

Математическое моделирование механических систем со многими степенями свободы

© Ю.В. Журавлёв

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В статье развита методология математического моделирования механических систем со многими степенями свободы с опорой на фундаментальные классические принципы лагранжевой механики и построение математической модели в виде системы уравнений Лагранжа второго рода, преобразуемых в гамильтонову систему в форме Якоби. По данной методике получена система Якоби — модель спуска осесимметричных груза и парашюта в земной атмосфере в режиме потенциального обтекания с наполненным куполом парашюта. Для модели в виде шарнирной связки двух твердых тел с девятью степенями свободы получены выражения кинетического потенциала и обобщенных сил. Предложена алгоритмизация дальнейших этапов исследования с использованием многошагового экстраполяционного метода Адамса для интегрирования системы Якоби и численного дифференцирования кинетического потенциала по обобщенным координатам. Обсуждаются вычислительные и методические погрешности результата численного дифференцирования. Дан обзор работ по проблеме регуляризации алгоритмов численного дифференцирования.

Ключевые слова: математическое моделирование, парашютная система, уравнения Лагранжа, численное интегрирование и дифференцирование.

Введение. Современная методология исследования и проектирования сложных систем исходит из определенной иерархии математических моделей. При моделировании динамических систем механики с неизвестными интегральными соотношениями остро стоит вопрос об адекватности модели. Необходимы надежные методологические принципы моделирования.

Исходя из лагранжевых принципов теоретической механики, изучение систем с большим числом степеней свободы сводится к исследованию систем дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода [1–4]. Неоднозначность выбора обобщенных координат позволяет изучать динамику систем в различных конфигурационных пространствах (фазовых пространствах, пространствах состояний — в другой терминологии). При использовании аппарата лагранжевой механики проблема моделирования и соответствующей адекватности решается существенно проще. Первоначальной задачей теоретической части исследования после выбора обобщенных координат является получение формулы кинетического потенциала (разности между кинетической и потенциальной энергиями механической системы), а итогом — формулы обобщенных сил (коэффициентов влияния вариаций обобщенных координат).

нат на вариацию работы). Собственно алгоритмическая реализация моделирования потребует привлечения расширяющихся возможностей символьной компьютерной математики. Причем быстродействие ЭВМ и развитие многопроцессорных вычислительных технологий актуализирует идею применения вычислительных алгоритмов, ранее считавшихся трудоемкими и даже математически некорректными, например алгоритмов численного дифференцирования.

Пусть в абсолютном пространстве конфигурация механической системы с голономными механическими связями определяется вектором независимых обобщенных координат $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)'$. Движение системы с n степенями свободы описывается дифференциальным уравнением Лагранжа 2-го рода $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial q} + Q$, где $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)'$ — обобщенные скорости, $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)'$ — обобщенные силы непотенциального происхождения, U — силовая функция потенциальной природы, T — кинетическая энергия системы. Будем считать известными $T = T(q, \dot{q}, t)$, $U = U(q, t)$, $Q = Q(q, \dot{q}, t)$, при этом

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A \dot{q} \rangle + \langle b, \dot{q} \rangle + T_0,$$

где $A = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$, $a_{ij} = a_{ij}(q, t)$, $b_i = b_i(q, t)$,

$$T_0 = T_0(q, t) \langle \dot{q}, A \dot{q} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \langle b, \dot{q} \rangle = \sum_{i=1}^n b_i \dot{q}_i.$$

Путем введения в рассмотрение вектора обобщенных импульсов $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, $p = (p_1, \dots, p_n)'$, $p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ ($k=1, 2, \dots, n$), функции Лагранжа, или иначе кинетического потенциала, $L = T + U$, и градиента кинетического потенциала $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q}$, перейдем от одного уравнения Лагранжа 2-го рода к Гамильтоновой системе двух уравнений

в канонической форме Якоби [1]: $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} + Q$, $\frac{dq}{dt} = A^{-1}(p - b)$, или $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$,

где $y = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$; $f = \begin{pmatrix} f_I \\ f_{II} \end{pmatrix}$; $f_I = \frac{\partial L}{\partial q} + Q$; $f_{II} = A^{-1}(p - q)$. Так как

$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A\dot{q} + b$, то вместо пары (q, \dot{q}) можно оперировать эквивалентной парой (p, q) и говорить о задаче Коши для гамильтоновой

системы $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$, $y(t_0) = y_0$, $t \geq t_0$, $y \in R^{2n}$. Для решения последней

задачи Коши необходимо выбрать алгоритмы интегрирования [5–10].

Дополнительно укажем на необходимость вычисления градиента

кинетического потенциала $\frac{\partial L}{\partial q}$ при вычислении вектора f_I , для чего

потребуется регуляризирующие алгоритмы [11–17]. Отдельного внимания заслуживает вопрос о вычислении вектора f_{II} из матричного

уравнения $Af_{II} = p - q$, что должно опираться на метод квадратного

корня [18]. В данной статье проблемы алгоритмизации моделирования

многомерных механических систем с голономными связями изучены на примере математического моделирования системы груз—

парашют (СГП).

Постановка задачи. Отмеченные выше методологические и частные вопросы требуется решить в задаче моделирования динамики спуска СГП. Характер данной работы не является чисто формальным, поэтому и постановка задачи, и рамки исследования будут уточняться по ходу исследований.

Аналитический этап формирования модели пространственного движения системы груз—парашют. СГП является примером голономной системы. Груз сцеплен с коушем парашюта посредством идеального сферического шарнира — вертлюга. Груз и парашют приняты за абсолютно твердые осесимметричные тела вращения. Движение СГП рассмотрено в спокойной земной атмосфере в режиме потенциального обтекания при наполненном куполе парашюта. Груз именуется телом 1, парашют — телом 2. В обозначениях индексированных величин соответствующая величина относится к телу, номер которого указан индексом. На СГП действуют внешние силы потенциальной и непотенциальной природы. Потенциальные силы определяются плоскопараллельной моделью гравитационного поля Земли с постоянной напряженностью величины g_0 , и вектор напряженности направлен вниз. К непотенциальным относятся аэродинамические силы, для определения которых использована гипотеза о стационарном обтекании твердого тела в спокойной земной атмосфере. Аэродинамические

коэффициенты для расчета соответствующих компонент главного вектора аэродинамических сил и их главного момента заданы функциями от конфигурационных и скоростных величин СГП. Главный вектор аэродинамических сил приложен к центру масс тела, главный момент аэродинамических сил задается моментом относительно центра масс. На рис. 1 показана СГП и абсолютная система $O_g X_g Y_g Z_g$.

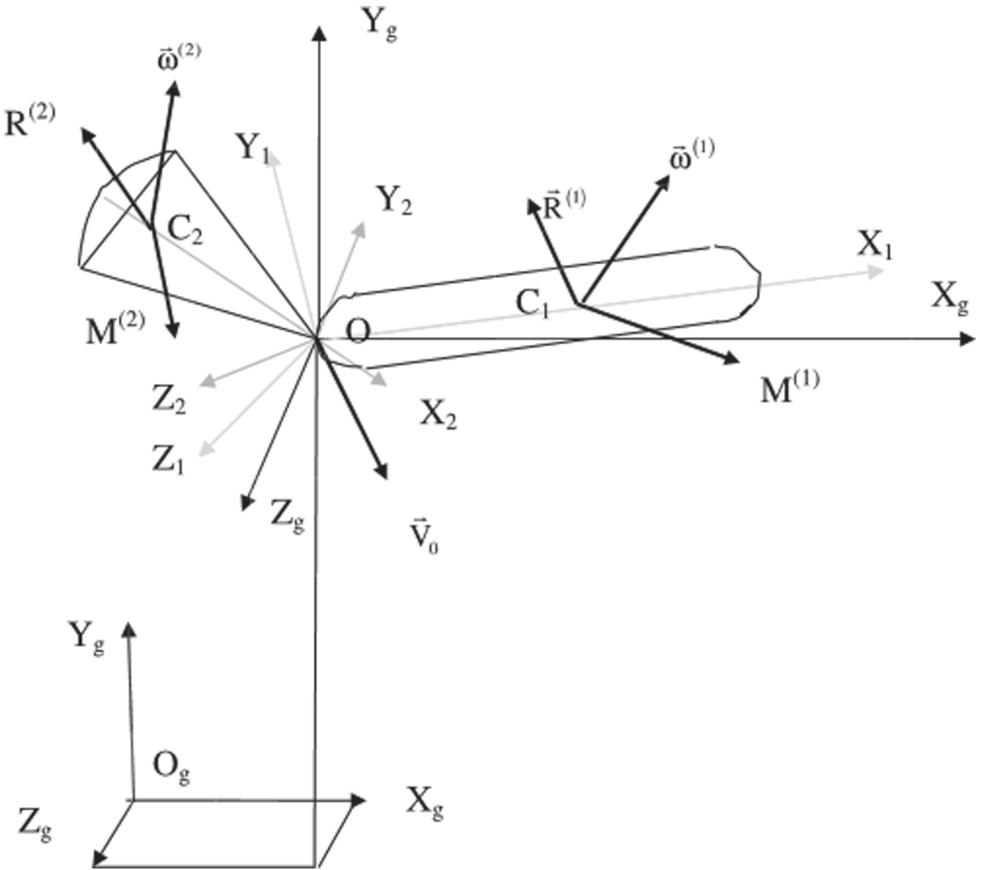


Рис. 1. Конфигурация СГП в абсолютной системе координат

Движение СГП исследуется в правой ортогональной земной системе координат $O_g X_g Y_g Z_g$ при неподвижном полюсе O_g относительно Земли, причем ось Y_g направлена вверх по земной вертикали. С достаточной точностью система $O_g X_g Y_g Z_g$ полагается абсолютной системой отсчета. С каждым телом ($v = 1, 2$) связана правая прямоугольная система осей $O X_v Y_v Z_v$, причем связанные системы имеют общий полюс O в центре вертлюга. Ось $O X_v$ совпадает с осью вращения v -го тела, и положительное направление оси $O X_2$ ориентировано от купола пара-

шюта к коушу. Центры масс тел $C_v \in OX_v$ имеют координаты $x_{c1} = b_1 > 0$, $x_{c2} = b_2 < 0$. Предполагаем, что расчет сил и моментов дает их проекции на оси связанной системы координат. На рис. 1 показаны векторы: \vec{V}_0 — абсолютная скорость точки O ; $\vec{\omega}^{(v)}$ — угловая скорость вращения v -го тела; $\vec{R}^{(v)}$ — главный вектор аэродинамических сил v -го тела, приложенный в точке C_v ; $\vec{M}^{(v)}$ — главный аэродинамический момент, действующий со стороны среды на v -е тело относительно C_v . Поместим в точку O «подвижную» земную систему координат $OX_g Y_g Z_g$, (оси Кёнига [4]), участвующую в поступательном перемещении относительно неподвижной земной системы $O_g X_g Y_g Z_g$. Положение v -го тела относительно осей Кёнига определяется тремя эйлеровыми углами: рыскания ψ_v , тангажа ϑ_v и крена φ_v . При этом угол ψ_v — это угол между осью OX_v и продольной координатной плоскостью $OX_g Y_g$; угол ϑ_v — угол между осью OX_v и горизонтальной координатной плоскостью $OX_g Z_g$; угол φ_v — угол между осью OY_v и продольной плоскостью $OX_g Y_g$. Связь между координатами вектора в связанной системе и в системе Кёнига задается матрицей направляющих косинусов:

$$A_{\text{связ} \rightarrow \text{зем}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{11} = c\vartheta \cdot c\psi, \quad \alpha_{12} = s\vartheta, \quad \alpha_{13} = c\vartheta \cdot s\psi,$$

$$\alpha_{21} = -c\varphi \cdot s\vartheta \cdot c\psi + s\varphi \cdot s\psi, \quad \alpha_{22} = c\varphi \cdot c\vartheta, \quad \alpha_{23} = c\varphi \cdot s\vartheta \cdot s\psi + s\varphi \cdot c\psi,$$

$$\alpha_{31} = s\varphi \cdot s\vartheta \cdot c\psi + c\varphi \cdot s\psi, \quad \alpha_{32} = -s\varphi \cdot c\vartheta, \quad \alpha_{33} = -s\varphi \cdot s\vartheta \cdot s\psi + c\varphi \cdot c\psi,$$

где $s\psi = \sin \psi$; $c\psi = \cos \psi$; $s\vartheta = \sin \vartheta$; $c\vartheta = \cos \vartheta$; $s\varphi = \sin \varphi$; $c\varphi = \cos \varphi$.

Так как положение связанных осей v -го тела характеризуется эйлеровыми углами ψ_v , ϑ_v и φ_v , то на место ψ , ϑ и φ в матрицу $A_{\text{связ} \rightarrow \text{зем}}$ необходимо подставлять ψ_v , ϑ_v и φ_v соответственно.

Разложения векторов сил и скоростей могут приводиться к связанным осям

$$\vec{R}^{(v)} = R_x^{(v)} \vec{i}_v + R_y^{(v)} \vec{j}_v + R_z^{(v)} \vec{k}_v,$$

$$\vec{M}^{(v)} = M_x^{(v)} \vec{i}_v + M_y^{(v)} \vec{j}_v + M_z^{(v)} \vec{k}_v,$$

$$\vec{\omega}^{(v)} = \omega_x^{(v)} \vec{i}_v + \omega_y^{(v)} \vec{j}_v + \omega_z^{(v)} \vec{k}_v,$$

.....

где $(\vec{i}_v, \vec{j}_v, \vec{k}_v)$ — ортонормированный правоориентированный репер v -й связанной системы осей $OX_v Y_v Z_v$, либо к абсолютным осям

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}}^{(v)} &= R_{x_g}^{(v)} \bar{\mathbf{i}}_g + R_{y_g}^{(v)} \bar{\mathbf{j}}_g + R_{z_g}^{(v)} \bar{\mathbf{k}}_g, \\ \bar{\mathbf{M}}^{(v)} &= M_{x_g}^{(v)} \bar{\mathbf{i}}_g + M_{y_g}^{(v)} \bar{\mathbf{j}}_g + M_{z_g}^{(v)} \bar{\mathbf{k}}_g, \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}^{(v)} &= \omega_{x_g}^{(v)} \bar{\mathbf{i}}_g + \omega_{y_g}^{(v)} \bar{\mathbf{j}}_g + \omega_{z_g}^{(v)} \bar{\mathbf{k}}_g, \\ &\dots\dots\dots,\end{aligned}$$

где $(\bar{\mathbf{i}}_g, \bar{\mathbf{j}}_g, \bar{\mathbf{k}}_g)$ — ортонормированный правоориентированный репер абсолютной системы координат $O_g X_g Y_g Z_g$.

Выбор обобщенных координат, определяющих пространственную конфигурацию СГП. СГП имеет 9 степеней свободы (6 у одного свободного тела и 3 у другого, как связанного по отношению поступательных перемещений). В качестве обобщенных координат примем 3 декартовых координаты точки O : x_0, y_0, z_0 , а также по 3 эйлеровых угла на каждое тело: ψ_v, ϑ_v и ϕ_v ($v = 1, 2$). Выберем вектор обобщенных координат $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9) = (x_0, y_0, z_0, \psi_1, \vartheta_1, \phi_1, \psi_2, \vartheta_2, \phi_2)$ и соответствующий вектор обобщенных скоростей $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6, \dot{q}_7, \dot{q}_8, \dot{q}_9) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\psi}_1, \dot{\vartheta}_1, \dot{\phi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\vartheta}_2, \dot{\phi}_2)$.

Необходимо получить аналитические выражения кинетического потенциала $L = T + U$, а обобщенных сил Q_1, Q_2, \dots, Q_9 , как функций обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_9 , обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_9$ и времени t .

Нахождение кинетической энергии СГП. Вначале найдем кинетическую энергию произвольного тела вращения при его свободных перемещениях в абсолютном пространстве. Выбираем полюс O на оси вращения тела и правую ортонормированную тройку $(\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}})$ связанной с телом системы осей ориентируем так, что орт $\bar{\mathbf{i}}$ направлен из O по оси вращения и задает направление координатной оси OX , орт $\bar{\mathbf{j}}$ задает направление оси OY с привязкой к некоторому элементу тела, орт $\bar{\mathbf{k}}$ задает ось OZ . Пусть C — центр масс тела с известным положением $\vec{\mathbf{r}}'_c \equiv \overrightarrow{OC} = b\bar{\mathbf{i}}$. Будем предполагать, что тензор инерции тела в связанных осях $OXYZ$ в точке O охарактеризован диагональной матрицей $\Theta_0 = \text{diag}\{\Theta_x^*, \Theta_y^*, \Theta_z^*\}$, что соответствует выбору координатных осей совмещенными с главными осями инерции тела.

Если $\vec{\mathbf{V}}_0$ — абсолютная скорость полюса, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ — абсолютная угловая скорость вращения тела, то кинетическая энергия тела массой m

$$T = \frac{1}{2} \left(mV_0^2 + 2m(\vec{V}_0 \times \vec{\omega}) \vec{r}'_c + \vec{\omega} \cdot \Theta_0 \cdot \vec{\omega} \right).$$

Представим векторы в связанной системе координат

$$\vec{V}_0 = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}, \quad \vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad \vec{r}'_c = b \vec{i},$$

и заменим тензорное произведение на матричное $\omega^T \Theta_0 \omega$, где $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)'$; $\Theta_0 = \text{diag}\{\Theta_x^*, \Theta_y^*, \Theta_z^*\}$; $\Theta_x^*, \Theta_y^*, \Theta_z^*$ — главные осевые моменты инерции тела в полюсе O , тогда

$$T = \frac{1}{2} \left(mV_0^2 + 2m(V_{Oy}\omega_z - V_{Oz}\omega_y) b + \Theta_x^* \omega_x^2 + \Theta_y^* \omega_y^2 + \Theta_z^* \omega_z^2 \right).$$

Воспользуемся теоремой Штейнера, связывающей моменты инерции относительно параллельных осей $\Theta_x^* = J_x$, $\Theta_y^* = J_y + mb^2$, $\Theta_z^* = J_z + mb^2$, где J_x, J_y, J_z — главные осевые моменты инерции тела в центре масс, причем $J_y = J_z$.

Таким образом, установлен общий вид кинетической энергии тела вращения при его произвольных эволюционных перемещениях в абсолютном пространстве:

$$T = \frac{1}{2} \left(mV_0^2 + 2m(V_{Oy}\omega_z - V_{Oz}\omega_y) b + J_x \omega_x^2 + (J_y + mb^2)(\omega_y^2 + \omega_z^2) \right).$$

Теперь за полюс O примем центр вертлюга СГП, а за связанные оси $OXYZ$ — координатные оси $OX_v Y_v Z_v$ v -го тела; m_v — масса v -го тела, $J_x^{(v)}, J_y^{(v)}, J_z^{(v)}$ ($J_y^{(v)} = J_z^{(v)}$) — главные осевые моменты инерции v -го тела в точке C_v .

Заметим, что

$$\omega_{xv} = \dot{\psi}_v c \vartheta_v + \dot{\phi}_v, \quad \omega_{yv} = \dot{\psi}_v c \varphi_v c \vartheta_v + \dot{\vartheta}_v s \varphi_v, \quad \omega_{zv} = -\dot{\psi}_v c \varphi_v c \vartheta_v + \dot{\vartheta}_v c \varphi_v,$$

$$\begin{pmatrix} V_{Oxv} \\ V_{Oyv} \\ V_{Ozv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(v)} & \alpha_{12}^{(v)} & \alpha_{13}^{(v)} \\ \alpha_{21}^{(v)} & \alpha_{22}^{(v)} & \alpha_{23}^{(v)} \\ \alpha_{31}^{(v)} & \alpha_{32}^{(v)} & \alpha_{33}^{(v)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_O \\ \dot{y}_O \\ \dot{z}_O \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{ij}^{(v)}$ — элементы матрицы поворота связанной системы координат v -го тела относительно подвижной земной системы координат $OX_g Y_g Z_g$. При подстановке последних выражений в формулу кинетической энергии тела вращения, произвольно перемещающегося в пространстве, получим выражение кинетической энергии v -го тела СГП в следующем виде:

$$T_v = \frac{1}{2} \left(a_{11}^{(v)} \dot{x}_0^2 + a_{22}^{(v)} \dot{y}_0^2 + a_{33}^{(v)} \dot{z}_0^2 + a_{44}^{(v)} \dot{\psi}_v^2 + a_{55}^{(v)} \dot{\vartheta}_v^2 + a_{66}^{(v)} \dot{\phi}_v^2 + \right. \\ \left. + 2a_{14}^{(v)} \dot{x}_0 \dot{\psi}_v + 2a_{15}^{(v)} \dot{x}_0 \dot{\vartheta}_v + 2a_{24}^{(v)} \dot{y}_0 \dot{\psi}_v + 2a_{25}^{(v)} \dot{y}_0 \dot{\vartheta}_v + \right. \\ \left. + 2a_{34}^{(v)} \dot{z}_0 \dot{\psi}_v + 2a_{35}^{(v)} \dot{z}_0 \dot{\vartheta}_v + 2a_{45}^{(v)} \dot{\psi}_v \dot{\vartheta}_v + 2a_{46}^{(v)} \dot{\psi}_v \dot{\phi}_v \right),$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}^{(v)} &= a_{22}^{(v)} = a_{33}^{(v)} = m_v, \\ a_{44}^{(v)} &= J_x^{(v)} (c\vartheta_v)^2 + 2(J_y^{(v)} + m_v b_v^2) (c\varphi_v c\vartheta_v)^2, \\ a_{55}^{(v)} &= J_y^{(v)} + m_v b_v^2, \\ a_{66}^{(v)} &= J_x^{(v)}, \\ a_{14}^{(v)} &= m_v b_v \kappa_1^{(v)}, \quad \kappa_1^{(v)} = -(\alpha_{21}^{(v)} + \alpha_{31}^{(v)}) c\varphi_v c\vartheta_v, \\ a_{15}^{(v)} &= m_v b_v \kappa_2^{(v)}, \quad \kappa_2^{(v)} = \alpha_{21}^{(v)} c\varphi_v - \alpha_{31}^{(v)} s\varphi_v, \\ a_{24}^{(v)} &= m_v b_v \kappa_3^{(v)}, \quad \kappa_3^{(v)} = -(\alpha_{22}^{(v)} + \alpha_{32}^{(v)}) c\varphi_v c\vartheta_v, \\ a_{25}^{(v)} &= m_v b_v \kappa_4^{(v)}, \quad \kappa_4^{(v)} = \alpha_{22}^{(v)} c\varphi_v - \alpha_{32}^{(v)} s\varphi_v, \\ a_{34}^{(v)} &= m_v b_v \kappa_5^{(v)}, \quad \kappa_5^{(v)} = -(\alpha_{23}^{(v)} + \alpha_{33}^{(v)}) c\varphi_v c\vartheta_v, \\ a_{35}^{(v)} &= m_v b_v \kappa_6^{(v)}, \quad \kappa_6^{(v)} = \alpha_{23}^{(v)} c\varphi_v - \alpha_{33}^{(v)} s\varphi_v, \\ a_{45}^{(v)} &= (J_y^{(v)} + m_v b_v^2) \kappa_7^{(v)}, \quad \kappa_7^{(v)} = (s\varphi_v - c\varphi_v) c\varphi_v c\vartheta_v, \\ a_{46}^{(v)} &= J_x^{(v)} c\vartheta_v. \end{aligned}$$

Полная кинетическая энергия СГП, равная $T = \sum_{v=1}^2 T_v$, примет вид квадратичной формы $T = \frac{1}{2} \dot{q}' A \dot{q}$. Матрица A — симметрическая и сильно разреженная:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & 0 & a_{17} & a_{18} & 0 \\ & a_{22} & 0 & a_{24} & a_{25} & 0 & a_{27} & a_{28} & 0 \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & a_{37} & a_{38} & 0 \\ & & * & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 & 0 \\ & & & * & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & * & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & * & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ & & & & & & & a_{88} & 0 \\ & & & & & & & & a_{99} \end{pmatrix}.$$

Ненулевые элементы матрицы следующие:

$$a_{ii} = \sum_{v=1}^2 a_{ii}^{(v)}, \quad (i = \overline{1,6}),$$

$$a_{ij}^{(v)} = a_{i_v j_v}, \quad (v = 1, 2), \quad (i, j = \overline{1,6});$$

$$i_v = i \quad \text{при} \quad i = 1, 2, 3;$$

$$i_v = i + 3(v - 1) \quad \text{при} \quad i = 4, 5, 6.$$

Обозначим $c_k = \cos q_k$, $s_k = \sin q_k$ ($k = \overline{1,9}$).

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = m_1 + m_2,$$

$$a_{4_4 v} = J_x^{(v)} (c_{5_v})^2 + 2(J_y^{(v)} + m_v b_v^2) (c_{6_v} c_{5_v})^2,$$

$$a_{5_5 v} = J_y^{(v)} + m_v b_v^2,$$

$$a_{6_6 v} = J_x^{(v)},$$

$$a_{14_v} = m_v b_v \kappa_1^{(v)}, \quad \kappa_1^{(v)} = -(\alpha_{21}^{(v)} + \alpha_{31}^{(v)}) c_{6_v} c_{5_v},$$

$$a_{15_v} = m_v b_v \kappa_2^{(v)}, \quad \kappa_2^{(v)} = \alpha_{21}^{(v)} c_{6_v} - \alpha_{31}^{(v)} s_{6_v},$$

$$a_{24_v} = m_v b_v \kappa_3^{(v)}, \quad \kappa_3^{(v)} = -(\alpha_{22}^{(v)} + \alpha_{32}^{(v)}) c_{6_v} c_{5_v},$$

$$a_{25_v} = m_v b_v \kappa_4^{(v)}, \quad \kappa_4^{(v)} = \alpha_{22}^{(v)} c_{6_v} - \alpha_{32}^{(v)} s_{6_v},$$

$$a_{34_v} = m_v b_v \kappa_5^{(v)}, \quad \kappa_5^{(v)} = -(\alpha_{23}^{(v)} + \alpha_{33}^{(v)}) c_{6_v} c_{5_v},$$

$$a_{35_v} = m_v b_v \kappa_6^{(v)}, \quad \kappa_6^{(v)} = \alpha_{23}^{(v)} c_{6_v} - \alpha_{33}^{(v)} s_{6_v},$$

$$a_{4_4 5_v} = (J_y^{(v)} + m_v b_v^2) \kappa_7^{(v)}, \quad \kappa_7^{(v)} = (s_{6_v} - c_{6_v}) c_{6_v} c_{5_v},$$

$$a_{4_4 6_v} = J_x^{(v)} c_{5_v}.$$

Здесь

$$\alpha_{11}^{(v)} = c_{5_v} c_{4_v}, \quad \alpha_{12}^{(v)} = s_{5_v}, \quad \alpha_{13}^{(v)} = c_{5_v} s_{4_v},$$

$$\alpha_{21}^{(v)} = -c_{6_v} s_{5_v} c_{4_v} + s_{6_v} s_{4_v}, \quad \alpha_{22}^{(v)} = c_{6_v} c_{5_v}, \quad \alpha_{23}^{(v)} = c_{6_v} s_{5_v} s_{4_v} + s_{6_v} c_{4_v},$$

$$\alpha_{31}^{(v)} = s_{6_v} s_{5_v} c_{4_v} + c_{6_v} s_{5_v}, \quad \alpha_{32}^{(v)} = -s_{6_v} c_{5_v}, \quad \alpha_{33}^{(v)} = -s_{6_v} s_{5_v} s_{4_v} + c_{6_v} c_{4_v}.$$

Силовая функция СГП. Силовая функция СГП $U = -\Pi$, где Π — потенциальная энергия СГП, равная сумме потенциальных энергий двух тел:

$$\Pi = \sum_{v=1}^2 m_v g_0 y_{c_v}.$$

Здесь y_{c_v} — высота центра масс v -го тела в земной системе координат.
Учитывая

$$y_{c_v} = y_0 + A_{\text{связ} \rightarrow \text{зем}}^{(v)} \begin{pmatrix} b_v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $A_{\text{связ} \rightarrow \text{зем}}^{(v)} = (\alpha_{ij}^{(v)}) = (A_{\text{зем} \rightarrow \text{связ}}^{(v)})' = (\alpha_{ji}^{(v)})$, найдем $y_{c_v} = y_0 + b_v s_{5_v}$,
 $s_{5_v} = \sin(\vartheta_v)$. Итак, $\Pi = (m_1 + m_2) g_0 q_2 + m_1 b_1 \sin q_5 + m_2 b_2 \sin q_8$.

Напомним, что $b_1 > 0$, $b_2 < 0$.

Кинетический потенциал $L = T + U = T - \Pi$ можно, наконец, записать в виде

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}' A \dot{q} - (m_1 + m_2) g_0 q_2 - m_1 b_1 \sin q_5 - m_2 b_2 \sin q_8.$$

Обобщенные силы непотенциальной природы, действующие на СГП со стороны внешней среды. Обобщенная сила Q_k определяется как функция влияния вариации k -й обобщенной координаты δq_k на элементарную работу $\delta W_k = Q_k \delta q_k$ со стороны аэродинамических сил при отсутствии вариаций других обобщенных координат. Воздействие воздушной среды на v -е тело сводимо к главному вектору $\vec{R}^{(v)}$ и главному моменту $\vec{M}^{(v)}$ с известными разложениями в связанной v -й системе координат $OX_v Y_v Z_v$. Пусть $\delta q_1 = \delta x_0 \neq 0$ и одновременно $\delta q_k =$

$= 0 \forall k \neq 1$. Очевидно, что $Q_1 = \sum_{v=1}^2 R_{x_g}^{(v)}$, где $R_{x_g}^{(v)}$ — проекция вектора $\vec{R}^{(v)}$

на ось OX_g . Так как $R_{x_g}^{(v)} = R_x^{(v)} \alpha_{11}^{(v)} + R_y^{(v)} \alpha_{12}^{(v)} + R_z^{(v)} \alpha_{13}^{(v)}$, где $R_x^{(v)}, R_y^{(v)}, R_z^{(v)}$ — проекции вектора $\vec{R}^{(v)}$ на связанные оси OX_v, OY_v, OZ_v тела, то

$Q_1 = \sum_{v=1}^2 (R_x^{(v)} \alpha_{11}^{(v)} + R_y^{(v)} \alpha_{12}^{(v)} + R_z^{(v)} \alpha_{13}^{(v)})$. Аналогично найдем

$$Q_2 = \sum_{v=1}^2 (R_x^{(v)} \alpha_{21}^{(v)} + R_y^{(v)} \alpha_{22}^{(v)} + R_z^{(v)} \alpha_{23}^{(v)}), \quad Q_3 = \sum_{v=1}^2 (R_x^{(v)} \alpha_{31}^{(v)} + R_y^{(v)} \alpha_{32}^{(v)} + R_z^{(v)} \alpha_{33}^{(v)}).$$

Рассмотрим ненулевое рыскание первого тела $\delta q_4 = \delta \psi_1 \neq 0$ при $\delta q_k = 0 \forall k \neq 4$. При этом векторная проекция силы $\vec{R}^{(1)}$ на горизонталь-

ную земную плоскость совершает работу $(R_y^{(1)}b_1 \sin \varphi_1 - R_z^{(1)}b_1 \cos \varphi_1) \delta \psi_1$, а проекция момента $\vec{M}^{(1)}$ на горизонтальную земную плоскость совершает работу $(M_y^{(1)} \cos \varphi_1 - M_z^{(1)} \sin \varphi_1) \delta \psi_1$.

В итоге $Q_4 = (M_y^{(1)} - R_z^{(1)}b_1) \cos \varphi_1 - (R_y^{(1)}b_1 + M_z^{(1)}) \sin \varphi_1$. Аналогично получим

$$Q_5 = (M_z^{(1)} + R_y^{(1)}b_1) \cos \varphi_1 + (M_y^{(1)} - R_z^{(1)}b_1) \sin \varphi_1, \quad Q_6 = M_x^{(1)},$$

$$Q_7 = (M_y^{(2)} - R_z^{(2)}b_2) \cos \varphi_2 - (R_y^{(2)}b_2 + M_z^{(2)}) \sin \varphi_2,$$

$$Q_8 = (M_z^{(2)} + R_y^{(2)}b_2) \cos \varphi_2 + (M_y^{(2)} - R_z^{(2)}b_2) \sin \varphi_2, \quad Q_9 = M_x^{(2)}.$$

Таким образом, получены аналитические выражения кинетического потенциала $L = T - \Pi$ и обобщенных сил Q_1, Q_2, \dots, Q_n как функций обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ и времени t . Аналитический этап математического моделирования динамической системы СГП можно считать завершенным.

Решение начальной задачи Коши для гамильтоновой системы.

Наличие проблемы численного нахождения градиента кинетического потенциала заставило привлечь многошаговый метод численного интегрирования. Численное решение начальной задачи Коши $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$,

$y(t_0) = y_0, \quad t \geq t_0, \quad y \in \mathbb{R}^{2n}$ строится в виде сеточной функции

$\{y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_N\}$ на равномерной сетке $\{t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_N\}$,

где $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N \leq t_f$ с шагом $h = t_{n+1} - t_n$. Дифференциальному уравнению на n -м шаге соответствует равносильное интегральное

$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y(t), t) dt$. Заменяв подынтегральную

вектор-функцию $f(y(t), t)$ полиномиальным интерполянтном $P_{k,n}(t)$ степени k , построенным на $(k+1)$ точечном фронтовом отрезке данных $\{(t_{n-k}, f_{n-k}), (t_{n-k+1}, f_{n-k+1}), \dots, (t_n, f_n)\}$, где $f_n = f(y_n, t_n)$ и $y_n \approx y(t_n)$, получим явную k -шаговую формулу Адамса:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_{k,n}(t) dt.$$

При $k = 5$ это явная 5-шаговая экстраполяционная формула Адамса—Башфорта

$$y_{n+1} = y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n + \frac{251}{720} \nabla^4 f_n + \frac{95}{288} \nabla^5 f_n \right),$$

которая имеет локальную погрешность $O'(h^7)$, причем

$$\begin{aligned} \nabla f_n &= f_n - f_{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad \nabla^2 f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}, \\ \nabla^3 f_n &= f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}, \quad \nabla^4 f_n = f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4}, \\ \nabla^5 f_n &= f_n - 5f_{n-1} + 10f_{n-2} - 10f_{n-3} + 5f_{n-4} - f_{n-5}. \end{aligned}$$

Для расчета фронта (первых 6-ти узлов) сетки, t_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, можно использовать некоторый одношаговый метод.

Двухточечная формула и ее методическая погрешность. Рассмотрим проблему численного нахождения частных производных $\frac{\partial L}{\partial q_k}$.

Отдельно отметим двухточечную формулу центральных разностей. Пусть $y = f(x)$ — функция и $f'(0)$ — ее производная в точке $x = 0$. Пусть $y_k = f(kh)$, $k = -2, -1, 0, 1, 2$ — отсчеты заданной функции.

Двухточечная формула центральных разностей $\hat{y}'_0 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$. Так как

$$f'(0) = \hat{y}'_0 - \frac{h^2}{6} y'''(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1, \text{ то методическая погрешность двух-}$$

$$\text{точечной формулы центральных разностей } \Delta_{\text{метод}} = \frac{h^2}{6} \max_{x_{-1} < \xi < x_1} |y'''(\xi)|.$$

Вычислительная погрешность округлений при двухточечной формуле численного дифференцирования. В случае t -разрядной длины машинного слова в нормализованной p -ичной системе мантисса числа x будет округляться с погрешностью $\Delta_{\text{выч}}(x) \leq |x| \frac{1}{2} \frac{1}{p^{t-1}} \approx |x| \cdot 0,5 \cdot 10^{-15}$

(при $p = 16$ и $t = 14$). Поэтому

$$\Delta_{\text{выч}}(\hat{y}'_0) = \frac{\Delta_{\text{выч}}(y_1) + \Delta_{\text{выч}}(y_{-1})}{2h} \leq \frac{(|y_1| + |y_{-1}|)}{2h} 0,5 \cdot 10^{-15} \approx \frac{|y_0|}{2h} 10^{-15}.$$

Суммарная погрешность двухточечной формулы численного дифференцирования и ее минимизация.

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_{\text{метод}} + \Delta_{\text{выч}}(\hat{y}'_0) = \frac{h^2}{6} \max_{x_{-1} < \xi < x_1} |y^{(3)}(\xi)| + \frac{|y_0|}{2h} 10^{-15} = C_1 h^2 + \frac{C_2}{h}, \\ C_1 &= \frac{\max_{x_{-1} < \xi < x_1} |y^{(3)}(\xi)|}{6}, \quad C_2 = \frac{|y_0|}{2} 10^{-15}. \end{aligned}$$

Из принципа равного вклада методической и вычислительной погрешностей $\Delta_{\text{метод}} = \Delta_{\text{выч}}(\hat{y}'_0)$ имеем

$$h = \sqrt[3]{\frac{C_2}{C_1}} = \sqrt[3]{\frac{3|y_0|10^{-15}}{\max_{x_{-1} < \xi < x_1} |y^{(3)}(\xi)|}} \approx 1,44 \cdot 10^{-5} \sqrt[3]{\frac{|y_0|}{\max_{x_{-1} < \xi < x_1} |y^{(3)}(\xi)|}}.$$

Но из условия минимума $(h^*)^2 C_1 + \frac{C_2}{h^*} = \min$ получим

$$h^* = \sqrt[3]{\frac{C_2}{2C_1}} \approx 1,14 \cdot 10^{-5} \sqrt[3]{\frac{|y_0|}{\max_{x_{-1} < \xi < x_1} |y^{(3)}(\xi)|}},$$

что на 20 % меньше шага, найденного из принципа равного вклада.

Почему двухточечная? А.Н. Тихонов предложил регуляризацию решения некорректных задач, к которым относится и численное дифференцирование [11]. С.Б. Стечкин решил экстремальную задачу [12]

$$\sup_{|f''(x)| \leq m} \left\| Sf(x) - \frac{d}{dx} f(x) \right\| \rightarrow \inf_S, \quad \|S\| \leq \frac{1}{\alpha},$$

где S — ограниченный однородный аддитивный оператор $S \in [C \rightarrow C]$.

С.Б. Стечкин нашел оптимальный оператор численного дифференцирования в виде двухточечной формулы

$$R^0 = R^0_\alpha f(x) = \frac{f(x + \alpha) - f(x - \alpha)}{2\alpha},$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\delta}{m}}, \quad \delta \geq \|f'_\delta(x) - f(x)\|_c, \quad m \geq \|f''(x)\|_c.$$

Шаг в двухточечной формуле центральных разностей зависит от уровня вычислительной погрешности и от степени кривизны функции. Проблеме численного дифференцирования всегда уделялось особое внимание в отечественной и зарубежной математической периодике [13–17].

Заключение. Изложены теоретические основы методологии автоматизации моделирования механических систем со многими степенями свободы с использованием аппарата уравнений Лагранжа второго рода. Проведен аналитический этап построения математической модели СГП. Выделены такие ключевые этапы, как получение уравне-

ний модели, учет и анализ влияния вычислительных и методических погрешностей численного дифференцирования на реальной ЭВМ, численное интегрирование начальной задачи Коши многошаговым методом Адамса.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике*. Е.С. Пятницкий, ред. 3-е изд. Москва, Физматлит, 2005, 264 с.
- [2] Лурье А.И. *Аналитическая механика*. Москва, Наука, 1961, 824 с.
- [3] Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Аналитические и качественные методы*. 2-е изд. Москва, Наука, 1978, 457 с.
- [4] Голубев Ю.Ф. *Основы теоретической механики*, 2-е изд. Москва, Изд-во МГУ, 2000, 719 с.
- [5] Shampine L.F., Gordon M.K. *Computer solution of ordinary differential equations; the initial value problem*. San Francisco, Freeman and Company, 1975, 318 p.
- [6] Gear C.W. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall, 1971, 253 p.
- [7] Холл Дж., Уатт Дж. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва, Мир, 1979, 312 с.
- [8] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. Москва, Наука, 1987, 600 с.
- [9] R. van Wyk. Variable Mesh Multistep Methods for Ordinary Differential Equations. *J. Comput. Phys.*, 1970, vol. 5 (2), pp. 244–264.
- [10] Хайпер Э., Нёрсерт С., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи*. Москва, Мир, 1990, 512 с.
- [11] Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. *ДАН СССР*, 1963, т. 151, № 3, с. 501–504.
- [12] Стечкин С.Б. Наилучшее приближение линейных операторов. *Мат. заметки*, 1967, т. 1, № 2, с. 137–148.
- [13] Васин В.В. Об устойчивом вычислении производной в $C(-\infty, \infty)$. *ЖВММФ*, 1973, т. 13, № 6, с. 1383–1389.
- [14] Cullum J. *SIAM J. Num. Anal.*, 1967, vol. 8 (2), pp. 254–262.
- [15] Curtis A., Reid J.K. *J. Inst. Math. Appl.*, 1974, vol. 13, pp. 121–126.
- [16] Stepleman R.S., Winarsky N.D. *Mathematics of Computation*, 1979, vol. 33 (148), pp. 1257–1264.
- [17] Dumontet J., Vignes J. Determination du pas Optimal Daus le Calcul des Derivees sur Ordinatoner R.A.I.R.O. *Analyse Numerique. Numerical Analysis*, 1977, vol. 11, № 1, pp. 13–25.
- [18] Уилкинсон, Райнш. *Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра*. Москва, Машиностроение, 1976, 600 с.

Статья поступила в редакцию 27.06.2013

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Журавлёв Ю.В. Математическое моделирование механических систем со многими степенями свободы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/1117.html>

Журавлёв Юрий Васильевич родился в 1947 г., окончил Московский авиационный институт в 1974 г., МГУ им. М.В. Ломоносова в 1981 г. Старший преподаватель кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных публикаций в области моделирования, идентификации, управления динамическими системами.
e-mail: zhurjurwas270747@yandex.ru