

Конечно-элементное моделирование больших деформаций нелинейно-упругих материалов с использованием модели A_V

© Ю.И. Димитриенко, А.А. Веретенников

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен алгоритм конечно-элементного решения трехмерной задачи нелинейной теории упругости при конечных деформациях для двух моделей: так называемой модели A_V и неогуксовской модели. Алгоритм представляет собой модификацию метода Боне, основанного на использовании слабой вариационной формулировки задачи теории упругости в приращениях в актуальной конфигурации. Приведены примеры численного решения задачи о больших деформациях одноосного растяжения бруса в трехмерной постановке. Проведено сравнение конечно-элементных расчетов с известными аналитическими решениями, которое показало очень высокую точность предложенного алгоритма численного решения. Численные расчеты проведены на основе авторских комплексов программного обеспечения, в том числе авторской реализации метода Холецкого с использованием деревьев исключения для решения систем линейных уравнений большой размерности.

Ключевые слова: конечные деформации, большие деформации, нелинейно-упругие материалы, модель A_V , неогуксовская модель, метод конечного элемента.

Введение. В последнее время значительно возросло число исследований, направленных на разработку конечно-элементных методов решения задач нелинейной механики с большими деформациями, отметим лишь некоторые работы в этой области [1–12]. Наиболее известные методы конечно-элементного решения задач нелинейной теории упругости при конечных деформациях основаны на использовании вариационной формулировки в недеформированной конфигурации [12, 13]. В работе [14] Боне был предложен метод, основанный на использовании вариационной слабой формулировки задачи в приращениях и актуальной (деформированной) конфигурации. Для сжимаемой неогуксовской модели нелинейно-упругого поведения материала метод достаточно эффективен. Известно, что реализация того или иного численного метода существенно зависит от выбранной модели нелинейно-упругого материала. Целью настоящей работы является применение метода Боне для решения задач нелинейной теории упругости для модели, отличной от неогуксовской, — для полулинейной модели A_V , согласно классификации моделей, предложенной в [15–17].

Математическая постановка задачи. Рассматривается постановка квазистатической задачи нелинейной теории упругости с конечны-

ми деформациями для изотропной сжимаемой гиперупругой среды. В актуальной конфигурации уравнение равновесия в дифференциальной формулировке имеет вид [17]

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{T} — тензор напряжений Коши; \mathbf{f} — плотность внешних массовых сил; ρ — плотность материала; ∇ — набла-оператор. Соответствующий уравнениям (1) принцип виртуальной работы (вариационное уравнение) имеет вид [17]

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{D} dV - \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV - \int_{\Sigma} \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{v} d\Sigma = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений; $\delta \mathbf{v}$ — произвольная виртуальная скорость; V — объем тела в актуальной конфигурации; $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \otimes \mathbf{v}^T)$ — тензор скоростей деформации; \mathbf{t}_n — плотность внешних поверхностных сил (вектор напряжений). Последний интеграл берется по границе Σ объема V .

Для задачи (1) выберем два типа определяющих соотношений нелинейной гиперупругой изотропной сжимаемой среды: соответствующие модели А5 по классификации, введенной в [17], и неогуковской модели. Определяющие соотношения модели A_V имеют вид

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot (\lambda I_1(\mathbf{C}) + 2\mu \mathbf{C}) \cdot \mathbf{F}^T, \quad (3)$$

здесь \mathbf{F} — градиент деформаций; $J = \det \mathbf{F}$; \mathbf{C} — тензор деформаций Коши—Грина; λ и μ — параметры Ламе материала. Соотношения между вектором перемещений и градиентом деформации и тензором деформации Коши—Грина имеют следующий вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u}^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u} + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u}^T + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u}^T \right), \quad (5)$$

где \mathbf{E} — единичный тензор, а $\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{u} = \mathbf{r}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X^i}$ — градиент вектора перемещений, заданный в отсчетной конфигурации; \mathbf{r}^i — локальные векторы взаимного базиса.

Определяющие соотношения неогуковской модели выберем в варианте Боне из [14]:

$$\mathbf{T} = \frac{\mu}{J}(\mathbf{B} - \mathbf{E}) + \frac{\lambda}{J}(\ln J)\mathbf{E}, \quad (6)$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ — мера деформаций Фингера.

Граничные условия для уравнений (1) выберем в виде заданных перемещений \mathbf{u}_0 на части Σ_u поверхности и свободной от нагрузок оставшейся части $\Sigma_T = \Sigma \setminus \Sigma_u$ поверхности в актуальной конфигурации

$$\mathbf{u}|_{\Sigma_u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{\Sigma_T} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Линеаризация задачи. Задача решалась с применением метода конечных элементов в актуальной конфигурации. В силу постановки задачи (1) в конечных деформациях результирующая система в методе конечного элемента является нелинейной. Для решения системы нелинейных уравнений применялась следующая модификация метода Ньютона: пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ — система нелинейных уравнений, \mathbf{x}_0 — приближенное решение, а $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}$ — точное решение системы, тогда алгоритм метода Ньютона имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + D\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)[\mathbf{u}] = 0, \quad \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{u}, \quad (8)$$

где $D\mathbf{F}(\mathbf{x}_i)[\mathbf{u}]$ — производная по направлению вектора \mathbf{u} , определяемая как слабый дифференциал (дифференциал Гато [18]):

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \frac{d}{d\xi} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{u}) \Big|_{\xi=0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \xi\mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)}{\xi}. \quad (9)$$

В случае, если функционал $D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ линеен по ξ , то $D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}$. Если же при этом \mathbf{u} — вектор из конечномерного пространства, то обычно используют такое обозначение [14]: $D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)[\mathbf{u}]$.

Линеаризация принципа виртуальной работы (2) согласно алгоритму (8) метода Ньютона имеет вид

$$\delta W(\varphi_k, \delta \mathbf{v}) + D\delta W(\varphi_k, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = 0, \quad (10)$$

здесь φ_k — k -е приближение решения в перемещениях; \mathbf{u} — приращение решения; D — символ производной по направлению неизвестного вектора перемещений \mathbf{u} .

В рассматриваемой задаче внешние поверхностные и массовые силы отсутствовали и граничные условия задавались только в виде перемещений (7). С учетом этого из (9) и (2) можно получить выражение для слабой производной [14]:

$$D\delta W(\varphi_k, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_V \delta \mathbf{D} \cdot \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot ((\nabla \otimes \mathbf{u})^T \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v})) dV. \quad (11)$$

Тогда, перенеся в (10) $\delta W(\varphi_k, \delta \mathbf{v})$ в правую часть со знаком минус, линеаризованный принцип виртуальной работы принимает вид

$$\int_V \delta \mathbf{D} \cdot \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot ((\nabla \otimes \mathbf{u})^T \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v})) dV = - \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot \delta \mathbf{D} dV. \quad (12)$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \nabla \otimes \mathbf{u}^T)$ — тензор деформаций линейной теории упругости; ${}^4\mathbf{C}$ — тензор упругих постоянных четвертого ранга в пространственном описании, зависящий от материала. Для моделей A_V и неогоуковской компоненты тензора ${}^4\mathbf{C}$ соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{A5} &= \frac{1}{2J} (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}), \\ C_{ijkl}^{NH} &= \frac{1}{J} (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu' \delta_{ik} \delta_{jl}), \\ \mu' &= \mu - \lambda \ln J. \end{aligned} \quad (13)$$

Материальную составляющую линеаризованного уравнения виртуальной работы обозначим следующим образом:

$$D\delta W_C(\varphi_k, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_V \delta \mathbf{D} \cdot \cdot {}^4\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (14)$$

а геометрическую составляющую, соответственно, так

$$D\delta W_G(\varphi_k, \delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = \int_V \mathbf{T} \cdot \cdot [(\nabla \otimes \mathbf{u})^T \cdot \nabla \otimes \delta \mathbf{v}] dV. \quad (15)$$

Численный метод решения задачи. Дискретизация задачи по методу конечных элементов (КЭ) проводится разделением всей области решения в актуальной конфигурации на изопараметрические конечные элементы, и аппроксимации решения в каждом КЭ с помощью полиномиальных функций:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i(X^j) \mathbf{q}_i, \quad (16)$$

где $N_i(X^j)$ — функции формы; X^j — лагранжевы координаты; \mathbf{q}_i — неизвестные перемещения в узлах конечного элемента.

После серии преобразований вклад дискретизированной материальной составляющей (14) в линеаризованное уравнение виртуальной работы на элементе e и узлов a и b имеет вид

$$D\delta W_{Ce}(\varphi_k, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] = \int_{V_e} \frac{1}{2} (\delta \mathbf{v}_a \otimes \nabla N_a + \nabla N_a \otimes \delta \mathbf{v}_a) \cdot \cdot^4 \mathbf{C} \cdot \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{u}_b \otimes \nabla N_b + \nabla N_b \otimes \mathbf{u}_b) dV_e. \quad (17)$$

Вклад геометрической составляющей (15) дискретизируется следующим образом:

$$D\delta W_{Ge}(\varphi_k, N_a \delta \mathbf{v}_a)[N_b \mathbf{u}_b] = (\delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \int_{V_e} \nabla N_a \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla N_b \cdot \mathbf{E} dV_e. \quad (18)$$

Вклад эквивалентных узловых усилий имеет вид

$$\delta W_e(\varphi_k, N_a \delta \mathbf{v}_a) = \delta \mathbf{v}_a \cdot \int_{V_e} \mathbf{T} \cdot \nabla N_a dV_e. \quad (19)$$

Дискретизация полученных соотношений согласно методу конечных элементов приводит к матрично-векторной постановке задачи:

$$[K_A + K_\sigma] \{u\} = -\{R\}. \quad (20)$$

Здесь $\{u\}$ — вектор приращения решения; $[K_A]$ и $[K_\sigma]$ — материальная и геометрическая компоненты матрицы жесткости конечного элемента:

$$[K_A] = \int_V [B]^T \cdot [C] \cdot [B] dV, \quad [K_\sigma] = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV, \quad (21)$$

где $[B]$ — матрица производных функций формы конечного элемента; $[C]$ — матричная запись симметричного тензора ${}^4\mathbf{C}$ упругих постоянных; $\{\sigma\}$ — столбец компонент тензора истинных напряжений Коши в текущий момент времени (рассчитывается в результате итерационной процедуры); $\{R\}$ — столбец эквивалентных узловых сил:

$$\{R\} = \int_V [B]^T \cdot \{\sigma\} dV.$$

В силу нелинейной постановки матрица $[K_\sigma]$ и $\{R\}$ зависят от напряжений $\{\sigma\}$, полученных на предыдущем шаге метода Ньютона.

В качестве первого приближения использовались напряжения, полученные при применении к дискретизированной геометрии задачи граничных условий в виде перемещений: полагая решением на нулевой итерации исходную геометрию, измененную на граничные условия, т. е. если \mathbf{x}_0 — вектор координат узлов в исходной конфигурации, и \mathbf{u}_0 — вектор приращений координат узлов, задаваемый граничными условиями в виде перемещений, то $\mathbf{x}_{01} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0$ — вектор координат узлов в нулевой итерации. Разница между двумя этими векторами

$(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_0)$ задает деформацию узлов, по которой можно рассчитать градиент деформации и тензор деформации, а значит, используя (3) или (5), можно получить и компоненты тензора напряжений Коши в выбранной точке конечного элемента.

Алгоритм решения задачи. Алгоритм состоит из двух циклов: цикл по итерациям нагрузки и цикл по итерациям метода Ньютона.

Схема алгоритма следующая.

1. Ввод геометрии, граничных условий и параметров материала.
2. Инициализация $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ — глобальный вектор координат узлов.
3. Цикл по итерациям нагрузки:
 - 3.1. обновить глобальный вектор узлов \mathbf{x} решением (перемещениями), полученным на предыдущей итерации нагрузки и граничными условиями ($\mathbf{x}_{i1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_0$);
 - 3.2. найти $\{R\}$;
 - 3.3. построить глобальную матрицу жесткости;
 - 3.4. реализовать цикл по итерациям метода Ньютона:
 - 3.4.1. построить глобальную матрицу жесткости;
 - 3.4.2. найти вектор \mathbf{R} ;
 - 3.4.3. исключить из матрицы жесткости предписанные перемещения;
 - 3.4.4. решить СЛАУ (20);
 - 3.4.5. вычислить невязку $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$;
 - 3.4.6. вычислить смещение координат точек $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$.

Для решения СЛАУ применялась модификация метода Холецкого с использованием дерева исключения (eliminationtree) [19], а также метод сопряженных градиентов с предобуславливателем в виде неполного LU-разложения (ILU).

Пример численного решения. Для тестирования предложенного алгоритма была рассмотрена задача об одноосном растяжении бруса, для которой известно аналитическое решение [17]. Были выбраны следующие значения констант задачи:

$$\lambda = 100 \text{ МПа}, \mu = 100 \text{ МПа}, h_1 = 1, h_2 = 6, h_3 = 1,$$

где h_i — геометрические размеры бруса в отсчетной конфигурации.

На каждой итерации брусу придавалось приращение по оси растяжения бруса 0,8333 % за 1 итерацию.

На рис. 1 приведен пример решения задачи о растяжении бруса для модели A_v . Показано распределение эквивалентного напряжения в брусе при деформации растяжения 20 %. В виде сетки представлена отсчетная конфигурация бруса до деформации. Цветом обозначено эквивалентное напряжение фон Мизеса (второй инвариант тензора

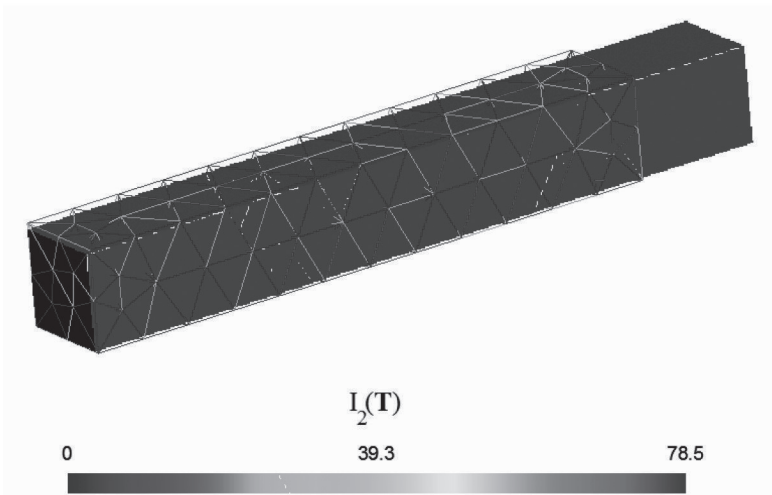


Рис. 1. Распределение интенсивности напряжений $I_2(\mathbf{T})$, МПа, в брусе модели A_V при растяжении до деформации 20 %. Сеткой показана отсчетная конфигурация бруса

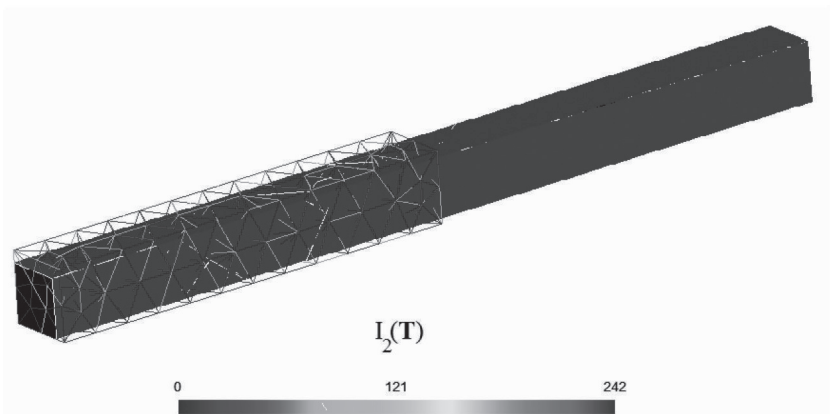


Рис. 2. Распределение интенсивности напряжений $I_2(\mathbf{T})$, МПа, в брусе неогукковской модели при растяжении до деформации 100 %. Сеткой показана отсчетная конфигурация бруса

напряжений $I_2(\mathbf{T})$ [20]. Полученное решение согласуется с известным аналитическим решением [17], относительная ошибка не превышает 0,01 %. На рис. 3 показана диаграмма напряжения — деформации для численного и аналитических решений. Аналогичные графики приведены для неогукковской модели (рис. 2 и 4). Относительная ошибка неогукковской модели не превышает 0,016 %.

Малое количество итераций для модели A_V по сравнению с неогукковской моделью объясняется потерей сходимости метода Ньютона при деформациях выше 20 %. Это явление можно объяснить сильным влиянием нелинейности модели на сходимость метода Ньютона.

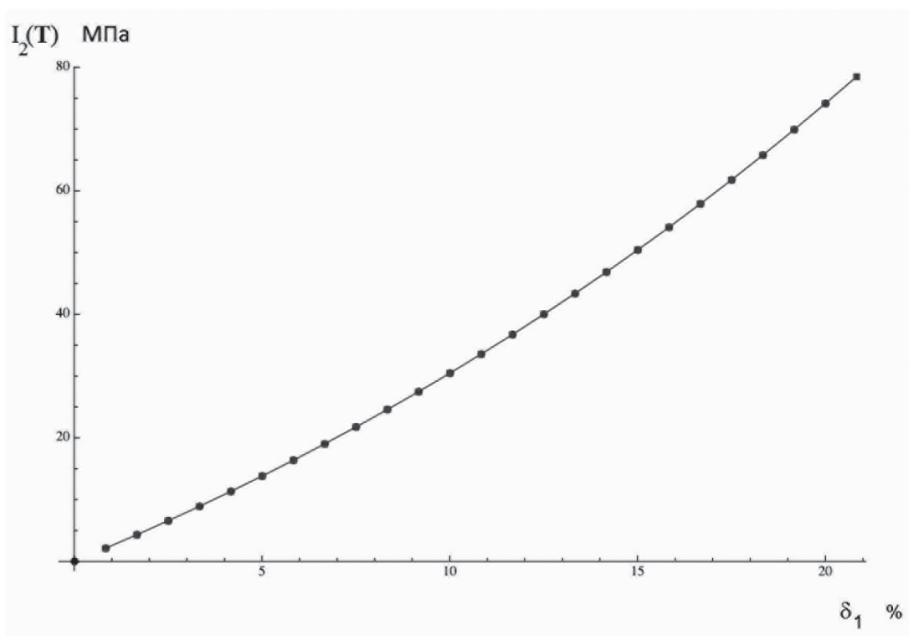


Рис. 3. Диаграмма напряжения (фон Мизеса) $I_2(T)$, МПа, — относительное удлинение δ_1 бруса при растяжении для численного (точки) и аналитического (сплошная линия) решений в модели A_V

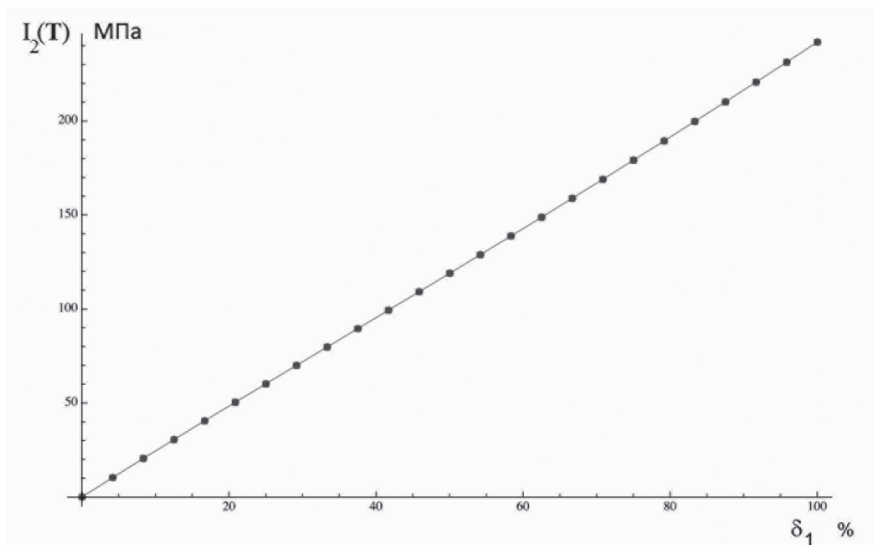


Рис. 4. Диаграмма напряжения (фон Мизеса) $I_2(T)$, МПа, — относительное удлинение δ_1 бруса при растяжении для численного (точки) и аналитического (сплошная линия) решений для неогуксовской модели

Все исходные коды конечно-элементного комплекса, использовавшегося для данной работы, вместе с исходными данными, доступны по адресу <https://github.com/fourier/fea-large>. Авторская реализация метода Холецкого с использованием дерева исключения доступна по адресу <https://github.com/fourier/libspmatrix>.

Выводы. Предложен основанный на слабой вариационной формулировке алгоритм конечно-элементного решения трехмерной задачи нелинейной теории упругости при конечных деформациях в актуальной конфигурации для двух моделей: модели A_V и неогуковской модели сжимаемых сред. Разработано программное обеспечение, реализующее данный алгоритм, на основе авторской реализации метода Холецкого с использованием матриц исключения для решения систем линейных уравнений большой размерности. Проведенное сравнение конечно-элементных расчетов с известными аналитическими решениями для задачи о больших деформациях одноосного растяжения бруса в трехмерной постановке, показало очень высокую точность предложенного алгоритма численного решения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (номер НИР 1.5433.2011) и РФФИ (грант № 12-08-00998-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Трусов П.В., Швейкин А.И. Теория определяющих соотношений: Ч. II. Теория пластичности. Пермь, ПГТУ, 2008, 243 с.
- [2] Коробейников С.Н. *Нелинейное деформирование твердых тел*. Новосибирск, 2000, 262 с.
- [3] Левитас В.И. *Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении*. Киев, Наукова думка, 1987, 232 с.
- [4] Голованов А.И., Султанов Л.У. *Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред*. Казань, Изд-во Казанск. гос. ун-та, 2009, 465 с.
- [5] Simo J.S., Meschke G. A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials. *Comput. Mech.*, 1993, vol. 11, pp. 253–278.
- [6] Betsch P., Stein E. Numerical implementation of multiplicative elasto-plasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1999, vol. 179, pp. 215–245.
- [7] Ibrahimbegovic A., Gharzeddin F. Finite deformation plasticity in principal axes: from a manifold to the Euclidean setting. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1999, vol. 171, pp. 341–369.
- [8] Rosati L., Varloso N. A return map algorithm for general isotropic elasto/viscoplastic materials in principal space. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2004, vol. 60, pp. 461–498.

- [9] Idesman A.V. Comparison of different isotropic elastoplastic models at finite strains used in numerical analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2003, vol. 192, pp. 4659—4674.
- [10] Simo J.S., Ortiz M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1985, vol. 49, pp. 221—245.
- [11] Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритм, приложения*. Москва, Наука, 1986, 232 с.
- [12] Оден Дж. *Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред*. Москва, Мир, 1976, 464 с.
- [13] Димитриенко Ю.И., Царев С.М., Веретенников А.В. Разработка метода конечных элементов для расчета элементов конструкций из несжимаемых материалов с большими деформациями. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2007, № 3, с. 69—83.
- [14] Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. 2nd edition. Cambridge, Cambridge University Press, 2008.
- [15] Димитриенко Ю.И., Даштиев И.З. Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2001, № 1, с. 21—41.
- [16] Dimitrienko Yu.I. Novel viscoelastic models for elastomers under finite strains. *European Journal of Mechanics, A / Solids*, 2002, vol. 21 (2), pp. 133—150.
- [17] Димитриенко Ю.И. *Нелинейная механика сплошной среды*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2009, 610 с.
- [18] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, Наука, 1976, 542 с.
- [19] Davis T.A. *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. Philadelphia, SIAM, 2006.
- [20] Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды*. Т. 1: *Тензорный анализ*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Димитриенко Ю.И., Веретенников А.А. Конечно-элементное моделирование больших деформаций нелинейно-упругих материалов с использованием модели A_v . *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1118.html>

Димитриенко Юрий Иванович родился в 1962 г., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана (НОЦ «СИМПЛЕКС»), действительный член академии инженерных наук. Автор более 250 научных работ в области механики сплошной среды, вычислительной механики, нелинейной механики деформируемых сред, термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, моделирования в экономике. e-mail: dimit.bmstu@gmail.com; txm.fourier@gmail.com

Веретенников Алексей Анатольевич родился в 1983 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2005 г. Аспирант кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор научных работ, посвященных применению метода конечных элементов для решения задач механики при конечных деформациях.