплитуда монотонно возрастала до максимального значения: $\varphi_m = 2,85 \text{ рад}$ при $\Omega = 5,04 \text{ с}^{-1}$. Дальнейшее уменьшение частоты Ω приводит к срыву колебаний при $\Omega = 4,97 \text{ с}^{-1}$. Рассчитанные по формуле (5) ветви резонансной зависимости пересеклись при частоте срыва $\Omega = 4,91 \text{ с}^{-1}$. Если после срыва колебаний медленно увеличивать частоту колебаний сосуда, скачкообразное возбуждение колебаний происходит при $\Omega = 10,25 \text{ с}^{-1}$. Отметим, что представленная резонансная зависимость соответствует случаю мягкой восстанавливающей силы.

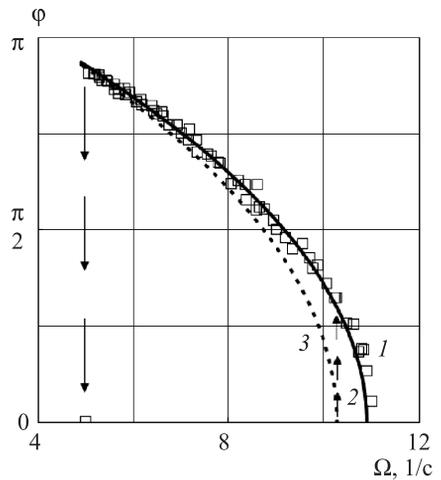


Рис. 4. Резонансная зависимость маятника ($s = 1,05 \text{ см}$, $x \equiv 0$): эксперимент (1); устойчивая и неустойчивая ветви $\varphi_m(\Omega)$ (2, 3), определяемые формулой (5)

Аналогичные результаты были получены при изменении экспериментальных условий (для других значений s), что свидетельствует о неплохом соответствии между моделью и экспериментом.

Теперь перейдем к параметрическому резонансу в механической системе, состоящей из движущейся вдоль горизонтальной прямой тележки массой m_2 и подвешенного к ней маятника массой m_1 (см. рис. 1, б). Если ввести горизонтальную координату x тележки, динамика плоского движения системы будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 l \cos \varphi)\ddot{\varphi} &= (m_1 l \sin \varphi)\dot{\varphi}^2 - F', \\ (m_1 l \cos \varphi)\dot{x} + m_1 l^2 \dot{\varphi} &= -m_1 l (g + s\Omega^2 \cos \Omega t) \sin \varphi - b\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $F' = \mu[(m_1 + m_2)(g + s\Omega^2 \cos \Omega t) + m_1 l(\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)]$ — сила трения качения между подшипниками тележки и горизонтальными направляющими; μ — коэффициент трения качения.

Амплитуды отклонения маятника и смещения тележки как функции частоты вертикальных колебаний приведены на рис. 5.

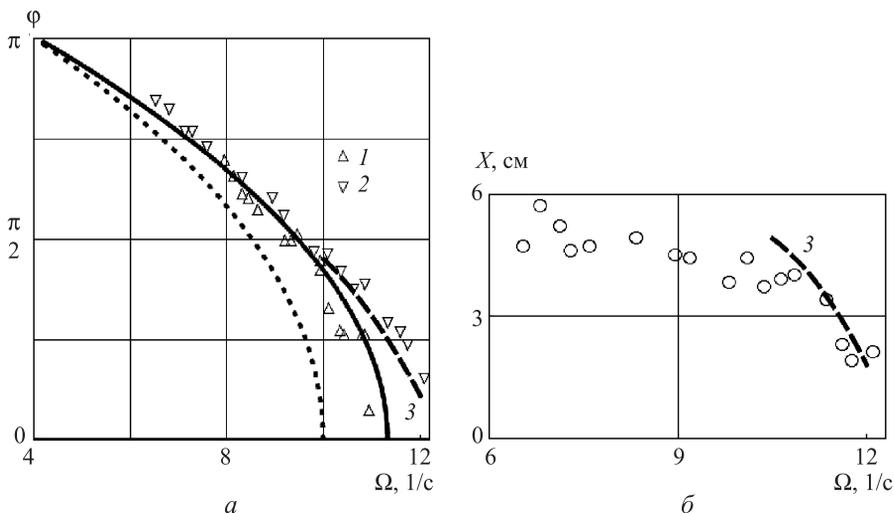


Рис. 5. Отклонение маятника (а) и смещение тележки (б) в зависимости от частоты вертикальных колебаний при $s = 2,25$ см: маятник ($x \equiv 0$), теоретическая модель (5) (1); маятник на тележке (2); численный расчет по формуле (6) (3)

Анализ данных рис. 5, а показывает, что наличие тележки практически не влияет на колебания маятника. Отметим, что в случае маятника на тележке (2), согласно экспериментальным данным, происходит затягивание резонансной зависимости в область высоких частот Ω . Кроме того, вблизи частот срыва колебаний $\Omega = 6,51 \text{ с}^{-1}$ наблюдались перевороты маятника, повторяющиеся через 3–5 перио-

дов. Амплитуда тележки монотонно растет с уменьшением частоты Ω (рис. 5, б).

На рис. 5 также приведены результаты численного решения уравнений движения (6) с использованием стандартной процедуры NDSolve пакета Mathematica. В модели использовались экспериментальные характеристики маятника и тележки. В качестве коэффициента трения качения взята величина $\mu = 0,02$. Стационарные значения амплитуд маятника и тележки (кривая 3 на рис. 5) получены только для диапазона частот $\Omega = 9,125 \dots 11,80 \text{ с}^{-1}$.

Рисунок 6 иллюстрирует взаимосвязь колебаний маятника и тележки. Ясно, что с увеличением φ амплитуда тележки также растет и может достигать значительных величин порядка 6 см. Зависимость 2, полученная численным решением системы (6), неплохо описывает данные эксперимента при амплитуде маятника, не превышающей значение $\pi/2$.

Процесс установления стационарных колебаний при различных значениях Ω показан на рис. 7. Переходный процесс характерен и для маятника (а), и для тележки (б). Отмечается существенное смещение положения, около которого происходят колебания тележки. Эта особенность движения тележки наблюдалась и в эксперименте.

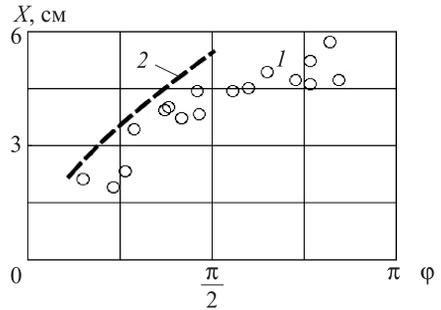


Рис. 6. Смещение тележки как функция угла отклонения маятника: эксперимент (1); численное решение уравнений (6) (2)

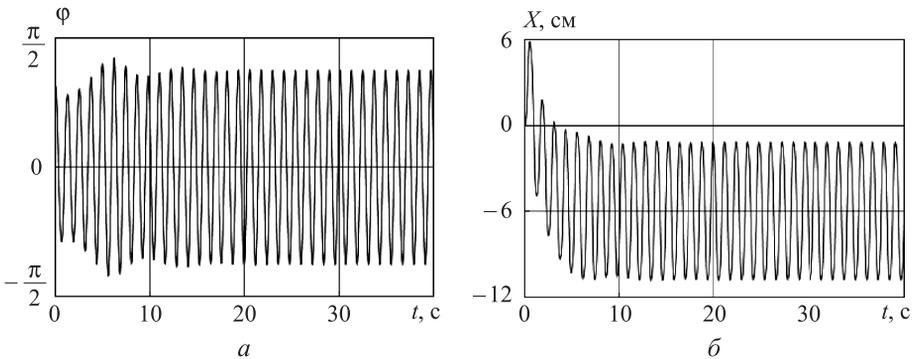


Рис. 7. Схемы (а, б) процесса установления стационарных колебаний системы маятник — тележка по результатам численного решения первого и второго уравнений (6) при $\Omega = 11,80; 10,50 \text{ с}^{-1}$, $\varphi_0 = 0,88$ ($x_0 = 0$)

Заключение. Экспериментально реализовано параметрическое возбуждение гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы. Иссле-

дованы горизонтальные колебания прямоугольного сосуда с жидкостью, вызванные первой модой стоячих поверхностных гравитационных волн Фарадея. Проведено сравнение данных экспериментов для случаев связанных горизонтальных колебаний сосуда и параметрического возбуждения волн при возбуждении волн Фарадея в неподвижном в горизонтальном направлении сосуде.

Использована аналогия между движением маятника на тележке и связанными колебаниями жидкости в свободном сосуде при параметрическом возбуждении стоячих волн; рассмотрены резонансные колебания физического маятника и маятника на тележке около нижнего положения равновесия под действием вертикальных колебаний точки подвеса. Проведено сравнение экспериментальных данных с имеющейся теоретической моделью. Особое внимание в экспериментах уделено случаю связанных колебаний маятника на тележке, когда точка подвеса маятника имеет дополнительную степень свободы в горизонтальном направлении. Построена и численно исследована модель совместного движения систем; проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№11-01-00247).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва, Наука, 1977, 815 с.
- [2] Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing dynamics: theory and applications*. Cambridge Univ. Press, 2005, 948 p.
- [3] Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 2012. Спец. вып. № 58, с. 15–30.
- [4] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение колебаний тела с полостью, заполненной стратифицированной жидкостью. *Известия РАН. Механика жидкости и газов*, 1994, № 3, с. 53–60.
- [5] Калининко В.А. О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска. *Известия РАН. Механика жидкости и газов*, 2009, № 4, с. 112–122.
- [6] Chester W., Bones J.A. Resonant Oscillations of Water Waves. II. Experiment. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1968, vol. 306, pp. 23–39.
- [7] Bredmose H., Brocchini M., Peregrine D. H., Thais L. Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves. *J. Fluid Mech*, 2003, vol. 490, pp. 217–249.
- [8] Сретенский Л.Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде. *Известия АН СССР. Отд. техн. наук*, 1951, № 10, с. 1483–1494.
- [9] Herczyński A., Weidman P.D. Experiments on the periodic oscillation of free containers driven by liquid sloshing. *J. Fluid Mech*, 2012, vol. 693, pp. 216–242.

- [10] Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. О срыве параметрических колебаний жидкости. *Известия РАН. Механика жидкости и газов*, 2010, № 1, с. 128–136.
- [11] Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. Экспериментальное исследование поверхностных волн, возбуждаемых при резонансе Фарадея. *Известия РАН. Механика жидкости и газов*, 1995, № 1, с. 122–129.
- [12] Болотин В.В. О движении жидкости в колеблющемся сосуде. *Прикладная математика и механика*, 1956, т. 20, вып. 2, с. 293–294.
- [13] Benjamin T.B., Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical motion. *Proc. Roy. Soc.*, 1954, vol. A225, no. 1165, pp. 505–515.
- [14] Miles J.W., Henderson D. Parametrically forced surface wave. *Ann. Rev. Fluid Dyn. Palo Alto, Ca.: Annu. Revs Inc.*, 1990, vol. 22, pp. 143–165.
- [15] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва, Наука, 1974, 504 с.
- [16] Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости. *Морские гидрофиз. исследования*, 1969, № 3(45), с. 87–97.
- [17] Xu X., Wiercigroch M. Approximate analytical solutions for oscillatory and rotational motion of a parametric pendulum. *Nonlinear Dyn.*, 2007, vol. 47, no. 1–3, pp. 311–320.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Калиниченко В.А., Аунг Наинг Со. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teorme/1138.html>

Калиниченко Владимир Анатольевич родился в 1956 г., окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1979 г. Д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН. Область научных интересов: гидродинамика. e-mail: kalin@ipmnet.ru

Аунг Наинг Со родился в 1985 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Стажер-исследователь кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: гидродинамика. e-mail: kalarlay@mail.ru