УДК 531.01/534.112

Колебания упругих одномерных систем с трением

© А.А. Пожалостин, Б.Г. Кулешов, А.В. Паншина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрен разработанный приближенный аналитический метод для расчета малых свободных и вынужденных колебаний одномерных систем с сухим трением. Метод основан на приведении систем к механическим аналогам. Механический аналог представлен для каждого типа колебаний в виде бесконечной системы линейных осцилляторов в предположении равенства частот i-го тона свободных колебаний каждого вида системы i-му тону колебаний механического аналога. Использована модель сухого трения, которая была применена к расчету вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы в классическом учебнике С.П. Тимошенко «Колебания в инженерном деле». В этой модели сухое трение не зависит от скорости скольжения элементов колебательной системы. Предполагается, что сухое трение небольшое и что формы собственных колебаний не изменяются при учете трения. Впервые для учета сухого трения С.П. Тимошенко предложил энергетический метод и применил его для исследования вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы. Этот метод позволяет определять коэффициенты эквивалентного вязкого трения для каждого i-го тона свободных колебаний и заключается в приравнивании работы сил вязкого трения работе сил сухого трения за период свободных колебаний для каждого i-го номера. При построении методики расчета колебаний используем метод приведенных (эквивалентных) параметров. Представлены примеры продольных, крутильных и поперечных свободных и вынужденных колебаний упругих стержней, валов и балок с учетом сухого трения. Описаны трансцендентные уравнения для нахождения амплитуд и фазовых сдвигов свободных колебаний механических аналогов с вязким сопротивлением. Для вынужденных колебаний механических аналогов найдены частные решения, приведены трансцендентные уравнения для амплитуд и фазовых сдвигов и рассмотрены уравнения переходного процесса. Результаты расчетов можно использовать при исследовании динамики трубопроводов, например, нефтепроводов.

Ключевые слова: *стержень, консольная балка, вал, сухое трение, свободные и вынужденные колебания, приведенное вязкое сопротивление.*

Введение. В статье рассмотрен разработанный приближенный аналитический метод для расчета малых свободных и вынужденных колебаний одномерных систем с сухим трением [1–7]. Приведены примеры продольных, крутильных и поперечных колебаний упругих стержней, валов и балок. На практике с подобными задачами приходится сталкиваться, например, при ремонте газо- и нефтепроводных систем, в самолетостроении и в областях, где имеется достаточное количество длинных трубопроводов.

Использована модель сухого трения, которая была применена к расчету вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы в классическом учебнике С.П. Тимошенко [8]. В этой модели сухое трение не зависит от скорости скольжения элементов колебательной системы.

Основные допущения состоят в следующем:

1) сухое трение считается небольшим;

2) предполагается, что формы собственных колебаний не изменяются при учете трения.

Известно, что последнее условие используют при расчете колебаний механических систем с малым вязким сопротивлением, а также гидроупругости. Предполагается, что колебания малые, материал подчиняется закону Гука, однороден, депланация сечений стержня отсутствует, справедлива гипотеза сплошности среды.

Продольные колебания однородной консольной балки. Для построения методики расчета был использован метод приведенных (эквивалентных) параметров и энергетический метод. Для вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы энергетический метод применен С.П. Тимошенко [8].

Проиллюстрируем разработанную методику расчета на примере продольных колебаний однородной консольной балки (рис. 1).

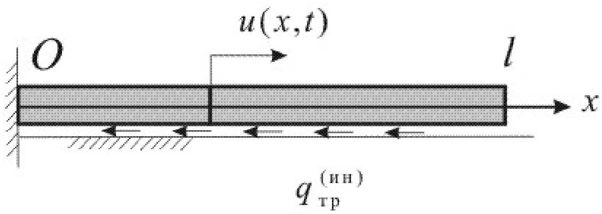

Рис. 1. Однородная консольная балка

Случай 1. Свободные колебания. Предположим, что на балку действует равномерно распределенная сила сухого трения интенсивностью $q_{\text{тр}}^{(\text{ин})} = \dfrac{G}{l}\delta$, где G — сила тяжести стержня; l — его длина, δ — коэффициент кулонова трения 1-го рода.

Дифференциальное уравнение продольных колебаний имеет вид [8–13]

$$EF_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где μ_0 — погонная масса; EF_0 — жесткость стержня в продольном направлении.

Частное решение уравнения (1), согласно методу Фурье [8, 11], представим в виде

$$u(x,t) = f(x)s(t),$$

где $f(x)$ — форма колебания; $s(t)$ — временной множитель.

Запишем граничные условия системы (см. рис. 1) для функции f:

$$f(0) = 0, \quad f'(l) = 0.$$

Решение $f_i(x)$ имеет вид [8]

$$f_i = \sin\frac{(2i-1)}{2}\frac{\pi x}{l}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

На первом этапе решения задачи сила сухого трения интенсивностью $q_{\text{тр}}^{(\text{ин})}$ не рассматривается.

Функция $s_i(t) = A_i\cos(\omega_i t - \alpha_i)$, где A_i и α_i — константы, подлежащие определению; ω_i — частота i-го тона свободных колебаний.

Решение $u(x, t)$ должно удовлетворять следующим начальным условиям:

$$u(x,t) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \psi(x).$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x)\cos(\omega_i t - \alpha_i).$$

Известно [8, 9], что функции $f_i(x)$ удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\int_0^l \mu_0 f_i(x) f_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \|f_i\|, & i = j. \end{cases}$$

Построим для колебаний однородной консольной балки приведенную эквивалентную систему. Основным постулатом при этом является равенство частот собственных колебаний консольной балки (уравнение (1)) и ее механического аналога [10]. Механический аналог исходной системы представим в виде бесконечной системы линейных осцилляторов (рис. 2).

Постулируя равенство собственных частот колебаний системы и механического аналога и сравнивая кинетические и потенциальные энергии системы, находим [10]

$$m_i^0 = \int_0^l \mu_0 f_i^2(x)dx, \quad c_i^0 = \int_0^l EF_0(f_i')^2 dx,$$

где m_i^0, c_i^0 — приведенные масса и жесткость механического аналога.

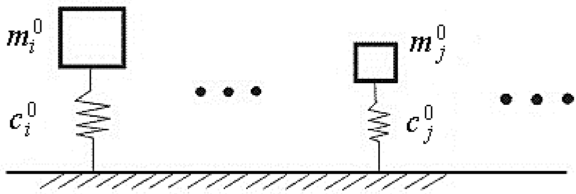

Рис. 2. Механический аналог

Система собственных функций $f_i(x)$, $i=1, 2,\ldots$, полна и обладает свойством ортогональности [9].

Для учета сил сухого трения разложим $q_{\text{тр}}^{(\text{ин})}$ в ряд по функциям $f_i(x)$:

$$q_{\text{тр}}^{(\text{ин})} = \frac{G}{l}\delta = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x),$$

получим

$$a_i = \frac{G}{\pi}\frac{4\delta}{(2i-1)l}. \qquad (2)$$

Воспользуемся энергетическим методом для определения эквивалентного вязкого трения μ_i для каждого номера i. Приравняем работу сил вязкого трения $A_{\text{тр}}$ за период $T_i = \dfrac{2\pi}{\omega_i}$ свободных колебаний работе сил сухого трения (2) для каждого номера i:

$$\int_0^l \int_0^{T_i} \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt = 4a_i \int_0^l A_i f_i(x)dx,$$

где $u_i = A_i f_i(x)\cos(\omega_i t + \alpha_i)$.

Отсюда коэффициент приведенного линейного сопротивления

$$\mu_i = \frac{4a_i\delta}{T_i\pi(2i-1)A_i}.$$

Дифференциальное уравнение для i-го осциллятора имеет вид

$$\ddot{y}_i + 2n_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0. \qquad (3)$$

Здесь

$$2n_i = \frac{\mu_i^0}{m_i^0}, \quad \mu_i^0 = \mu_i\left\|f_i(x)\right\| \quad (\left\|f_i(x)\right\| \text{ — норма функции } f_i(x)).$$

Запишем решение уравнения (3):

$$y_i(t) = A_i e^{-n_i t} \cos(\omega_{1i} t - \alpha_i), \tag{4}$$

где

$$\omega_{1i}^2 = \omega_i^2 - n_i^2.$$

Отметим, что величины n_i и ω_{1i} при таком подходе обратно-пропорциональны амплитуде A_i. Частота ω_{i1} зависит от неизвестной постоянной A_i.

Запишем, используя выражение (4), общее решение уравнения (1) с учетом трения

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x) e^{-n_i t} \cos(\omega_{i1} t - \alpha_i).$$

Удовлетворим начальным условиям:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x) \cos\alpha_i,$$

$$\psi(x) = -\sum_{i=1} A_i f_i(x) n_i \cos\alpha_i + \sum_{i}^{\infty} A_i f_i(x) \omega_{1i} \cos\alpha_i. \tag{5}$$

Используя условия ортогональности функций $f_i(x)$, из первого условия (5) получим

$$A_j = \frac{\int_0^l \varphi(x) f_i(x) dx}{\|f_j\| \cos\alpha_j}.$$

Из второго условия (5) найдем

$$\psi(x) = -\sum_{i=1}^{\infty} b_{1i} f_i(x) n_i + \sum_{1}^{\infty} A_i f_i(x) \omega_{1i} \alpha_i.$$

С учетом условий ортогональности имеем

$$\int_0^l \psi(x) f_j(x) dx = \left[-b_{1j} n_j + A_j \omega_{1j} \sin\alpha_j \right] \|f_j\|.$$

Обозначим

$$\frac{\int_0^l \psi(x) f_j(x) dx}{\|f_j\|} = b_{2j},$$

тогда

$$A_j \sin\alpha_j = \frac{1}{\omega_{1j}}\left(b_{2j} + b_{1j}n_j\right).$$

Кроме того, $A_j \cos\alpha_j = b_{1j}$. Отсюда, возводя последние два равенства в квадрат и суммируя их, получим

$$A_j = \sqrt{b_{1j}^2 A_j^2 + \frac{1}{\omega_{1j}^2}\left(b_{2j} + b_{1j}n_j\right)^2}\,. \tag{6}$$

Решая трансцендентное уравнение (6), находим амплитуду A_j и фазовый сдвиг $\alpha_j = \arccos\dfrac{b_{1j}}{A_j}$.

Случай 2. Вынужденные колебания упругой системы с сухим трением. Этот режим колебаний рассмотрим также на примере продольных колебаний однородной консольной балки (см. рис. 1).

Учтем внешнее воздействие $F(t) = F_0\cos(pt + \beta)$. Сосредоточенная сила $F(t)$ приложена в сечении x_i вдоль консоли, F_0 — амплитуда внешней силы, p — частота изменения силы $F(t)$. При этом все допущения остаются прежними. Воспользуемся механическим аналогом системы. Для каждого осциллятора с номером i правая часть уравнения его движения определяется с помощью обобщенной силы [5].

Разложим силы сухого трения в ряд по собственным функциям однородной краевой задачи

$$f_i(x) = \sin\frac{\pi x}{2l}(2i - 1)\,.$$

Тогда

$$\frac{G}{l}\delta = \sum_i a_i \sin\frac{\pi x}{l}\left(2i - 1\right) \text{ и } a_i = \frac{4G\delta}{l\pi(2i-1)}\,.$$

В этом случае коэффициент приведенного вязкого сопротивления μ_i находим из условия равенства за период $T = 2\pi/p$ вынужденных колебаний работы сил линейно-вязкого сопротивления и работы сил сухого трения для каждого номера i:

$$\int_0^T\int_0^l \mu_i f_i^2(x) p^2 \sin^2(pt + \alpha)\,dx\,dt = 4\int_0^l a_i f_i(x)\,dx.$$

Отсюда погонный коэффициент вязкости

$$\mu_i = \frac{64G\delta}{B_i(2i-1)^2\pi^3 l}\,.$$

Вычислим приведенный коэффициент вязкого сопротивления μ_i^0 для механического аналога. Функция Рэлея для эквивалентной системы

$$\Phi_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \mu_i^0 \dot{y}_i^2 . \tag{7}$$

Функция Рэлея для продольных колебаний балки

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \mu_i \dot{u}^2(x,\, t) dx.$$

С учетом ортогональности функций $f_i(x)$ i-е слагаемое в разложении (8) имеет вид

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\left[\int_0^l \mu_i f_i^2 dx\right] \dot{s}_i^2. \tag{8}$$

Сравнивая выражения (7) и (8), получаем

$$\mu_i^0 = \mu_i \left\| f_i \right\|.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний для эквивалентной системы примет вид

$$m_i^0 \ddot{y}_i + \mu_i^0 \dot{y}_i + c_i^0 y_i = Q_i, \tag{9}$$

где

$$Q_i = \frac{\sum \overline{F}_k \, \delta \overline{r}_k}{\delta y_i} = +\int_0^l F(\delta(x - x_i) f_i(x) dx, \tag{10}$$

или

$$Q_i = F_0 \cos(pt + \beta) f_i(x) .$$

Уравнение (9) с учетом выражения (10) принимает вид

$$\ddot{y}_i + 2n_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = h_i \cos(pt + \alpha), \tag{11}$$

где $2n_i = \mu_i^0 / m_i^0$, $\omega_i^2 = c_i^0 / m_i^0$ — собственные частоты продольных колебаний без трения.

Частное решение уравнения (11) представим следующим образом:

$$y_i^* = B_i \cos(pt + \alpha - \varepsilon_i),$$

где B_i — амплитуда вынужденных колебаний:

$$B_i = \frac{h_i}{\sqrt{\left(\omega_i^2 - p^2\right)^2 + 4n_i^2 p^2}}, \quad h_i = \frac{F_0 f_i(x_i)}{m_i^0},$$

или

$$B_i = \pm \frac{1}{\left(\omega_i^2 - p^2\right)} \sqrt{h_i^2 - \eta_i^2 p^2}.$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_i = \frac{2n_i p}{\left(\omega_i^2 - p^2\right)} = \frac{\eta_i}{A_i} \frac{p}{\left(\omega_i^2 - p^2\right)},$$

где η_i — некоторые константы.

Рассмотрим теперь уравнение переходного процесса. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{-n_i t} \cos(\omega_{1i} t - \alpha_i) f_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} B_i f_i(x) \cos(pt + \alpha - \varepsilon_i).$$

Постоянные A_i и α_i определяем из следующих начальных условий:

$$\varphi(x) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cos(\alpha - \varepsilon_i) f_i(x)\right],$$

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[-A_i n_i e^{-n_i t} \cos(\omega_{1i} t - \alpha_i) - \omega_{1i} A_i e^{-n_i t} \sin\left(\omega_{1i} t - \alpha_i\right)\right] f_i(x) +$$

$$+ \sum_i B_i f_i(x) p \sin(pt + \alpha - \varepsilon_i),$$

$$\psi(x) = -\sum_i \left(A_i n_i \cos \alpha_i + \omega_{1i} A_i \sin \alpha_i\right) f_i(x) + \sum_i B_i p \sin(\alpha - \varepsilon_i) f_i(x),$$

$$\int_0^l \varphi(x) f_j(x) dx = \left[A_j \cos \alpha_j + B_j \cos(\alpha_j - \varepsilon_i)\right] \left\| f_j \right\|,$$

$$A_j \cos \alpha_j = \frac{\int_0^l \varphi(x) f_j(x) dx}{\left\| f_j \right\|} - B_j \cos(\alpha_j - \varepsilon_j),$$

$$\int_0^l \psi(x) f_j(x) dx =$$

$$= -\left(A_j n_j \cos \alpha_j + \omega_{1j} A_j \sin \alpha_j\right) \left\| f_j m \right\| + B_j p \sin\left(\alpha_j - \varepsilon_j\right) \left\| f_j \right\|,$$

$$\frac{\int_0^l \psi(x) f_j(x)dx}{\left\| f_j(x) \right\|} = -n_j \left[\frac{\int_0^l \varphi(x) f_j(x)dx}{\left\| f_j \right\|} - B_j \cos(\alpha_j - \varepsilon_j) \right] -$$

$$- \omega_{1j} A_j \sin \alpha_j + B_j p \sin\left(\alpha_j - \varepsilon_j\right),$$

$$A_j \sin \alpha_j = -\frac{1}{\omega_{1j}} \frac{\int_0^l \psi(x) f_j(x)dx}{\left\| f_j(x) \right\|} - \frac{n_j}{\omega_{1j}} \frac{\int_0^l \varphi(x) f_j(x)dx}{\left\| f_j \right\|} +$$

$$+ \frac{B_j}{\omega_{1j}} \left[n_j \cos\left(\alpha_j - \varepsilon_j\right) + p \sin(\alpha_j - \varepsilon_j) \right],$$

$$A_j^2 = \left\{ \frac{\int_0^l \varphi(x) f_j(x)dx}{\left\| f_j \right\|} - B_j \cos\left(\alpha_j - \varepsilon_j\right)^2 \right\} + \frac{1}{\omega_{1j}^2} \left\{ \frac{\int_0^l \psi(x) f_j(x)dx}{\left\| f_j(x) \right\|} + \right.$$

$$\left. + n_j \frac{\int_0^l \varphi(x) f_j(x)dx}{\left\| f_j \right\|} - B_j \left[n_j \cos\left(\alpha_j - \varepsilon_j\right) \right] + p \sin(\alpha_j - \varepsilon_j) \right\}.$$

Решая это трансцендентное уравнение, вычисляем A_j. После этого находим α_j и уравнение переходного процесса.

Заключение. Представленная модель сухого трения позволяет рассчитывать в первом приближении свободные и вынужденные колебания таких механических систем, как, например, газо- и нефтепроводные системы, а также трубопроводные системы в аэро- и ракетостроении.

Исследования проводились при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ № НШ — 4748. 2012.8.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пожалостин А.А., Петров Е.П. Аналитический метод расчета декремента колебаний упругого бака с жидкостью. *Сб. тр. 27-й Российской школы «Наука и технология»*. Миасс, 2007, с. 559.

[2] Pozgalostin A.A., Petrov E.P. Analytical method of calculating the transfer functions of damper in pipe. *Int. J. of Vibration and Acoustics, American Society of Mechanical Engineers*, Paper №.VIB-08-1195, December 2008.

[3] Пожалостин А.А., Кулешов Б.Г., Паншина А.В. *Колебания упругих систем с сухим трением*. Деп. в ВИНИТИ. Москва, 2011, № 324-В2011, 8 с.

[4] Кулешов Б.Г., Пожалостин А.А., Паншина А.В. *Поперечные колебания упругой балки с сухим трением. Тез. докл. X Всерос. съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. Нижний Новгород, Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2011, с. 101, 102.

[5] Пожалостин А.А., Паншина А.В. Вынужденные колебания упругих одномерных систем с сухим трением. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Инженерный журнал: Наука и инновации*, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, № 7, с. 21.

[6] Пожалостин А.А., Шевченко А.А. Вынужденные крутильные колебания прямого вала с сухим трением. *Студ. науч. вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2012, т. 12, ч. 4, с. 100.

[7] Пожалостин А.А., Паншина А.В. Применение принципов классической механики к динамике упругого тела. Современные проблемы механики и ее преподавания в вузах. *Докл. IV Всероссийского совещания-семинара заведующих кафедрами и ведущих преподавателей теоретической механики вузов Российской Федерации*, Новочеркасск, ЮРГТУ, 2010, с. 194–197.

[8] Тимошенко С.П. *Колебания в инженерном деле*. Москва, Наука, 1967, 439 с.

[9] Бабаков И.М. *Теория колебаний*. Москва, Дрофа, 2004, 592 с.

[10] Шиманский Ю.А. *Динамический расчет судовых конструкций*. Ленинград, Судпромгиз, 1963, 253 с.

[11] Саратов Ю.С. *Основы теории колебаний системы с сосредоточенными параметрами*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1995, 52 с.

[12] Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. *Теория колебаний*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 272 с.

[13] Пановко Я.Г. *Введение в теорию механических колебаний*. Москва, Наука, 1991, 256 с.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Пожалостин А.А., Кулешов Б.Г., Паншина А.В. Колебания упругих одномерных систем с трением. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1136.html

Пожалостин Алексей Алексеевич родился в 1940 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1963 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 печатных работ в области гидроупругости. e-mail: a.pozhalostin@mail.ru

Кулешов Борис Георгиевич окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана. Старший преподаватель кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана, специализируется в области проектирования космических аппаратов. e-mail:kafsm1@sm.bmstu.ru

Паншина Алла Викторовна окончила механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедру прикладной механики. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: panalv@mail.ru