УДК 531.66

Удар тела о препятствие

© В.В. Лапшин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена плоская задача упругого удара тела о шероховатую поверхность (препятствие) в рамках стереомеханической модели удара (модели удара Ньютона). Предполагается, что контакт тела с поверхностью осуществляется в одной точке. Формулы для расчета параметров удара и характеристик движения тела после удара зависят от особенностей скольжения пятна контакта в процессе удара. Скольжение может прекратиться в фазе деформации или в фазе восстановления, может продолжаться в течение всего удара в одном направлении, возможно и изменение направления скольжения в процессе удара. Показано, что тип удара или характер движения пятна контакта в процессе удара определяется с помощью графической картины на плоскости параметров угол трения и угол падения, который определяет направление скорости точки контакта тела с поверхностью до удара. В качестве границ, разделяющих области, соответствующие различным типам удара, выступают кривые, поведение которых зависит от положения точки контакта относительно центра масс тела, радиуса инерции тела, угла трения и коэффициента восстановления при ударе.

Ключевые слова: *удар, сухое трение, стереомеханическая модель.*

Введение. Явление удара часто встречается при движении механических систем, в том числе при работе различных машин и механизмов [1–23]. Известны различные модели удара [1, 3, 4, 7, 9, 13–16, 18, 21–23].

В работе рассмотрен косой удар тела о неподвижную шероховатую поверхность (препятствие) в предположении, что тело совершает плоское движение и контакт имеет точечный характер. Предполагается, что ударные силы взаимодействия существенно больше остальных сил и действием последних можно пренебречь.

Наиболее точная модель удара связана с исследованием динамики движения вязкоупругопластичных деформируемых тел [4, 7, 9, 16], сложна и требует большого объема численных расчетов.

Модель удара Ньютона (стереомеханический удар) [15] основана на гипотезе, что время удара бесконечно мало и перемещением тела в процессе удара можно пренебречь. Ньютон сделал предположение, что при коллинеарном ударе коэффициент восстановления (отношение модулей скоростей тела после удара и до удара) определяется материалом, из которого изготовлены тела, и не зависит от скорости соударения. Он разделил процесс удара на две фазы. В фазе деформации скорость тела уменьшается до нуля и накапливается энергия упругих деформаций. В фазе восстановления накопленна потенциальная энергия освобождается, тело разгоняется и движется в противоположном направлении.

Пуассон [23] ввел другое определение коэффициента восстановления: отношение импульсов ударной силы взаимодействия в фазах восстановления и деформации. При коллинеарном ударе эти два определения коэффициента восстановления совпадают. В задаче о косом ударе тела о неподвижное препятствие (движение тела до удара и после удара произвольное) эти определения не эквивалентны и следует использовать определение Пуассона.

Модель удара Ньютона не позволяет определить многие важные параметры удара, его продолжительность, максимальную силу взаимодействия тел, их деформацию и т. д.

Широко распространена линейная вязкоупругая модель удара Кельвина — Фойхта [4, 7, 9, 16], согласно которой контактная сила взаимодействия тел при ударе сводится к линейной силе упругости и сопротивления $F = F(x, \dot{x}) = -cx - \mu\dot{x}$, где c и μ — постоянные коэффициенты упругости и сопротивления; x — деформация тела и препятствия при ударе. В процессе удара значение $x \geq 0$. Уравнение движения тела при ударе является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и имеет аналитическое решение. Коэффициент восстановления при ударе постоянный. Модель противоречит естественным физическим представлениям. Сила взаимодействия тел в начале и конце удара равна силе сопротивления и отлична от нуля. Если в процессе деформации меняется пятно контакта, предположение о линейной зависимости упругой силы взаимодействия и силы сопротивления от деформации является некорректным.

Герц [21] предположил, что упругая сила контактного взаимодействия тел при ударе зависит от деформации x так же, как и в случае статического равновесия. Он показал, что если тело и препятствие в окрестности точки контакта имеют сферические поверхности и их деформации малы по сравнению с радиусами, то с учетом увеличения пятна контакта и ростом деформации x сила упругого взаимодействия $F(x) = -cx^{3/2}$, где c — константа, ее значение определяется радиусами этих сферических поверхностей и материалом, из которого изготовлены тела. Отметим, что Герц рассматривал абсолютно упругий удар. В этом случае уравнение движение тела имеет интеграл энергии и интегрируется в квадратурах, т. е. его решение сводится к вычислению определенного интеграла.

Экспериментальные данные, приведенные в монографии Гольдсмита [4], показывают, что с ростом скорости соударения тел коэффициент восстановления монотонно убывает.

Хант и Кроссли [6, 22] предложили модель, которая является развитием модели Герца на случай, когда тело и препятствие подчиняются законам вязкоупругого деформирования. В рамках этой модели коэффициент восстановления убывает с ростом скорости соударения, и результаты согласуются с экспериментальными данными [4].

В волновой теории удара [4, 7, 9, 16] тела являются упругими и отсутствует остаточная деформация тел. Потеря энергии при ударе обусловлена возникающими при ударе упругими волнами распространения деформации. Скорость распространения этих волн зависит от свойств материала. В инженерной практике на основе волновой теории проводят расчет удара стержней о препятствие. Если время прохождения упругих волн через все тело меньше продолжительности удара и происходит несколько отражений волн за время удара, влиянием упругих волн можно пренебречь [4].

Многие прикладные задачи можно исследовать на основе теории удара Ньютона [1–23]; при условии что деформации при ударе малы, можно пренебречь волновыми процессами и остаточной деформацией. Эти предположения обусловливают ограничения на скорость соударения, используемые материалы, форму и размеры тела. Модель справедлива для компактных тел, изготовленных из достаточно жесткого материала. Скорость соударения должна быть достаточно высокой, чтобы ударные силы достигали больших значений и можно было пренебречь конечными силами, но в то же время и достаточно малой, чтобы не вызвать значительной деформации тела или его разрушения. Для того чтобы предположение о постоянстве коэффициента восстановления выполнялось, необходимо ограничиться узким диапазоном скоростей соударения.

Аналитическое решение плоской задачи об ударе тела о шероховатую поверхность при точечном контакте тела с поверхностью получено в [14, 17]. В этом случае однозначно можно определить импульс ударной силы реакции и выяснить характер движения (скорости) тела после удара. В настоящей работе показано, что тип удара или характер движения пятна контакта в процессе удара можно определить с помощью графических зависимостей на плоскости параметров угол трения φ и угол падения β (который определяет направление скорости пятна контакта тела с поверхностью до удара). Границами, разделяющими области, соответствующие различным типам удара, служат кривые, поведение которых зависит от положения точки контакта относительно центра масс тела, радиуса инерции тела, угла трения и коэффициента восстановления при ударе.

Рассматриваемая статья является естественным продолжением работы [10], в которой аналогичные результаты были получены для абсолютно неупругого удара.

Исследование процесса удара. Рассмотрим плоский упругий удар тела массой m о неподвижную шероховатую поверхность (рис. 1). Пусть C — центр масс тела, S — точка контакта тела с поверхностью

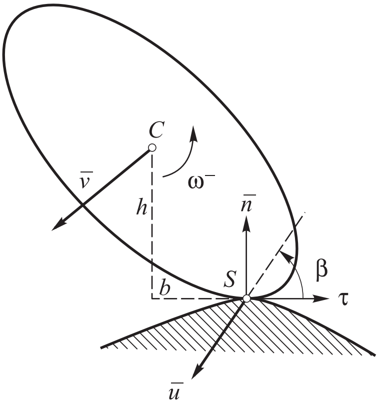

Рис. 1. Схема взаимодействия тела с препятствием (неподвижной поверхностью)

при ударе. Радиус инерции тела относительно центра масс обозначим ρ. Единичные вектора $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ определяют касательное и нормальное направление к поверхности в точке контакта S. Обозначим $\bar{R} = (R_\tau, R_n)$ — касательный и нормальный импульсы ударной силы реакции в точке S. Положение центра масс C относительно точки S определяется параметрами $h \geq 0$ и b. Не нарушая общности, можно считать, что центр масс C лежит слева от точки контакта S, при этом

$$b \geq 0. \qquad (1)$$

Для случая $b < 0$ (центр масс лежит справа от точки контакта) все результаты могут быть получены из соображений симметрии.

Обозначим $\bar{v} = (v_\tau, v_n)$ — касательную и нормальную скорости центра масс, $\bar{u} = (u_\tau, u_n)$ — касательную и нормальную скорости точки контакта S, ω — угловую скорость тела. За положительное примем направление угловой скорости против хода часовой стрелки. Скорости точек C и S связаны кинематическими соотношениями

$$u_\tau = v_\tau + \omega h, \quad u_n = v_n + \omega b. \qquad (2)$$

Процесс удара разделим на две фазы: в фазе деформации нормальная составляющая скорости точки контакта уменьшается до нуля, оставаясь отрицательной, а в фазе восстановления нормальная составляющая скорости точки контакта увеличивается от нуля до некоторого положительного значения.

Нормальная скорость точки S до удара отрицательна, в конце фазы деформации равна нулю, после удара положительна, а нормальная составляющая импульса ударной силы реакции — не отрицательна:

$$u_n^- < 0, \; u_n' = 0, \quad u_n^+ > 0, \; R_n \geq 0. \qquad (3)$$

Значения всех скоростей до удара будем обозначать верхним индексом «–», значения скоростей после удара верхним индексом «+», а значения скоростей в конце фазы деформации (или начале фазы восстановления) верхним индексом «′».

Уравнения удара (уравнения движения центра масс и изменения кинетического момента тела относительно центра масс) в фазе деформации имеют вид

$$m(v'_\tau - v^-_\tau) = R'_\tau,\ \ m(v'_n - v^-_n) = R'_n,$$
$$m\rho^2(\omega' - \omega^-) = R'_n b + R'_\tau h, \tag{4}$$

а в фазе восстановления —

$$m(v^+_\tau - v'_\tau) = R''_\tau,\ \ m(v^+_n - v'_n) = R''_n,$$
$$m\rho^2(\omega^+ - \omega') = R''_n b + R''_\tau h. \tag{5}$$

Здесь R'_n, R'_τ, R''_n, R''_τ — нормальные и касательные составляющие импульса ударной силы реакции в фазах деформации и восстановления соответственно. При этом для нормальных составляющих [23] $R''_n = kR'_n$, где $0 \le k \le 1$ — коэффициент восстановления при ударе. При абсолютно неупругом ударе $k = 0$, а при абсолютно упругом ударе $k = 1$.

Учитывая соотношения (2)–(3), из выражений (4)–(5) получаем формулы для изменения скорости точки контакта S в фазе деформации:

$$m\rho^2(u'_\tau - u^-_\tau) = R'_\tau(\rho^2 + h^2) + R'_n bh,$$
$$-m\rho^2 u^-_n = R'_n(\rho^2 + b^2) + R'_\tau bh \tag{6}$$

и фазе восстановления

$$m\rho^2(u^+_\tau - u'_\tau) = R''_\tau(\rho^2 + h^2) + kR'_n bh,$$
$$m\rho^2 u^+_n = kR'_n(\rho^2 + b^2) + R''_\tau bh. \tag{7}$$

Отсюда находим

$$m\rho^2(u^+_\tau - u^-_\tau) = R_\tau(\rho^2 + h^2) + R_n bh,$$
$$m\rho^2(u^+_n - u^-_n) = R_n(\rho^2 + b^2) + R_\tau bh,$$

где $R_n = (1+k)R'_n$; $R_\tau = R'_\tau + R''_\tau$.

Примем гипотезу о том, что при ударе трение сводится к сухому трению [18, 23] с коэффициентом трения f:

$$|R_\tau| \le f R_n.$$

Если точка контакта в процессе удара в течение некоторого (бесконечно малого) интервала времени имеет постоянное направление касательной скорости, в этой фазе удара $R_\tau = -f R_n \operatorname{sign} u_\tau$.

В результате удара точка контакта S может в касательном к поверхности направлении остановиться или скользить в течение всего удара. При этом если в процессе удара под действием трения касательная скорость u_τ становится равной нулю в некоторый момент времени $t^* \in [t^-, t^+]$, это не означает, что в дальнейшем в процессе удара она останется равной нулю. Действительно, чтобы $u_\tau \equiv 0$ при $t \in [t^*, t^+]$ должны выполняться следующие соотношения: $m\rho^2(u_\tau^+ - u_\tau^*) = 0 = R_\tau^{**}(\rho^2 + h^2) + R_n^{**}bh$, $\left|R_\tau^{**}\right| \le f R_n^{**}$, где $u_\tau^* = 0$ — касательная скорость точки контакта в момент t^*, а R_τ^{**}, R_n^{**} — импульсы ударной силы реакции за время $[t^*, t^+]$. Отсюда

$$f \ge \frac{bh}{\rho^2 + h^2}. \tag{8}$$

Если условие (8) нарушено, то в силу геометрического положения тела точка контакта при $t \in [t^*, t^+]$ скользит направо (см. рис. 1), т. е. $u_\tau > 0$, так как $R_\tau^{**} = -fR_n^{**}$ и $m\rho^2(u_\tau^+ - u_\tau^*) = m\rho^2 u_\tau^+ = R_\tau^{**}(\rho^2 + h^2) + R_n^{**}bh > 0$. В этом случае произойдет изменение направления скольжения точки контакта. При $t^* \in [t^-, t^+]$ точка контакта скользит налево, т. е. $u_\tau < 0$, или с отрицательной скоростью, которая под действием силы трения уменьшается до нуля, а затем начинает скользить направо с увеличивающейся положительной скоростью.

Перейдем к рассмотрению различных типов удара в зависимости от того, как осуществляется скольжение в процессе удара.

Скольжение прекращается в фазе деформации. При этом $u' = u_\tau^+ = 0.$ Из уравнений удара (6)–(7) получаем

$$R'_n = m\frac{-u_n^-(\rho^2 + h^2) + u_\tau^- bh}{\rho^2 + b^2 + h^2}, \quad R'_\tau = m\frac{u_n^- bh - u_\tau^-(\rho^2 + b^2)}{\rho^2 + b^2 + h^2},$$

$$R''_\tau = -\frac{bh}{\rho^2 + h^2}kR'_n, \quad u_n^+ = \frac{k}{m}(\rho^2 + b^2 + h^2)R'_n.$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{gathered} u_n^- \le 0, \quad f \ge \frac{bh}{\rho^2 + h^2}, \quad u_n^-(\rho^2 + h^2) - u_\tau^- bh \le 0, \\ u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] \le 0, \\ u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] \ge 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Скольжение прекращается в фазе восстановления. При этом $\operatorname{sign} u_\tau^- = \operatorname{sign} u'_\tau$, $u_\tau^+ = 0$, $R'_\tau = -f R'_n \operatorname{sign} u_\tau$. Из уравнений удара (6)–(7) имеем

$$R'_n = \frac{-m\rho^2 u_n^-}{\rho^2 + b^2 - fbh \operatorname{sign} u_\tau}, \quad u'_\tau = u_\tau^- - u_n^- \frac{bh - f(\rho^2 + h^2)\operatorname{sign} u_\tau}{\rho^2 + b^2 - fbh \operatorname{sign} u_\tau},$$

$$R''_\tau = -\frac{kR'_n bh + m\rho^2 u'_\tau}{\rho^2 + h^2}, \quad u_n^+ = \frac{kR'_n(\rho^2 + b^2) + R''_\tau bh}{m\rho^2}.$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия:

а) при скольжении направо

$$u_n^- \le 0, \quad u_\tau^- > 0, \quad \frac{bh}{\rho^2 + h^2} \le f \le \frac{\rho^2 + b^2}{bh},$$

$$u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] < 0, \tag{10}$$

$$(1+k)u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] \ge 0;$$

б) при скольжении налево

$$u_n^- \le 0, \; u_\tau^- < 0, \quad f \ge \frac{bh}{\rho^2 + h^2},$$

$$u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] > 0, \tag{11}$$

$$(1+k)u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] \le 0.$$

Полное скольжение (без изменения направления). При этом $\operatorname{sign} u_\tau^- = \operatorname{sign} u_\tau^+$, $R'_\tau = -f R'_n \operatorname{sign} u_\tau$, $R''_\tau = -f R''_n \operatorname{sign} u_\tau = -f kR'_n \operatorname{sign} u_\tau$. Из уравнений удара (6)–(7) получаем

$$R'_n = \frac{-m\rho^2 u_n^-}{\rho^2 + b^2 - fbh \operatorname{sign} u_\tau}, \quad u'_\tau = u_\tau^- - u_n^- \frac{bh - f(\rho^2 + h^2)\operatorname{sign} u_\tau}{\rho^2 + b^2 - fbh \operatorname{sign} u_\tau},$$

$$u_\tau^+ = u'_\tau + \frac{kR'_n[bh - f(\rho^2 + h^2)\operatorname{sign} u_\tau]}{m\rho^2},$$

$$u_\tau^+ = u_\tau^- - (1+k)u_n^- \frac{bh - f(\rho^2 + h^2)\operatorname{sign} u_\tau}{\rho^2 + b^2 - fbh \operatorname{sign} u_\tau}, \; u_n^+ = -k\, u_n^-.$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия:

а) при скольжении направо

$$u_n^- \le 0, \quad u_\tau^- > 0, \quad f \le \frac{\rho^2 + b^2}{bh},$$

$$u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] < 0, \tag{12}$$

$$(1+k)u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] < 0;$$

б) при скольжении налево

$$u_n^- \le 0, \quad u_\tau^- < 0,$$
$$(1+k)u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] > 0. \tag{13}$$

Изменение направления скольжения. В процессе удара точка контакта S сначала скользит налево, а затем направо. Этот случай имеет место, когда не выполнено условие (8) или

$$f < \frac{bh}{\rho^2 + h^2} < \frac{\rho^2 + b^2}{bh}.$$

Здесь кроме (8) использовано неравенство

$$\frac{bh}{\rho^2 + h^2} < \frac{\rho^2 + b^2}{bh}, \tag{14}$$

которое всегда справедливо. Действительно, в силу выражения (1) значение $b \ge 0$ и неотрицательности h оно эквивалентно неравенству $b^2h^2 < (\rho^2 + b^2)(\rho^2 + h^2)$, где радиус инерции $\rho \ne 0$.

Изменение направления скольжения в фазе деформации. При этом $t^- \le t^* \le t' \le t^+$ и $u_n^* \le 0$, где t^* — момент изменения направления скольжения в процессе удара.

На первом этапе фазы деформации при $t \in [t^-, t^*]$ точка контакта скользит налево, $u_\tau^- < 0$, $u_\tau^* = 0$, $R_\tau'^* = fR_n'^*$, где u_n^*, u_τ^* — скорость точки контакта S в момент смены направления скольжения; $R_n'^*$, $R_\tau'^*$ — импульсы ударной реакции в течение первого этапа фазы деформации. Из уравнений удара для первого этапа фазы деформации получаем

$$R_n'^* = \frac{-m\rho^2 u_\tau^-}{bh + f(\rho^2 + h^2)}, \qquad u_n^* = u_n^- - u_\tau^- \frac{[\rho^2 + b^2 + fbh]}{bh + f(\rho^2 + h^2)}.$$

На втором этапе фазы деформации при $t \in [t^*, t']$ точка контакта скользит направо, $u_\tau^* = 0$, $u_\tau' > 0$, $u_n' = 0$, $R_\tau'^{**} = -fR_n'^{**}$, где $R_n'^{**}$,

R'^{**}_τ — импульсы ударной реакции в течение второго этапа фазы деформации. Из уравнений удара для второго этапа фазы деформации получаем

$$R'^{**}_n = \frac{-m\rho^2 u^*_n}{\rho^2 + b^2 - fbh},$$

$$u'_\tau = -u^*_n \frac{[bh - f(\rho^2 + h^2)]}{\rho^2 + b^2 - fbh}.$$

При $t \in [t', t^+]$ точка контакта скользит направо, $u'_\tau \geq 0$, $u^+_\tau > 0$, $u'_n = 0$, $R''_\tau = -fR''_n$, $R''_n = kR'_n$, $R'_n = R'^*_n + R'^{**}_n$. Из уравнений удара для фазы восстановления (6) получаем

$$u^+_\tau = u'_\tau + \frac{1}{m\rho^2} kR'_n[bh - f(\rho^2 + h^2)],$$

$$u^+_n = \frac{1}{m\rho^2} kR'_n(\rho^2 + b^2 - fbh).$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$u^-_n \leq 0,\ \ u^-_\tau < 0,\ \ f < \frac{bh}{\rho^2 + h^2},$$
$$u^-_n[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u^-_\tau[\rho^2 + b^2 + fbh] \leq 0. \tag{15}$$

Изменение направления скольжения в фазе восстановления. При этом $t^- \leq t' \leq t^* \leq t^+$ и $u^*_n \geq 0$. В фазе деформации при $t \in [t^-, t']$ и на первом этапе фазы восстановления при $t \in [t', t^*]$ точка контакта скользит налево, $u^-_\tau < 0$, $u'_\tau < 0$, $u^*_\tau = 0$, $R'_\tau = fR'_n$, $R''^*_\tau = fR''^*_n$, где u^*_n, u^*_τ — скорость точки контакта S в момент смены направления скольжения, R''^*_n, R''^*_τ — импульсы ударной реакции в течение первого этапа фазы восстановления. Из уравнений удара для фазы деформации (5) и первого этапа фазы восстановления получаем

$$R'_n = \frac{-m\rho^2 u^-_\tau}{bh + f(\rho^2 + h^2)}, \qquad u'_\tau = u^-_\tau - u^-_n \frac{[bh + f(\rho^2 + h^2)]}{bh + f(\rho^2 + h^2)},$$

$$R''^*_n = \frac{-m\rho^2 u'_\tau}{bh + f(\rho^2 + h^2)}, \qquad u^*_n = -u'_\tau \frac{\rho^2 + b^2 + fbh}{bh + f(\rho^2 + h^2)}.$$

На втором этапе фазы восстановления при $t \in [t^*, t^+]$ точка контакта скользит направо, $u_\tau^* = 0$, $u_\tau^+ > 0$, $u_n^* \geq 0$, $u_n^+ \geq 0$, $R_\tau''^{**} = -f R_n''^{**}$, $R_n'' = kR_n'$, $R_n''^{**} = kR_n' - R_n''^*$. Из уравнений удара для второго этапа фазы восстановления имеем

$$u_\tau^+ = \frac{1}{m\rho^2}(kR_n' - R_n''^*)[bh - f(\rho^2 + h^2)],$$

$$u_n^+ = u_n^* + \frac{1}{m\rho^2}(kR_n' - R_n''^*)(\rho^2 + b^2 - fbh).$$

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$u_n^- \leq 0,\ u_\tau^- < 0,\ f < \frac{bh}{\rho^2 + h^2},$$

$$u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] > 0, \tag{16}$$

$$(1+k)u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] \leq 0.$$

Для всех рассмотренных выше случаев определены условия, при которых они имеют место, а также скорость точки контакта S после удара и импульсы ударных сил реакции опорной поверхности для фаз деформации и восстановления. Найдем полные импульсы ударных реакций в течение всего удара: $R_n = R_n' + R_n'' = (1+k)R_n'$, $R_\tau = R_\tau' + R_\tau''$. Причем, если изменяется направление скольжения точки S в фазе деформации, получаем $R_n' = R_n'^* + R_n'^{**}$, $R_\tau' = R_\tau'^* + R_\tau'^{**}$. Если изменяется направление скольжения точки S в фазе восстановления, имеем $R_\tau'' = R_\tau''^* + R_\tau''^{**}$.

Значение угловой скорости тела после удара определяется третьими уравнениями (4)–(5), $\omega^+ = \omega^- + \dfrac{R_n b + R_\tau h}{m\rho^2}$. Скорость центра масс тела после удара вычисляется с помощью соотношений (2).

Графическая интерпретация условий, соответствующих различным типам удара. В предыдущем разделе рассмотрены типы движения тела при ударе и получены условия, при которых имеет место тот или иной тип удара. Однако эти условия достаточно сложны и зависят от значений следующих параметров: положения точки контакта относительно центра масс, определяемого параметрами b и h; радиуса инерции тела относительно центра масс ρ; коэффициента трения f тела о поверхность и скорости точки контакта S в начале удара. Непротиворечивость этих условий и корректность модели удара (т. е. однозначность определения характеристик движения в конце удара для любого тела и любых значений скоростей в начале удара) далеко не очевидна.

Для упрощения анализа этих условий введем угол трения φ и углы $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$:

$$\varphi = \operatorname{arctg}^* f, \quad \gamma_0 = \operatorname{arctg}^* \frac{\rho^2 + b^2}{bh}, \quad \gamma_1 = \operatorname{arctg}^* \frac{bh}{\rho^2 + h^2},$$

$$\gamma_2 = \operatorname{arctg}^* \frac{\rho^2 + b^2 + fbh}{bh + f(\rho^2 + h^2)}, \quad \gamma_3 = \operatorname{arctg}^* \frac{\rho^2 + b^2 - fbh}{bh - f(\rho^2 + h^2)}, \tag{17}$$

$$\tilde{\gamma}_i = \operatorname{arctg}^* \frac{\operatorname{tg}\gamma_i}{1+k}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

При этом

$$\operatorname{tg}\gamma_2 = \operatorname{tg}\gamma_1 \frac{\operatorname{tg}\gamma_0 + \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\gamma_3 = \operatorname{tg}\gamma_1 \frac{\operatorname{tg}\gamma_0 - \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\gamma_1 - \operatorname{tg}\varphi}.$$

Учитывая неравенство (14), получаем $0 \le \gamma_1 \le \gamma_2 \le \gamma_0 \le \dfrac{\pi}{2}$.

Отметим, что здесь и далее $\operatorname{arctg}^* x \in [0, \pi]$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, т. е.

$$\operatorname{arctg}^* x = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если} \quad x > 0, \\ \operatorname{arctg} x + \pi, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

При этом $\operatorname{arctg}^*(\pm\infty) = \pi/2$; $\operatorname{arctg}^* x \to 0$, если $x \to 0$ и $x > 0$; $\operatorname{arctg}^* x \to \pi$, если $x \to 0$ и $x < 0$.

Введем следующие множества значений скорости точки контакта S в начале удара, u_τ^-, u_n^-:

$$\Pi_n^- = \left\{ (u_\tau^-, u_n^-) : \quad u_n^- \le 0 \right\},$$

$$\Pi_\tau^- = \left\{ (u_\tau^-, u_n^-) : \quad u_\tau^- \le 0 \right\}, \quad \Pi_\tau^+ = \left\{ (u_\tau^-, u_n^-) : \quad u_\tau^- \ge 0 \right\},$$

$$\Pi_1 = \left\{ (u_\tau^-, u_n^-) : \quad u_n^-(\rho^2 + h^2) - u_\tau^- bh \le 0 \right\} = \left\{ (u_\tau^-, u_n^-) : \ u_n^- - u_\tau^- \operatorname{tg}\gamma_1 \le 0 \right\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ (u_\tau^-, u_n^-) : \quad u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] \le 0 \right\} =$$
$$= \left\{ (u_\tau^-, u_n^-) : \quad u_n^- - u_\tau^- \operatorname{tg}\gamma_2 \le 0 \right\},$$

$$\tilde{\Pi}_2 = \left\{(u_\tau^- , u_n^-):\quad (1+k)u_n^-[bh + f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 + fbh] \le 0\right\} =$$

$$= \left\{(u_\tau^- , u_n^-):\quad u_n^- - u_\tau^- \operatorname{tg}\tilde{\gamma}_2 \le 0\right\},$$

$$\Pi_3 = \left\{(u_\tau^- , u_n^-):\quad u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] \ge 0\right\} =$$

$$= \left\{(u_\tau^- , u_n^-):\quad u_n^- - u_\tau^- \operatorname{tg}\gamma_3 \le 0 \text{ при } \varphi > \gamma_1,\right.$$

$$\left. u_n^- - u_\tau^- \operatorname{tg}\gamma_3 \ge 0 \text{ при } \varphi < \gamma_1,\ u_\tau^- \le 0 \text{ при } \varphi = \gamma_1\right\},$$

$$\tilde{\Pi}_3 = \left\{(u_\tau^- , u_n^-):\quad (1+k)u_n^-[bh - f(\rho^2 + h^2)] - u_\tau^-[\rho^2 + b^2 - fbh] \ge 0\right\} =$$

$$= \left\{(u_\tau^- , u_n^-):\quad u_n^- - u_\tau^- \operatorname{tg}\tilde{\gamma}_3 \le 0 \text{ при } \varphi > \gamma_1,\ u_n^- - u_\tau^- \operatorname{tg}\tilde{\gamma}_3 \ge 0 \text{ при } \varphi < \gamma_1,\right.$$

$$\left. u_\tau^- \le 0 \text{ при } \varphi = \gamma_1\right\}.$$

Каждое из этих множеств представляет собой полуплоскость. В силу условий (9)–(13), (15), (16) имеем, что в течение удара точка контакта S:

останавливается в фазе деформации тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \bigcup \Pi_1 \bigcup \Pi_2 \bigcup \Pi_3$ и $\varphi \ge \gamma_1$;

скользит направо и останавливается в фазе восстановления тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \bigcup \Pi_\tau^+ \bigcup \neg\Pi_3 \bigcup \tilde{\Pi}_3$ и $\gamma_0 \ge \varphi \ge \gamma_1$;

скользит налево и останавливается в фазе восстановления тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \bigcup \Pi_\tau^- \bigcup \neg\Pi_2 \bigcup \tilde{\Pi}_2$ и $\varphi \ge \gamma_1$;

скользит направо (полное скольжение) тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \bigcup \Pi_\tau^+ \bigcup \neg\Pi_3 \bigcup \neg\tilde{\Pi}_3$ и $\varphi \le \gamma_0$;

скользит налево (полное скольжение) тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \bigcup \Pi_\tau^- \bigcup \neg\tilde{\Pi}_2$;

изменяет направление скольжения в фазе деформации (сначала скользит налево, а затем направо) тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \bigcup \Pi_\tau^- \bigcup \Pi_2$ и $\varphi \le \gamma_1$;

изменяет направление скольжения в фазе восстановления (сначала скользит налево, а затем направо) тогда и только тогда, когда $(u_\tau^-, u_n^-) \in \Pi_n^- \bigcup \Pi_\tau^- \bigcup \neg\Pi_2 \bigcup \tilde{\Pi}_2$ и $\varphi \le \gamma_1$.

Отметим, что характер движения точки контакта S в процессе удара зависит от направления скорости точки S до удара и не зависит от ее модуля. Введем угол

$$\beta = \operatorname{arctg}^* \frac{u_n^-}{u_\tau^-},$$

где $\beta \in [0, \pi]$, который является углом падения точки S, отсчитываемым от касательного к опорной поверхности направления (см. рис. 1). Тип удара или характер движения точки контакта S в процессе удара определяется соотношением значений угла трения φ, угла падения β и углов $\gamma_i, \tilde{\gamma}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. На рис. 2 приведена зависимость углов $\gamma_2, \gamma_3, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ от угла трения φ и по осям отложены значения углов $\gamma_0, \gamma_1, \tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$.

Анализ условий, определяющих тип удара с учетом приведенных на рис. 2 зависимостей, показывает, что некоторые из этих условий являются избыточными. На рис. 3 показаны области значений угла трения φ и угла падения β, соответствующие различным типам удара. В качестве границ, разделяющих эти области, служат зависимости углов $\gamma_2, \gamma_3, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ от угла трения φ.

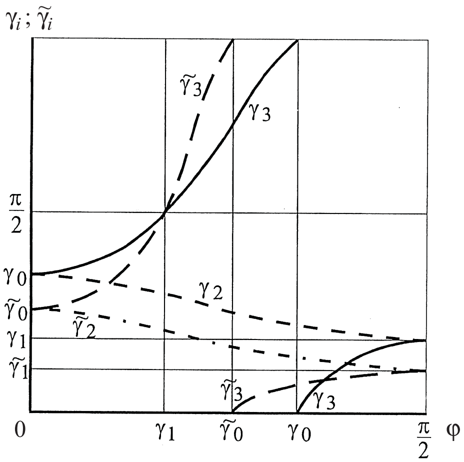

Рис. 2. Зависимости углов $\gamma_2, \gamma_3, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ от угла трения φ

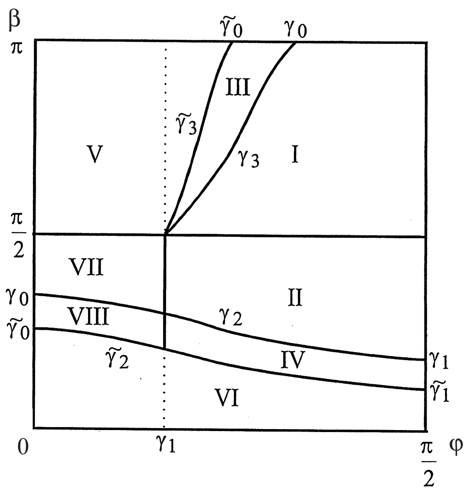

Рис. 3. Области I–VIII при упругом ударе

Аналитически эти условия можно представить следующим образом. В процессе удара точка контакта S в областях:

I, т. е. при $\varphi \geq \gamma_1$, $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \gamma_3$, скользит направо и останавливается в фазе деформации;

II, т. е. при $\varphi \geq \gamma_1$, $\gamma_2 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, скользит налево и останавливается в фазе деформации;

III, т. е. при $\varphi \geq \gamma_1$, $\gamma_3 < \beta \leq \tilde{\gamma}_3$, скользит направо и останавливается в фазе восстановления;

IV, т. е. при $\varphi \ge \gamma_1$, $\tilde{\gamma}_2 \le \beta < \gamma_2$, скользит налево и останавливается в фазе восстановления;

V, т. е. при $\beta \ge \dfrac{\pi}{2}$ и $\beta > \tilde{\gamma}_3$, скользит направо (полное скольжение);

VI, т. е. при $\beta < \tilde{\gamma}_2$ скользит налево (полное скольжение);

VII, т. е. при $\varphi < \gamma_1$, $\gamma_2 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2}$, изменяет направление скольжения в фазе деформации (сначала скользит налево, затем направо);

VIII, т. е. при $\varphi < \gamma_1$, $\tilde{\gamma}_2 \le \beta < \gamma_2$, изменяет направление скольжения в фазе восстановления (сначала скользит налево, затем направо).

Полученное решение является корректным. Любым начальным условиям соответствует единственный вполне определенный характер движения в процессе удара и наблюдается непрерывная зависимость от параметров. На границах областей и, более того, в точках бифуркации этих границ для определения характера движения тела при ударе можно использовать формулы для любой из пограничных областей. Результат будет один и тот же.

Напомним, что исследование процесса удара проводилось в предположении, что центр масс C относительно точки контакта S расположен слева (см. рис. 1), т. е. значение $b \ge 0$. Случай, когда значение $b < 0$, можно исследовать аналогично либо все результаты получить исходя из соображений симметрии.

Рассмотрим также два частных случая. Если в момент удара центр масс расположен над точкой контакта S, т. е. $b = 0$ (этот случай соответствует удару осесимметричного диска о поверхность), то $\gamma_0 = \pi/2$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_3 = \pi - \gamma_2$, $\tilde{\gamma}_3 = \pi - \tilde{\gamma}_2$, при этом всегда $\gamma_1 \le \varphi \le \gamma_0$ (рис. 4).

В процессе удара точка контакта S в областях:

I, т. е. при $\dfrac{\pi}{2} \le \beta \le \gamma_3$, скользит направо и останавливается в фазе деформации;

II, т. е. при $\gamma_2 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2}$, скользит налево и останавливается в фазе деформации;

III, т. е. при $\gamma_3 < \beta \le \tilde{\gamma}_3$, скользит направо и останавливается в фазе восстановления;

IV, т. е. при $\tilde{\gamma}_2 \le \beta < \gamma_2$, сначала скользит налево и останавливается в фазе восстановления;

V, т. е. при $\beta > \tilde{\gamma}_3$, скользит направо (полное скольжение);

VI, т. е. при $\beta < \tilde{\gamma}_2$, скользит налево (полное скольжение).

При абсолютно неупругом ударе $k = 0$, и в силу соотношений (17) $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ (рис. 5).

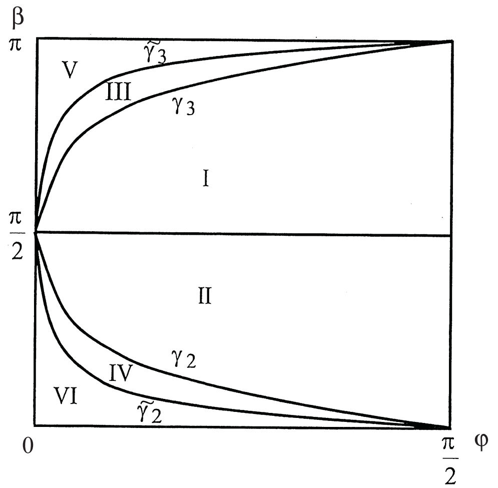

Рис. 4. Области I–VI в случае, когда центр масс тела находится над точкой контакта тела с препятствием

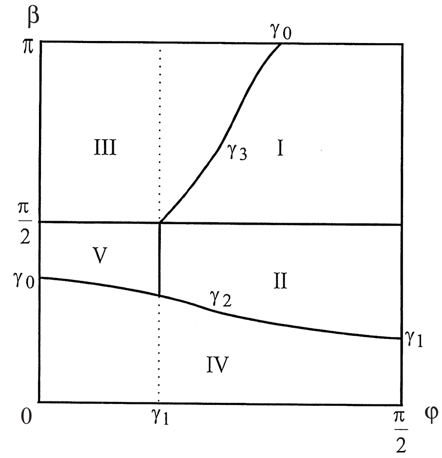

Рис. 5. Области I–V при абсолютно неупругом ударе

В процессе удара точка контакта S в областях:

I, т. е. при $\varphi \geq \gamma_1$, $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \gamma_3$, сначала скользит направо, затем останавливается;

II, т. е. при $\varphi \geq \gamma_1$, $\gamma_2 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, сначала скользит налево, затем останавливается;

III, т. е. при $\beta \geq \frac{\pi}{2}$ и $\beta > \gamma_3$, скользит направо (полное скольжение);

IV, т. е. при $\beta < \gamma_2$, скользит налево (полное скольжение);

V, т. е. $\varphi < \gamma_1$, $\gamma_2 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, изменяет направление скольжения (сначала скользит налево затем направо).

Отметим, что случай удара материальной точки о шероховатую поверхность [5] нельзя получить с помощью приведенных в настоящей работе результатов предельным переходом, поскольку параметры ρ, b, h одновременно стремятся к нулю, а значит, невозможно в силу (17) однозначно определить углы γ_0, γ_1, γ_2, γ_3, $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\gamma}_3$.

Заключение. Показано, что в плоской задаче об упругом ударе тела о неподвижное препятствие с учетом ударных сил сухого трения возможны различные типы удара, которые различаются характером скольжения точки контакта в процессе удара. Формулы для расчета характеристик движения тела после удара и импульсов ударных реакций зависят от типа удара. Построены области, соответствующие различным типам удара, на плоскости угол трения φ, угол падения β (угол наклона скорости точки контакта тела с поверхностью до удара). Показана корректность рассмотренной модели удара.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00655-а и гранта Президента РФ № НШ-4748.2012.8 для ведущих научных школ РФ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аппель П. *Теоретическая механика*. Т. 2. Москва, Физматгиз, 1960, 487 с.
[2] Болотов Е.А. Об ударе двух тел при действии трения. *Известия Московского инженерного училища*, 1908, ч. 2, вып. 2, с. 43–45.
[3] Виттенбург Й. *Динамика системы твердых тел*. Москва, Мир, 1980, 292 с.
[4] Гольдсмит В. *Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел*. Москва, Изд-во литературы по строительству, 1965, 448 с.
[5] Дубинин В.В., Гришин С.А., Лапшин В.В. *Удар материальной точки о шероховатую поверхность*. *ИПМ РАН. Препринт*, 1997, № 21, 20 с.
[6] Дягель Р.В., Лапшин В.В. О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта-Кроссли. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2011, № 5, с. 164–173.
[7] Иванов А.П. *Динамика систем с механическими соударениями*. Москва, Международная программа образования, 1997, 336 с.
[8] Иванов А.П. Энергетика удара с трением. *Прикладная математика и механика*, 1992, т. 56, вып. 4, с. 527–534.
[9] Кобринский А.Е., Кобринский А.А. *Виброударные системы (динамика и устойчивость)*. Москва, Наука, 1973, 592 с.
[10] Лапшин В.В., Дубинин В.В. *Абсолютно неупругий удар тела о шероховатую поверхность*. *ИПМ РАН. Препринт*, 1998, № 18, 18 с.
[11] Лапшин В.В. Удар о поверхность тела с дополнительной опорой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*. Сер. Естественные науки, 2006, № 2, с. 45–53.
[12] Лапшин В.В. *Механика и управление движением шагающих машин*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 199 с.
[13] Маркеев А.П. *Теоретическая механика*. Москва, Наука, 1990, 414 с.
[14] Нагаев Р.Ф. *Механические процессы с повторными затухающими соударениями*. Москва, Наука, 1985, 200 с.
[15] Ньютон И. *Математические основы натурофилософии*. Собр. тр. акад. А.Н. Крылова, т. 7. Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР, 1936, с. 1–676.
[16] Пановко Я.Г. *Введение в теорию механического удара*. Москва, Наука, 1977, 232 с.
[17] Плявниекс В.Ю. Расчет косого удара о препятствие. *Вопросы динамики и прочности*. Рига, Зинатне, 1969, № 18, с. 87–109.
[18] Раус Э.Дж. *Динамика системы твердых тел*. Т. 1. Москва, Наука, 1983, 463 с.

[19] Самсонов В.А. *Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы*. Москва, Наука, 1980, 64 с.
[20] Формальский А.М. *Моделирование антропоморфных механизмов*. Москва, Наука, 1982, 368 с.
[21] Herts H. Über die berührung fester elastischer körper. *Journal reine und angewandte mathematik*, 1882, vol. 92, ss. 156–171.
[22] Hunt K.H., Crossley F.R.E. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *ASME Journal of applied mechanics*, 1975, № 6, pp. 440–445.
[23] Poisson S.D. *Traeté de mecaniqúe*. Bruxeller, Haumann,1838, 447 p.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Лапшин В.В. Удар тела о препятствие. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1134.html

Лапшин Владимир Владимирович родился 1954 г., окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1975 г., д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Основные научные интересы: механика и управление движением шагающих аппаратов, робототехника. e-mail: vladimir@lapshin.net