

в первом приближении интегралом Коши — Лагранжа как $Q_x = HL^2W\rho\omega^2/\pi^2$. Для первой волновой моды ($n = 1$) высотой $H = 10$ см и частотой $\omega = 5,04$ с⁻¹ максимальное значение силы $Q_x = 2,6 \cdot 10^5$ дин.

Если поместить сосуд с водой на тележку и возбудить первую моду волн Фарадея, под воздействием сил реакции со стороны колеблющейся жидкости на торцевые стенки вся система будет совершать периодические перемещения в горизонтальном направлении. Соответствующая резонансная зависимость 2 для первой волновой моды, возбуждаемой в сосуде на тележке при параметрическом резонансе, приведена на рис. 2, а. Аналогично, как при неподвижном сосуде, рассмотрим случай жесткой восстанавливающей силы. Наблюдаемые в подвижном сосуде нелинейные волны Фарадея возбуждаются в частотном диапазоне $9,82 \leq \Omega \leq 11,72$ с⁻¹. Однако минимальная высота волн для подвижного сосуда (5,8 см) на порядок превосходит аналогичную величину (0,5 см) для неподвижного сосуда (кривые 1, 2 на рис. 2, а).

Характеризующая связанные колебания зависимость амплитуды X горизонтальных перемещений тележки от высоты волны H представлена на рис. 2, б. Соответствующая аппроксимирующая функция имеет вид $X = 0,12H$.

На данном этапе исследований авторы настоящей работы ограничились выявленным экспериментально эффектом связанных параметрических колебаний воды в подвижном в горизонтальном направлении прямоугольном сосуде. Это обусловлено высокой степенью нелинейности первой волновой моды на свободной поверхности воды, поскольку в эксперименте реализован случай малой глубины жидкости $h/\lambda \approx 0,07$. Из-за сложности постановки гидродинамического эксперимента, а также отсутствия соответствующей теоретической модели далее рассматривается механический аналог волн Фарадея — параметрический маятник.

Параметрические колебания физического маятника. Для оценки эффекта горизонтально перемещающейся тележки сначала приведем результаты, полученные для маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса.

Движение физического маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса описывается уравнением

$$\varphi'' + 2b\varphi' + [\omega^2 + (s\Omega^2/l)\cos\Omega t]\sin\varphi = 0, \quad (4)$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали; b — коэффициент затухания, определяемый сопротивлением воздуха и потерями на оси; $\omega = \sqrt{g/l}$ — собственная частота малых колебаний маятника; s и Ω — амплитуда и частота колебаний точки подвеса маятника.

Отметим, что уравнение (1) для высоты $H(t)$ волны Фарадея и уравнение (4), описывающее малые параметрические колебания маятника при $\sin \varphi \approx \varphi$, аналогичны. Данное обстоятельство использовалось в экспериментах [10] при изучении срыва параметрических колебаний однородной и двухслойной жидкостей, обусловленного разрушением волн Фарадея. В предложенной модели введен эквивалентный коэффициент затухания разрушающихся волн. Справедливость принятого подхода продемонстрирована в экспериментах с одной степенью свободы — с физическим маятником с вертикально колеблющейся точкой подвеса.

Параметрическое возбуждение колебаний маятника происходит, если расстройка $\Delta = \omega - \Omega/2$ удовлетворяет условию $|\Delta| < s\Omega^3/8g$.

Амплитуда φ_m стационарных колебаний маятника, согласно [15, 17], определяется уравнением

$$\varphi_{m\pm}^2 = \frac{-8(\Omega - 2\omega)}{\omega} \pm 4\sqrt{(s\Omega^2/g)^2 - 4(2b/\omega)^2}, \quad (5)$$

где φ_{m+} , φ_{m-} отвечают устойчивой и неустойчивой ветвям резонансной зависимости соответственно.

На рис. 4 приведена резонансная зависимость для маятника с коэффициентом затухания $b = 0,029 \text{ с}^{-1}$ при $s = 1,05 \text{ см}$. После возбуждения колебаний на частоте $\Omega = 11,01 \text{ с}^{-1}$ их амплитуда $\varphi_m = 0,20 \text{ рад}$. При плавном уменьшении частоты Ω амплитуда монотонно возрастала до максимального значения: $\varphi_m = 2,85 \text{ рад}$ при $\Omega = 5,04 \text{ с}^{-1}$. Дальнейшее уменьшение частоты Ω приводит к срыву колебаний при $\Omega = 4,97 \text{ с}^{-1}$. Рассчитанные по формуле (5) ветви резонансной зависимости пересеклись при частоте срыва $\Omega = 4,91 \text{ с}^{-1}$. Если после срыва колебаний медленно увеличивать частоту колебаний сосуда, скачкообразное возбуждение колебаний происходит при $\Omega = 10,25 \text{ с}^{-1}$. Отметим, что представленная резонансная зависимость соответствует случаю мягкой восстанавливающей силы.

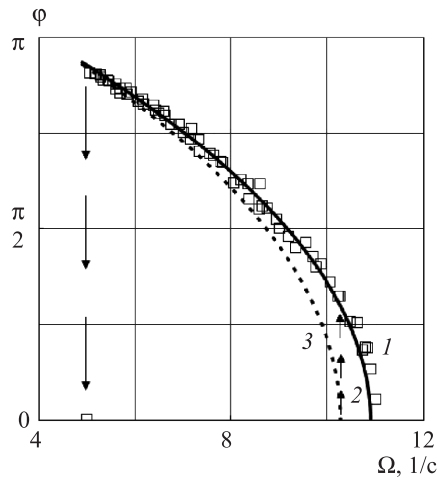


Рис. 4. Резонансная зависимость маятника ($s = 1,05 \text{ см}$, $x \equiv 0$): эксперимент (1); устойчивая и неустойчивая ветви $\varphi_m(\Omega)$ (2, 3), определяемые формулой (5)

Аналогичные результаты были получены при изменении экспериментальных условий (для других значений s), что свидетельствует о неплохом соответствии между моделью и экспериментом.

Теперь перейдем к параметрическому резонансу в механической системе, состоящей из движущейся вдоль горизонтальной прямой тележки массой m_2 и подвешенного к ней маятника массой m_1 (см. рис. 1, б). Если ввести горизонтальную координату x тележки, динамика плоского движения системы будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 l \cos \varphi)\ddot{\varphi} &= (m_1 l \sin \varphi)\dot{\varphi}^2 - F', \\ (m_1 l \cos \varphi)\ddot{x} + m_1 l^2 \ddot{\varphi} &= -m_1 l (g + s\Omega^2 \cos \Omega t) \sin \varphi - b\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $F' = \mu[(m_1 + m_2)(g + s\Omega^2 \cos \Omega t) + m_1 l(\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)]$ — сила трения качения между подшипниками тележки и горизонтальными направляющими; μ — коэффициент трения качения.

Амплитуды отклонения маятника и смещения тележки как функции частоты вертикальных колебаний приведены на рис. 5.

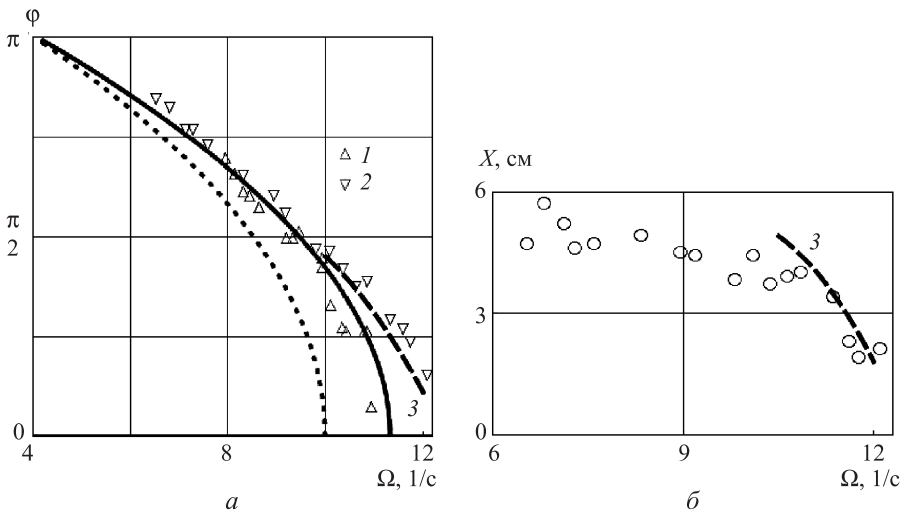


Рис. 5. Отклонение маятника (а) и смещение тележки (б) в зависимости от частоты вертикальных колебаний при $s = 2,25$ см: маятник ($x \equiv 0$), теоретическая модель (5) (1); маятник на тележке (2); численный расчет по формуле (6) (3)

Анализ данных рис. 5, а показывает, что наличие тележки практически не влияет на колебания маятника. Отметим, что в случае маятника на тележке (2), согласно экспериментальным данным, происходит затягивание резонансной зависимости в область высоких частот Ω . Кроме того, вблизи частот срыва колебаний $\Omega = 6,51 \text{ с}^{-1}$ наблюдались перевороты маятника, повторяющиеся через 3–5 перио-

дов. Амплитуда тележки монотонно растет с уменьшением частоты Ω (рис. 5, б).

На рис. 5 также приведены результаты численного решения уравнений движения (6) с использованием стандартной процедуры NDSolve пакета Mathematica. В модели использовались экспериментальные характеристики маятника и тележки. В качестве коэффициента трения качения взята величина $\mu = 0,02$. Стационарные значения амплитуд маятника и тележки (кривая 3 на рис. 5) получены только для диапазона частот $\Omega = 9,125 \dots 11,80 \text{ с}^{-1}$.

Рисунок 6 иллюстрирует взаимосвязь колебаний маятника и тележки. Ясно, что с увеличением φ амплитуда тележки также растет и может достигать значительных величин порядка 6 см. Зависимость 2, полученная численным решением системы (6), неплохо описывает данные эксперимента при амплитуде маятника, не превышающей значение $\pi/2$.

Процесс установления стационарных колебаний при различных значениях Ω показан на рис. 7. Переходный процесс характерен и для маятника (а), и для тележки (б). Отмечается существенное смещение положения, около которого происходят колебания тележки. Эта особенность движения тележки наблюдалась и в эксперименте.

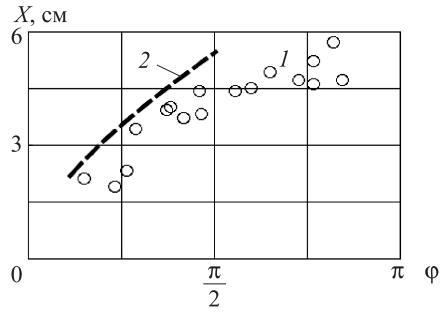


Рис. 6. Смещение тележки как функция угла отклонения маятника: эксперимент (1); численное решение уравнений (6) (2)

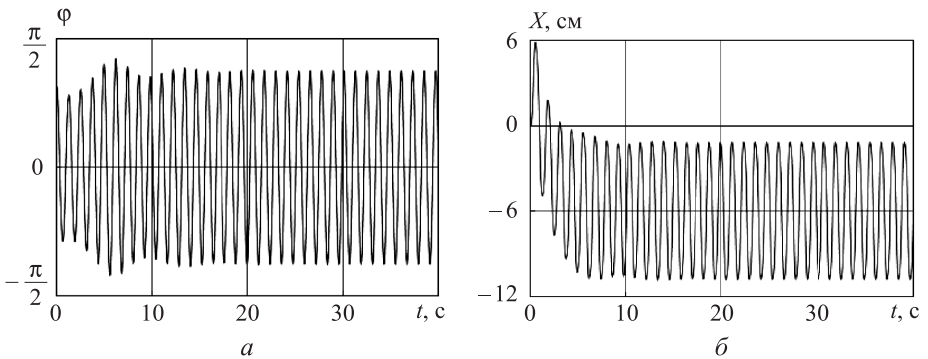


Рис. 7. Схемы (а, б) процесса установления стационарных колебаний системы маятник — тележка по результатам численного решения первого и второго уравнений (6) при $\Omega = 11,80; 10,50 \text{ с}^{-1}$, $\varphi_0 = 0,88$ ($x_0 = 0$)

Заключение. Экспериментально реализовано параметрическое возбуждение гравитационных поверхностных волн в прямоугольном сосуде при сохранении его горизонтальной степени свободы. Иссле-

дованы горизонтальные колебания прямоугольного сосуда с жидкостью, вызванные первой модой стоячих поверхностных гравитационных волн Фарадея. Проведено сравнение данных экспериментов для случаев связанных горизонтальных колебаний сосуда и параметрического возбуждения волн при возбуждении волн Фарадея в неподвижном в горизонтальном направлении сосуде.

Использована аналогия между движением маятника на тележке и связанными колебаниями жидкости в свободном сосуде при параметрическом возбуждении стоячих волн; рассмотрены резонансные колебания физического маятника и маятника на тележке около нижнего положения равновесия под действием вертикальных колебаний точки подвеса. Проведено сравнение экспериментальных данных с имеющейся теоретической моделью. Особое внимание в экспериментах уделено случаю связанных колебаний маятника на тележке, когда точка подвеса маятника имеет дополнительную степень свободы в горизонтальном направлении. Построена и численно исследована модель совместного движения систем; проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№11-01-00247).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва, Наука, 1977, 815 с.
- [2] Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing dynamics: theory and applications*. Cambridge Univ. Press, 2005, 948 p.
- [3] Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского. *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*, 2012. Спец. вып. № 58, с. 15–30.
- [4] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение колебаний тела с полостью, заполненной стратифицированной жидкостью. *Известия РАН. Механика жидкости и газов*, 1994, № 3, с. 53–60.
- [5] Калининко В.А. О разрушении волн Фарадея и формировании струйного всплеска. *Известия РАН. Механика жидкости и газов*, 2009, № 4, с. 112–122.
- [6] Chester W., Bones J.A. Resonant Oscillations of Water Waves. II. Experiment. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1968, vol. 306, pp. 23–39.
- [7] Bredmose H., Brocchini M., Peregrine D. H., Thais L. Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves. *J. Fluid Mech*, 2003, vol. 490, pp. 217–249.
- [8] Сретенский Л.Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде. *Известия АН СССР. Отд. техн. наук*, 1951, № 10, с. 1483–1494.
- [9] Herczyński A., Weidman P.D. Experiments on the periodic oscillation of free containers driven by liquid sloshing. *J. Fluid Mech*, 2012, vol. 693, pp. 216–242.

- [10] Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я. О срыве параметрических колебаний жидкости. *Известия РАН. Механика жидкости и газов*, 2010, № 1, с. 128–136.
- [11] Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А. Экспериментальное исследование поверхностных волн, возбуждаемых при резонансе Фарадея. *Известия РАН. Механика жидкости и газов*, 1995, № 1, с. 122–129.
- [12] Болотин В.В. О движении жидкости в колеблющемся сосуде. *Прикладная математика и механика*, 1956, т. 20, вып. 2, с. 293–294.
- [13] Benjamin T.B., Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical motion. *Proc. Roy. Soc.*, 1954, vol. A225, no. 1165, pp. 505–515.
- [14] Miles J.W., Henderson D. Parametrically forced surface wave. *Ann. Rev. Fluid Dyn. Palo Alto, Ca.: Annu. Revs Inc.*, 1990, vol. 22, pp. 143–165.
- [15] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. Москва, Наука, 1974, 504 с.
- [16] Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости. *Морские гидрофиз. исследования*, 1969, № 3(45), с. 87–97.
- [17] Xu X., Wiercigroch M. Approximate analytical solutions for oscillatory and rotational motion of a parametric pendulum. *Nonlinear Dyn.*, 2007, vol. 47, no. 1–3, pp. 311–320.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Калиниченко В.А., Аунг Наинг Со. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teorme/1138.html>

Калиниченко Владимир Анатольевич родился в 1956 г., окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1979 г. Д-р. физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана, старший научный сотрудник института проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН. Область научных интересов: гидродинамика. e-mail: kalin@ipmnet.ru

Аунг Наинг Со родился в 1985 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2012 г. Стажер-исследователь кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: гидродинамика. e-mail: kalarlay@mail.ru