УДК 531

Развитие задачи Н.Е. Жуковского о плоском рассеве

© В.В. Андронов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье Н.Е. Жуковского «Заметка о плоском рассеве» (1896), исследована задача о движении частицы материала (материальной точки) по горизонтальной плоской опоре (ситу) с круговыми поступательными колебаниями в своей плоскости. В настоящей работе, являющейся естественным обобщением этой задачи, рассмотрено движение по такой же плоскости тела конечных размеров, когда фрикционный контакт осуществляется по некоторой площадке, а центр масс тела возвышается над этой площадкой. На примере тела, имеющего форму прямого кругового цилиндра, показано, что в установившемся движении реальное тело не только совершает круговое движение (как в задаче Жуковского), но еще и вращается вокруг вертикальной оси с некоторой угловой скоростью. Получены формулы для определения скоростей обоих компонент движения.

Ключевые слова: *колебания, сухое трение, распределенный фрикционный контакт, локальный закон Кулона, сила, момент трения.*

Введение. В связи с развитием вибрационных технологий, происходившим особенно интенсивно в 50–70 годы прошлого века, упомянутая выше статья Н.Е. Жуковского [1] вновь стала актуальной и получила дальнейшее развитие. Была исследована устойчивость найденного Н.Е. Жуковским решения [2], сделано обобщение задачи на случай наклонной плоскости [3], изучены разнообразные вибрационные технологические процессы, приводящие в конечном итоге к уравнениям того же вида, что и в задаче Н.Е. Жуковского [2–6]. Однако во всех перечисленных работах движущийся объект — материальная точка.

Представляет интерес рассмотреть задачу Н.Е. Жуковского для твердого тела. В отличие от материальной точки тело контактирует с опорной плоскостью по некоторой площадке с конечными размерами, центр масс тела возвышается над опорой и др. Это создает условия для появления качественно новых свойств движения, которые не обнаруживаются в рамках точечной модели. Следует добавить, что в последние годы динамика систем с распределенным фрикционным контактом интенсивно развивалась в работах [7–15] и сформировались вполне определенные подходы к решению подобных задач.

Задача о плоском рассеве для твердого тела. Рассмотрим движение тела с плоским основанием по горизонтальной плоскости, совершающей поступательные круговые колебания в своей плоскости. Тело примем в виде прямого кругового цилиндра радиусом R и высотой h. Пусть $O_1X_1Y_1Z_1$ — неподвижная система координат, плоскость $O_1X_1Y_1$ которой совпадает с колеблющейся плоскостью; $OXYZ$ — оси, неизменно связанные с подвижной плоскостью и соответственно параллельные осям неподвижной системы; $C\xi\eta\varsigma$ — система осей Кенига (рис. 1). При круговых колебаниях все точки подвижной плоскости движутся по окружностям одинакового радиуса A с частотой ν согласно уравнениям

$$X_1 = X_{10} + A\cos\nu t, \quad Y_1 = Y_{10} + A\sin\nu t, \tag{1}$$

где X_1, Y_1, X_{10}, Y_{10} — координаты какой-либо точки вибрирующей плоскости и центра ее круговой траектории в неподвижной системе координат. Уравнения (1) одновременно являются уравнениями движения самой колеблющейся плоскости.

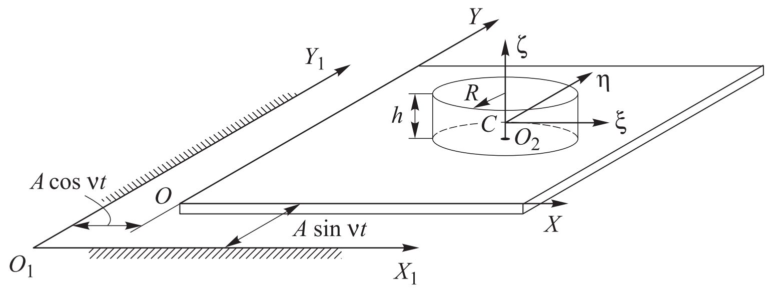

Рис. 1. Цилиндрическое тело на вибрирующей шероховатой опоре (O_2 — центр основания цилиндра)

При колебаниях невысокой интенсивности первоначально неподвижное относительно плоскости тело продолжает оставаться в относительном покое. Если интенсивность колебаний достаточно высока, относительный покой невозможен, и тело будет скользить по плоскости. Дифференциальные уравнения этого относительного движения имеют вид

$$\begin{gathered} m\ddot{X}_C = mA\nu^2\cos\nu t + T_X, \\ m\ddot{Y}_C = mA\nu^2\sin\nu t + T_Y, \\ J_z\ddot{\varphi} = M_z, \end{gathered} \tag{2}$$

где m — масса тела (цилиндра); X_C, Y_C — координаты центра масс тела в осях $OXYZ$; T_X, T_Y — проекции на эти оси силы трения (главного вектора сил трения, распределенных по площадке контакта тела с опорной плоскостью); J_z — момент инерции тела относительно оси симметрии; M_z — момент трения (алгебраический главный момент этих сил относительно центра основания цилиндра); первые слагаемые в правых частях двух первых уравнений определяют соответствующие проекции переносной силы инерции.

Составляющие силы трения и момент трения определяются интегрированием по площадке контакта выражений для силы и момента, записанных на основе закона сухого трения Кулона для малого элемента площадки контакта (закон Кулона в локальной форме):

$$T_X = -f \iint \sigma(\bar{r}) \frac{u_X}{|\bar{u}|} dS, \quad T_Y = -f \iint \sigma(\bar{r}) \frac{u_Y}{|\bar{u}|} dS,$$
$$M = -f \iint \frac{\sigma(\bar{r})}{|\bar{u}|} (\bar{r} \times \bar{u}) dS. \tag{3}$$

Здесь f — коэффициент трения; $\bar{r}$ — радиус-вектор малого элемента площадки контакта, проведенный из центра основания цилиндра; $\sigma(\bar{r})$ — закон распределения нормального давления по площадке контакта; dS — площадь этого элемента; $\bar{u}(u_X, u_Y)$ — относительная скорость элемента.

Как следует из соотношений (2), (3), для вычисления составляющих силы трения и последующего определения движения тела по колеблющейся плоскости требуется знать распределение нормальных напряжений в области контакта. Упрощая, будем считать, что распределение $\sigma(\bar{r})$, равномерное при покое цилиндра на неподвижной плоскости, при колебаниях плоскости деформируется в направлении переносной силы инерции $\bar{\Phi}$ по линейному закону $\sigma(\bar{r}) = \sigma_0 + q y_1$. Здесь σ_0 — интенсивность равномерного распределения; q — постоянный коэффициент; y_1 — координата, отсчитываемая в направлении силы $\bar{\Phi}$. Значения σ_0 и q примем такими же, как при прямолинейном и равномерном движениях цилиндра под действием приложенной в его центре масс горизонтальной постоянной силы $\bar{\Phi}$. В этом случае уравнения динамики имеют следующий вид (рис. 2):

$$ma_c = \Phi - f \iint (\sigma_0 + qy)\, dx\, dy,$$
$$\iint (\sigma_0 + qy)\, dx\, dy - mg = 0, \tag{4}$$
$$\iint (\sigma_0 + qy)\, y dy dx - \frac{1}{2} f h \iint (\sigma_0 + qy)\, dx\, dy = 0.$$

Интегрируя по всей площади основания цилиндра, при $a_c = 0$ находим

$$\sigma_0 = \frac{mg}{\pi R^2}, \quad q = \frac{2 fmgh}{\pi R^4}, \quad \Phi = fmg.$$

Теперь несложно найти условие существования полного контакта, решив неравенство $\sigma(-R) \geq 0$. Оно состоит в выполнении требования $2fh/R \leq 1$. При строгом обратном неравенстве происходит либо контакт по части площади основания, либо цилиндр опрокидывается. Эти случаи из дальнейшего рассмотрения исключены.

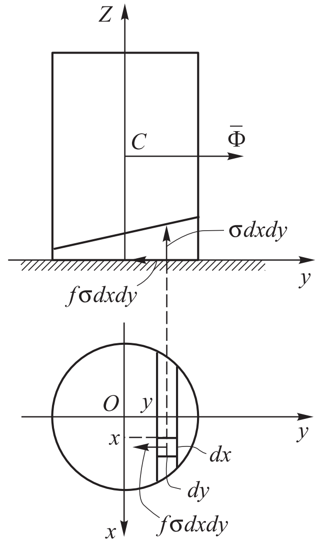

Рис. 2. Схема сил при прямолинейном движении с полным контактом

Пусть цилиндр скользит по плоскости со скоростью его оси $\bar{v}$ и вращается вокруг этой оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$. Для удобства вычисления составляющих силы трения введем в плоскости основания цилиндра систему координат O_2xy, ось O_2x которой направлена вдоль скорости $\bar{v}$ (рис. 3). Тогда формула для закона распределения $\sigma(\bar{r})$ принимает вид

$$\sigma(\bar{r}) = \sigma_0 + q(x\cos\alpha + y\sin\alpha), \tag{5}$$

где α — угол между направлениями $\bar{v}$ и $\bar{\Phi}_0$; x, y — координаты элемента площади в этой системе координат.

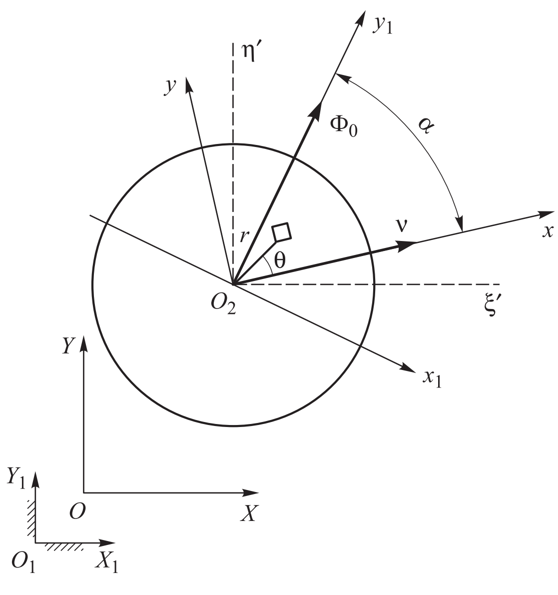

Рис. 3. Схема расчета сил трения

Проекции силы трения на эти оси и момент трения с использованием полярных координат $r,\ \theta$ запишем как

$$T_x = -f\iint\left(\sigma_0 + qr\cos\left(\alpha-\theta\right)\right)\frac{v - r\,\omega_z\sin\theta}{\sqrt{v^2 - 2\omega_z rv\sin\theta + r^2\omega^2}}rdrd\theta,$$

$$T_y = -f\iint\left(\sigma_0 + q\,r\cos\left(\alpha-\theta\right)\right)\frac{r\omega_z\cos\theta}{\sqrt{v^2 - 2\omega_z rv\sin\theta + r^2\omega^2}}rdrd\theta, \qquad (6)$$

$$M = M_z = -f\iint\left(\sigma_0 + qr\cos\left(\alpha-\theta\right)\right)\frac{\omega_z\cos^2\theta - \left(v - r\omega_z\sin\omega\right)\sin\theta}{\sqrt{v^2 - 2\omega_z rv\sin\theta + r^2\omega^2}}r^2drd\theta.$$

Возвращаясь к основной системе координат $OXYZ$, получаем

$$T_X = T_x\cos\left(\nu t-\alpha\right) - T_y\sin\left(\nu t-\alpha\right),$$

$$T_Y = T_x\sin\left(\nu t-\alpha\right) + T_y\cos\left(\nu t-\alpha\right),$$

т. е. уравнения (2) можно представить в следующем виде:

$$m\frac{dv_{CX}}{dt} = \Phi_0\cos\nu t + T_x\cos\left(\nu t-\alpha\right) - T_y\sin\left(\nu t-\alpha\right),$$

$$m\frac{dv_{CY}}{dt} = \Phi_0\sin\nu t + T_x\sin\left(\nu t-\alpha\right) + T_y\cos\left(\nu t-\alpha\right), \qquad (7)$$

$$J_z\frac{d\omega_z}{dt} = M_z.$$

Здесь v_{CX}, v_{CY} — проекции относительной скорости центра масс цилиндра на оси $OXYZ$, а $T_x,\ T_y,\ M_z$ определяются выражениями (6).

Уравнения (7) допускают частное решение

$$\begin{aligned} &v_{CX} = V\cos\left(\nu t-\alpha\right), \quad v_{CY} = V\sin\left(\nu t-\alpha\right), \\ &\omega_z = \text{const}, \quad V = \text{const} > 0, \quad \alpha = \text{const}, \end{aligned} \qquad (8)$$

определяющее установившееся относительное движение тела по колеблющейся плоскости. В этом предельном движении центр масс цилиндра равномерно перемещается по круговой траектории радиусом $H = V/\nu$ и одновременно вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси в сторону движения плоскости $\left(\text{при } \omega_z > 0\right)$ либо против движения плоскости $\left(\text{при } \omega_z < 0\right)$. Подставляя равенства (8) в первое и второе уравнения системы (7), получаем

$$-m\nu V\sin\left(\nu t-\alpha\right)=\Phi_0\cos\nu t+T_x\cos\left(\nu t-\alpha\right)-T_y\sin\left(\nu t-\alpha\right),$$
$$m\nu V\cos\left(\nu t-\alpha\right)=\Phi_0\sin\nu t+T_x\sin\left(\nu t-\alpha\right)+T_y\cos\left(\nu t-\alpha\right).$$

Умножая первое уравнение на $-\sin\left(\nu t-\alpha\right)$ и складывая со вторым, умноженным на $\cos\left(\nu t-\alpha\right)$, имеем $m\nu V=\Phi_0\sin\alpha+T_y$. Аналогично, складывая первое уравнение со вторым, предварительно умноженными на $\cos\left(\nu t-\alpha\right)$ и $\sin\left(\nu t-\alpha\right)$ соответственно, приходим к равенству $\Phi_0\cos\alpha+T_x=0$. В итоге получаем следующие уравнения для определения параметров установившегося движения (величин V, α, ω_z):

$$m\nu V=\Phi_0\sin\alpha+T_y,\quad \Phi_0\cos\alpha+T_x=0,\quad M_z=0. \tag{9}$$

Учитывая сложный вид выражений для T_x, T_y и M_z, найти аналитическое решение полученных уравнений затруднительно. Однако простые опыты показывают, что угловая скорость вращения ω в установившемся движении весьма мала, чем можно воспользоваться для упрощения подынтегральных выражений в формулах (6) и получить для T_x, T_y и M_z простые аналитические выражения.

Разлагая функцию

$$\varphi\left(\omega\right)=\frac{1}{\sqrt{v^2-2\omega_z rv\sin\theta+r^2\omega^2}},$$

входящую в качестве множителя в подынтегральные выражения в формулах (6), в ряд по степеням ω_z и сохраняя в разложении только линейные по переменной ω_z слагаемые, получаем

$$\varphi\left(\omega\right)=\frac{1}{v}+\frac{r\sin\theta}{v^2}\omega_z.$$

Подставляя это разложение в формулы (6) и вычисляя соответствующие двойные интегралы, находим

$$T_x=-f\sigma_0\pi R^2,$$
$$T_y=-\frac{f\pi R^4}{4v}q\omega_z\cos\alpha,$$
$$M_z=\frac{f\pi R^4}{4v}\left(qv\sin\alpha-\sigma_0\omega_z\right).$$

Теперь подставляя эти значения T_x, T_y, M_z, в которых следует положить $v=V$, в формулы (9) и раскрывая обозначения σ_0, q, получаем окончательные уравнения для определения параметров установившегося периодического движения V, α, ω:

$$A\nu^2\sin\alpha - \frac{ghf^2}{2V}\omega_z\cos\alpha - \nu V = 0;$$
$$A\nu^2\cos\alpha - fg = 0; \qquad (10)$$
$$V\sin\alpha - \frac{R^2}{2fh}\omega_z = 0.$$

Должны также выполняться условия $fg \le A\nu^2$, $2fh \le R$, обеспечивающие скольжение тела с полным контактом.

Вводя безразмерные величины

$$\gamma = \frac{fg}{A\nu^2}, \ \lambda = \frac{2fh}{R}$$

и решая эти уравнения, находим

$$\alpha = \arccos\gamma,$$
$$V = A\nu\sqrt{1-\gamma^2}\left(1 - \frac{1}{4}\gamma^2\lambda^2\right), \qquad (11)$$
$$\omega_z = \frac{\lambda V}{R}\sqrt{1-\gamma^2}.$$

Заключение. В конкретных расчетах по полученным формулам параметры γ, λ следует задавать в области определения уравнений (10), задаваемой неравенствами $\lambda < 1, \gamma < 1$. Значения f и ν можно выбирать свободно, исходя из физических соображений. Сопоставляя формулы (11) с результатами, полученными для материальной точки [1], видим некоторые отличия — радиус круговой траектории и скорость кругового движения для тела становятся меньше, появляется верчение. С уплощением тела эти отличия все менее выражены, и в пределе при $h \to 0$ $(\lambda \to 0)$ (случай бесконечно тонкого диска) исчезают вовсе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Жуковский Н.Е. Заметка о плоском рассеве. *Полное собрание сочинений. Т. VIII*. Котельников А.П., ред. Москва; Ленинград, ОНТИ, 1937, с. 39–46.

[2] Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. *Вибрационное перемещение*. Москва, Наука, 1964, 410 с.

[3] Блехман И.И., Гортинский В.В., Дулаев В.Г., Нагаев Р.Ф. Движение материальной частицы по шероховатой плоскости, совершающей колебания, близкие к круговым поступательным. *Известия АН СССР*, *Механика твердого тела*, 1971, № 2, с. 136–141.

[4] Блехман И.И., Гортинский В.В., Птушкина Г.Е. Движение частицы в колеблющейся среде при наличии сопротивления типа сухого трения (К теории вибрационного разделения сыпучих смесей). *Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*, 1963, № 4, с. 31–41.

[5] Нагаев Р.Ф. *Периодические режимы вибрационного перемещения*. Москва, Наука, 1978, 160 с.

[6] Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А. *Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях*. Москва, Колос, 1980, 304 с.

[7] Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1981, № 4, с. 17–28.

[8] Самсонов В.А. О трении при скольжении и верчении тела. *Вестник МГУ. Сер. Математика и механика*, 1981, № 2, с. 76–78.

[9] Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел. *Прикладная математика и механика,* 1998, т. 62, вып. 5, с. 762–767.

[10] Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел. *Успехи механики*, № 3, 2005, с. 58–76.

[11] Киреенков А.А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2002, № 1, с. 60–67.

[12] Розенблат Г.М. Об интегрировании уравнений движения диска по шероховатой плоскости. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2007, № 4, с. 65–71.

[13] Андронов В.В., Журавлев В.Ф. *Сухое трение в задачах механики*. Москва — Ижевск, РХД, 2010, 184 с.

[14] Иванов А.П. *Основы теории систем с трением*. Москва — Ижевск, РХД, 2011, 302 с.

[15] Сальникова Т.В., Трещев Д.В., Галлямов С.Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости. *Нелинейная динамика*, т. 8. № 1, с. 83–101.

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Андронов В.В. Развитие задачи Н.Е. Жуковского о плоском рассеве. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1133.html

Андронов Вячеслав Васильевич родился в 1938 г., окончил Поволжский лесотехнический институт им. М. Горького в 1961. Д-р техн. наук., профессор кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор свыше 100 работ в области динамики и теории колебаний. e-mail: spm@bmstu.ru